IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA

JUNIORI

15. 3. 2019.

Zadatak 1. Neka je A_n $n \times n$ matrica takva da na polju u i-tom retku i j-tom stupcu stoji broj $\binom{i+j-2}{j-1}$. Odredi $det(A_n)$.

Rješenje. Uočimo da prema Pascalovom pravilu vrijedi $a_{i,j} + a_{i+1,j-1} = a_{i+1,j}$, odnosno $a_{i+1,j-1} = a_{i+1,j} - a_{i,j}$. Ovo znači da ako $(i+1)$-vom retku oduzmemo onaj iznad njega, na polju u $(i+1)$-vom retku i j-tom stupcu će pisati broj koji se nalazio neposredno lijevo od njega, pa možemo gledati kao da ovaj postupak pomiče sve obrađene retke za jedno mjesto udesno. Ovaj postupak najprije napravimo za sve $1 \leq i \leq n-1$, počevši od $n-1$. Zatim ga opet napravimo za sve $2 \leq i \leq n-1$, pa za sve $3 \leq i \leq n-1$ itd. Na kraju nam ostane trokutasta matrica s jedinicama na dijagonali pa je $det(A_n) = 1$. Ilustracija za $n = 4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 1 & 4 & 10 & 20 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 4 & 10 \end{bmatrix} \to$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

✓

Zadatak 2. Neka je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ padajući niz nenegativnih brojeva takav da vrijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ i postoji $M > 0$ takav da za svaki $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $(a_1 - a_n) + \cdots + (a_{n-1} - a_n) \leq M$. Dokažite da red $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ konvergira.

Rješenje. Kako su svi članovi reda pozitivni, dovoljno je dokazati da su parcijalne sume uniformno ograničene. Neka je m proizvoljan. Odaberimo n dovoljno velik, tako da je $a_n \leq \frac{a_m}{2}$ (to možemo jer niz a_n-ova konvergira u 0). Iz uvjeta zadatka na taj n vrijedi:

$$M \geq \sum_{i=1}^{m} a_i - ma_n + \underbrace{\sum_{i=m+1}^{n} a_i - (n-m)a_n}_{\geq 0} \geq \sum_{i=1}^{m} a_i - ma_n \geq ma_m - \frac{ma_m}{2} = \frac{ma_m}{2}$$

Odatle slijedi $ma_m \leq 2M$. Konačno, iz uvjeta primijenjenog na m vrijedi:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \leq M + ma_m \leq 3M$$

. ✓

Zadatak 3. Neka su $1 = d_1 < d_2 < \ldots d_{\sigma(n)}$ svi djelitelji od n. Odredite n ako znamo da je

1. $n = d_{13} + d_{14} + d_{15}$

2. $(d_5+1)^3 = d_{15}+1$.

Rješenje. Kad bi bilo $d_{15} \le \frac{n}{3}$, bilo bi $d_{14} \le \frac{n}{4}$ i $d_{13} \le \frac{n}{5}$, pa bi bilo $d_{13}+d_{14}+d_{15} < n$. Zato je $n > d_{15} > \frac{n}{3}$ pa je jedino moguće $d_{15} = \frac{n}{2}$ i $2 \mid n$.
Kad bi bilo $3 \nmid n$, bilo bi $d_{14} \le \frac{n}{4}$ i $d_{13} \le \frac{n}{5}$, što je opet nemoguće jer bi bilo $d_{13}+d_{14}+d_{15} < n$. Zato $3 \mid n$ i $d_{14} = \frac{n}{3}$. To nam odmah daje $d_{13} = \frac{n}{6}$. Iz toga je jasno da je $d_1 = 1, d_2 = 2, d_3 = 3, d_4 = 6$. To nam odmah daje da $4 \nmid n$ i $5 \nmid n$.
Kako $6 \mid n$, to $3 \mid \frac{n}{2}$, odnosno $3 \mid d_{15}$. Zato imamo $(d_5+1)^3 = d_{15}+1 \equiv 1 (mod\, 3)$. Iz malog Fermatovog teorema slijedi $d_5 + 1 \equiv 1 (mod\, 3)$ pa $3 \mid d_5$. Zato je $d_5 = 3d_i$ za neki $1 \le i \le 4$. Vrijedi $d_5 > d_4 = 3d_2 > 3d_1$, pa je $d_5 = 3d_i$ za neki $3 \le i \le 4$. Kako su i d_3 i d_4 djeljivi s 3, slijedi $9 \mid d_5$ pa i $9 \mid n$.
Kad bi bilo $d_5 > 9$, tada bi postojao djelitelj od n između d_4 i d_5 (upravo 9), a to je nemoguće. Zato je $d_5 = 9$. Sada lagano iz uvjeta zadatka slijedi $d_{15} = 999$ i odmah imamo $n = 2d_{15} = 1998$. Lagana provjera pokazuje da je to zaista rješenje. ✓

