

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi ispit (nastavnički smjer) – 15. lipnja 2026.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta.

Zadatak 1. (14 bodova) Definirajte zvjezdast skup. Iskažite Cauchy-ev teorem za zvjezdast skup. Objasnite glavne ideje dokaza tog teorema. Koja je uloga Goursat–Pringsheimovog teorema? Svoj odgovor obrazložite.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi ispit (nastavnički smjer) – 15. lipnja 2026.

Zadatak 2. (14 bodova) Diskuitirajte razvoj u red potencija cijele funkcije (holomorfne na $\mathbb{C}$) oko točke $z_0 = 0$ (lokalno uniformna konvergencija i radijus konvergencije). Iskažite u tom slučaju