Zadatak 4. U svakom polju $m \times n$ tablice stoji broj 1 ili -1. Tablicu zovemo *nerješivom* ako je nemoguće nizom dozvoljenih koraka dobiti tablicu u kojoj na svim poljima stoji broj 1.

a) Neka su dozvoljeni koraci pomnožiti cijeli redak ili stupac s -1. Ako je tablica nerješiva, dokaži da ona tada ima nerješivu 2×2 podtablicu.

b) Neka su dozvoljeni koraci pomnožiti cijeli redak, stupac ili dijagonalu (bilo koje duljine) s -1. Ako je tablica nerješiva, dokaži da ona tada ima nerješivu 4×4 podtablicu.

Rješenje.

a) Prvo uočimo da je 2×2 tablica nerješiva ako i samo ako sadrži neparan broj brojeva -1. Zaista, nijedna od operacija ne mijenja parnost broja negativnih brojeva u tablici pa je takva tablica s neparno brojeva -1 sigurno nerješiva. S druge strane, ako sadrži 2 negativna broja, u najviše jednom koraku možemo postići da su ta dva negativna broja u istom retku ili stupcu i onda lagano dovršiti. Ako sadrži 0 ili 4 negativnih brojeva, tvrdnja je očita.
Pretpostavimo da cijela tablica nema nerješivu 2×2 podtablicu. Pokazat ćemo da je ona tada nije nerješiva. Trivijalno, operacijama nad stupcima možemo postići da u prvom retku pišu samo brojevi 1. Sada su na prva dva polja u drugom retku nužno isti brojevi, inače bi tablica 2×2 u gornjem lijevom kutu bila nerješiva. Analogno i za drugo i treće polje itd. Zaključujemo da u drugom retku pišu svi isti brojevi, pa ga trivijalno prevodimo u redak pun jedinica. Ova logika se sada na identičan način iskoristi i za svaki idući redak i konačno dobijamo da tablica nije nerješiva.

b) Kao i u prvom dijelu, najprije želimo naći nekakav nužan i dovoljan uvjet kad je tablica 4×4 nerješiva. Dokazat ćemo da je ona nerješiva ako i samo ako na osam rubnih polja koja nisu kutna sadrži neparno mnogo brojeva -1 (polja s brojem -1 u donjoj tablici).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jasno je da nijedna od dozvoljenih operacija ne mijenja parnost broja takvih negativnih brojeva (laka provjera). Zato je taj uvjet dovoljan za nerješivost. Pokažimo da je i nužan.

Kad bi na istaknutim mjestima bilo parno brojeva -1, mogli bismo najprije operacijom nad stupcima postići da sva istaknuta polja u prva dva retka budu popunjena s brojevima 1. Ako su dva istaknuta polja u trećem retku istog predznaka, onda su i u četvrtkom retku istaknuta polja istog predznaka, pa transformacijom redaka dobijamo da u svim istaknutim poljima piše 1. Ako su različitog predznaka u trećem retku, onda moraju biti i u četvrtom. No, tada primjenom operacije na bilo koju od dijagonala duljine 2 koja sadržava dva istaknuta polja (po jedno u trećem i četvrtom retku) postižemo prethodni slučaj kad su istog predznaka. Na taj način smo sredili istaknuta polja. Kutna polja lako promijenimo po potrebi jer su ona zapravo dijagonale duljine 1. Preostaju još središnja polja. Polje u drugom retku i drugom stupcu možemo promijeniti bez da promijenimo ijedno drugo polje uz ovaj niz operacija: prvo djelujemo na drugi redak, pa na drugi stupac. Zatim djelujemo na sporednu dijagonalu koja sadrže polje u prvom stupcu i drugom retku, pa onu koja sadrži polje u prvom stupcu i trećem retku te na onu koja sadrži polje u prvom stupcu i četvrtom retku. Za kraj, djelujemo na glavne dijagonale koje sadrže polje u prvom stupcu i četvrtom retku, pa ono u drugom stupcu i četvrtom retku, pa ono u prvom retku i četvrtom stupcu, pa ono u drugom retku i četvrtom stupcu. Analogno i za ostala središnja polja. Ovime je dokazan kriterij za nerješivost 4×4 tablice.

Sada pretpostavimo da nemamo nerješivu 4×4 podtablicu i dokažimo da tada cijela tablica nije nerješiva. Sličnom idejom kao ranije, najprije ćemo postići da su sva polja u prva tri retka popunjena brojevima 1. Idemo stupac po stupac slijeva nadesno. Najprije pomoću transformacije stupca osiguramo da je na polju u drugom retku 1. Zatim (po potrebi) iskoristimo transformaciju na glavnu dijagonalu koja prolazi kroz polje u prvom retku i na sporednu dijagonalu koja prolazi kroz polje u trećem retku. Te operacije ne mijenjaju prethodne stupce, a osiguravaju da su prva tri polja u trenutnom stupcu jedinice. Sada gledamo četvrti redak. Promotrimo 4×4 tablicu u gornjem lijevom kutu. Po dokazanom kriteriju, drugo i treće polje u četvrtom retku moraju zauzimati isti brojevi. Istu stvar dobijemo i za treće i četvrto polje itd. Zaključujemo da su u četvrtom retku svi brojevi isti, ako ne gledamo prvo i zadnje polje. Prvo polje po potrebi mijenjamo tako da djelujemo na glavnu dijagonalu koja ga sadrži, a posljednje tako da djelujemo na njegovu sporednu dijagonalu. Te promjene neće utjecati na prethodne retke tablice. Na taj način lako postignemo da su sva polja u četvrtom retku ista pa ih lako možemo postaviti na jedinice. Ovo nastavljamo dalje i dobijamo da je tablica rješiva.

✓

IZBORNO NATJECANJE ZA VOJTĚCH JARNIK - RJEŠENJA

SENIORI

15. 3. 2019.

Zadatak 1. Neka je G grupa. Dokažite da je ekvivalentno:

1. Svaka podrupa od G je normalna.
2. Za sve $a, b \in G$ postoji $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $(ab)^n = ba$

Rješenje. $\boxed{\Rightarrow}$ Promotrimo cikličku podgrupu $\langle ab \rangle$. Zbog toga što je ona normalna, vrijedi: $ba = b(ab)b^{-1} \in \langle ab \rangle$, tj. po definiciji ciklličke grupe postoji $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $ba = (ab)^n$.
$\boxed{\Leftarrow}$ Neka je H podgrupa od G te neka su $h \in H$ i $g \in G$ proizvoljni. Po pretpostavci postoji $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $ghg^{-1} = ((hg^{-1})g)^n = h^n \in H$. Dakle, H je normalna podgrupa. ✓

Zadatak 2. Neka je $f : [1, \infty\rangle \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, takva da $\lim_{x\to\infty} xf(x)$ postoji i konačan je. Za proizvoljan realan broj $a > 1$ dokažite da oba limesa:

$$\lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{f(x)}{x} dx \quad \text{i} \quad \lim_{n\to\infty} n \int_1^a f(x^n) dx$$

postoje i da su jednaki.

Rješenje. Za proizvoljan $t > 1$ vrijedi:

$$\int_1^t \frac{f(x)}{x} dx = \sum_{n=1}^{\lfloor t \rfloor - 1} \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx + \int_{\lfloor t \rfloor}^t \frac{f(x)}{x} dx$$

Označimo $s_n := \int_n^{n+1} \frac{f(x)}{x} dx$ te $r(t) = \int_{\lfloor t \rfloor}^t \frac{f(x)}{x} dx$. Iz uvjeta zadatka slijedi da postoje $n_0 \in \mathbb{N}$ i $M > 0$ takvi da za sve $x \geq n_0$ vrijedi $|f(x)| \leq \frac{M}{x}$ pa za $n, t \geq n_0 + 1$ vrijedi $|s_n| \leq \int_n^{n+1} \frac{M}{x^2} dx = \frac{M}{n(n+1)}$ i $|r(t)| \leq \int_{t-1}^t \frac{M}{x^2} dx \leq \frac{M}{t(t-1)}$. Dakle, red $\sum_{n=1}^\infty s_n$ je apsolutno konvergentan pa je zbog toga i konvergentan. Također vrijedi da $r(t) \to 0$ za $t \to \infty$ pa odatle slijedi da prvi limes postoji i konačan je.
Okrenimo se drugom limesu. Supstitucijom $x^n = u$ dobivamo

$$\lim_{n\to\infty} n \int_1^a f(x^n) dx = \lim_{n\to\infty} \int_1^{a^n} \frac{f(u)}{u} u^{-\frac{1}{n}} du$$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan i neka je $A \geq \max(n_0, \varepsilon^{-1})$ takav da je $\left| \int_A^\infty \frac{f(x)}{x} dx \right| < \varepsilon$. Označimo li $g^+(u) := \max\left(\frac{f(u)}{u}, 0\right)$, i $g^-(u) = -\min\left(\frac{f(u)}{u}, 0\right)$, tada su obje funkcije neprekidne, pozitivne i vrijedi $\frac{f(u)}{u} = g^+(u) - g^-(u)$. Nadalje, za proizvoljni $\varepsilon' > 0$ postoji n_1 dovoljno velik, tako da za sve $n \geq n_1$ i $1 \leq u \leq A$ vrijedi $1 - \varepsilon' < u^{-\frac{1}{n}} < 1$. Odatle za $n > n_1$ slijedi

$$(1 - \varepsilon') \int_1^A g^+(u) du \leq \int_1^A g^+(u) u^{-\frac{1}{n}} du \leq \int_1^A g^+(u) du$$

te potpuno analogno za g^-. Kako je $\varepsilon' > 0$ bio proizvoljan, po teoremu o sendviču zaključujemo da je

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_0^A g^+(u)u^{-\frac{1}{n}}du = \int\limits_1^A g^+(u)du$$

te analogno za funkciju g^-. Oduzimanjem slijedi da je $\lim_{n\to\infty} \int_1^A \frac{f(u)}{u} u^{-\frac{1}{n}} du = \int_1^A \frac{f(u)}{u} du$. Konačno, zbog $|\int_A^{a^n} \frac{f(u)}{u} u^{-\frac{1}{n}} du| \leq \int_A^\infty \frac{M}{u^2} \leq MA^{-1} \leq M\varepsilon$ zaključujemo da za dovoljno velik n vrijedi

$$\left| \int\limits_1^{a^n} \frac{f(u)}{u} u^{-\frac{1}{n}} du - \int\limits_1^{\infty} \frac{f(u)}{u} du \right| \leq \left| \int\limits_1^A \frac{f(u)}{u} u^{-\frac{1}{n}} \right| + \left| \int\limits_A^{a^n} \frac{f(u)}{u} u^{-\frac{1}{n}} du \right| + \left| \int\limits_A^{\infty} \frac{f(u)}{u} du \right|$$

Prema prethodno dokazanom, puštanjem $n \to \infty$ prvi sumand na desnoj strani konvergira u 0, drugi izraz je manji od $M\varepsilon$ i treći je manji od ε. Kako je ε bio proizvoljan, zaključujemo da su limesi jednaki. ✓

Zadatak 3. Dana je fiksna realna kvadratna matrica A reda n. Pretpostavimo da ortogonalna matrica Q reda n maksimizira $\mathrm{tr}(QA)$. Dokažite da je tada matrica QA simetrična.

Rješenje. Pretpostavimo da matrica $B = QA = [b_{i,j}]$ nije simetrična i neka su $k < l$ indeksi za koje je $b_{k,l} \neq b_{l,k}$. Definirajmo rotaciju za kut θ u dvodimenzionalnoj koordinatnoj ravnini određenoj indeksima k i l:

$$R(\theta) := \begin{bmatrix} 1 & & \vdots & & \vdots & & \\ & \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \cos\theta & \cdots & -\sin\theta & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \cdots & \cdots & \sin\theta & \cdots & \cos\theta & \cdots & \cdots \\ & & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & & \vdots & & \vdots & & 1 \end{bmatrix}.$$

To je svakako ortogonalna matrica, kao i $R(\theta)Q$, te primijetimo da dijagonala od $R(\theta)B$ glasi

$$b_{1,1}, \ldots, b_{k-1,k-1}, b_{k,k}\cos\theta - b_{l,k}\sin\theta, b_{k+1,k+1}, \ldots, b_{l-1,l-1}, b_{k,l}\sin\theta + b_{l,l}\cos\theta, b_{l+1,l+1}, \ldots, b_{n,n}$$

te je posljedično

$$\mathrm{tr}(R(\theta)B) = (b_{k,k} + b_{l,l,})\cos\theta + (b_{k,l} - b_{l,k})\sin\theta + \sum_{i\neq k, i\neq l} b_{i,i}.$$

Radi maksimalnosti pretpostavljene u zadatku funkcija $\theta \mapsto \mathrm{tr}(R(\theta)QA) = \mathrm{tr}(R(\theta)B)$ postiže maksimum u točki $\theta = 0$. Po nužnom uvjetu za ekstrem imamo

$$0 = \frac{d}{d\theta}\bigg|_{\theta=0} \mathrm{tr}(R(\theta)B) = b_{k,l} - b_{l,k},$$

što nas je dovelo do kontradikcije.

Rješenje #2:

Neka je $A = U\Sigma V^T$ SVD dekompozicija matrice A, tj. U i V su ortogonalne matrice reda n, a $\Sigma = \mathrm{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ je dijagonalna matrica s elementima $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_n \geq 0$, tzv.

singularnim vrijednostima. Ako je A nul-matrica, tvrdnja je trivijalna pa pretpostavimo da je k najveći indeks takav da je $\sigma_k > 0$. Radi poznatog svojstva traga $\mathrm{tr}(MN) = \mathrm{tr}(NM)$ i uz supstituciju $R = V^T QU$ imamo

$$\mathrm{tr}(QA) = \mathrm{tr}(QU\Sigma V^T) = \mathrm{tr}(V^T QU\Sigma) = \mathrm{tr}(R\Sigma)$$

i primijetimo da je $R = [r_{i,j}]$ zapravo ortogonalna matrica reda n koja maksimizira

$$\mathrm{tr}(R\Sigma) = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i r_{i,i} = \sum_{i=1}^{k} \sigma_i r_{i,i}.$$

Radi $r_{i,i} \leq 1$ gornji izraz je najviše $\sum_{i=1}^{k} \sigma_i$ i jednakost se postiže samo u slučajevima kada je $r_{i,i} = 1$ za $i = 1, 2, \ldots, k$, što ima za posljedicu da je prvih k stupaca od R upravo prvih k vektora kanonske baze od $\mathbb{R}^n$. Odatle se odmah vidi $R\Sigma = \Sigma$ te je posljedično

$$QA = QU\Sigma V^T = VR\Sigma V^T = V\Sigma V^T,$$

što je simetrična matrica:

$$(V\Sigma V^T)^T = V\Sigma^T V^T = V\Sigma V^T.$$

✓

Zadatak 4. U svakom polju $m \times n$ tablice stoji broj 1 ili -1. Tablicu zovemo *nerješivom* ako je nemoguće nizom dozvoljenih koraka dobiti tablicu u kojoj na svim poljima stoji broj 1.

a) Neka su dozvoljeni koraci pomnožiti cijeli redak ili stupac s -1. Ako je tablica nerješiva, dokaži da ona tada ima nerješivu 2×2 podtablicu.

b) Neka su dozvoljeni koraci pomnožiti cijeli redak, stupac ili dijagonalu (bilo koje duljine) s -1. Ako je tablica nerješiva, dokaži da ona tada ima nerješivu 4×4 podtablicu.

Rješenje.

a) Prvo uočimo da je 2×2 tablica nerješiva ako i samo ako sadrži neparan broj brojeva -1. Zaista, nijedna od operacija ne mijenja parnost broja negativnih brojeva u tablici pa je takva tablica s neparno brojeva -1 sigurno nerješiva. S druge strane, ako sadrži 2 negativna broja, u najviše jednom koraku možemo postići da su ta dva negativna broja u istom retku ili stupcu i onda lagano dovršiti. Ako sadrži 0 ili 4 negativnih brojeva, tvrdnja je očita.
Pretpostavimo da cijela tablica nema nerješivu 2×2 podtablicu. Pokazat ćemo da je ona tada nije nerješiva. Trivijalno, operacijama nad stupcima možemo postići da u prvom retku pišu samo brojevi 1. Sada su na prva dva polja u drugom retku nužno isti brojevi, inače bi tablica 2×2 u gornjem lijevom kutu bila nerješiva. Analogno i za drugo i treće polje itd. Zaključujemo da u drugom retku pišu svi isti brojevi, pa ga trivijalno prevodimo u redak pun jedinica. Ova logika se sada na identičan način iskoristi i za svaki idući redak i konačno dobijamo da tablica nije nerješiva.

b) Kao i u prvom dijelu, najprije želimo naći nekakav nužan i dovoljan uvjet kad je tablica 4×4 nerješiva. Dokazat ćemo da je ona nerješiva ako i samo ako na osam rubnih polja koja nisu kutna sadrži neparno mnogo brojeva -1 (polja s brojem -1 u donjoj tablici).

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Jasno je da nijedna od dozvoljenih operacija ne mijenja parnost broja takvih negativnih brojeva (laka provjera). Zato je taj uvjet dovoljan za nerješivost. Pokažimo da je i nužan. Kad bi na istaknutim mjestima bilo parno brojeva -1, mogli bismo najprije operacijom nad stupcima postići da sva istaknuta polja u prva dva retka budu popunjena s brojevima 1. Ako su dva istaknuta polja u trećem retku istog predznaka, onda su i u četvrtkom retku istaknuta polja istog predznaka, pa transformacijom redaka dobijamo da u svim istaknutim poljima piše 1. Ako su različitog predznaka u trećem retku, onda moraju biti i u četvrtom. No, tada primjenom operacije na bilo koju od dijagonala duljine 2 koja sadržava dva istaknuta polja (po jedno u trećem i četvrtom retku) postižemo prethodni slučaj kad su istog predznaka. Na taj način smo sredili istaknuta polja. Kutna polja lako promijenimo po potrebi jer su ona zapravo dijagonale duljine 1. Preostaju još središnja polja. Polje u drugom retku i drugom stupcu možemo promijeniti bez da promijenimo ijedno drugo polje uz ovaj niz operacija: prvo djelujemo na drugi redak, pa na drugi stupac. Zatim djelujemo na sporednu dijagonalu koja sadrže polje u prvom stupcu i drugom retku, pa onu koja sadrži polje u prvom stupcu i trećem retku te na onu koja sadrži polje u prvom stupcu i četvrtom retku. Za kraj, djelujemo na glavne dijagonale koje sadrže polje u prvom stupcu i četvrtom retku, pa ono u drugom stupcu i četvrtom retku, pa ono u prvom retku i četvrtom stupcu, pa ono u drugom retku i četvrtom stupcu. Analogno i za ostala središnja polja. Ovime je dokazan kriterij za nerješivost 4×4 tablice.

Sada pretpostavimo da nemamo nerješivu 4×4 podtablicu i dokažimo da tada cijela tablica nije nerješiva. Sličnom idejom kao ranije, najprije ćemo postići da su sva polja u prva tri retka popunjena brojevima 1. Idemo stupac po stupac slijeva nadesno. Najprije pomoću transformacije stupca osiguramo da je na polju u drugom retku 1. Zatim (po potrebi) iskoristimo transformaciju na glavnu dijagonalu koja prolazi kroz polje u prvom retku i na sporednu dijagonalu koja prolazi kroz polje u trećem retku. Te operacije ne mijenjaju prethodne stupce, a osiguravaju da su prva tri polja u trenutnom stupcu jedinice. Sada gledamo četvrti redak. Promotrimo 4×4 tablicu u gornjem lijevom kutu. Po dokazanom kriteriju, drugo i treće polje u četvrtom retku moraju zauzimati isti brojevi. Istu stvar dobijemo i za treće i četvrto polje itd. Zaključujemo da su u četvrtom retku svi brojevi isti, ako ne gledamo prvo i zadnje polje. Prvo polje po potrebi mijenjamo tako da djelujemo na glavnu dijagonalu koja ga sadrži, a posljednje tako da djelujemo na njegovu sporednu dijagonalu. Te promjene neće utjecati na prethodne retke tablice. Na taj način lako postignemo da su sva polja u četvrtom retku ista pa ih lako možemo postaviti na jedinice. Ovo nastavljamo dalje i dobijamo da je tablica rješiva.

✓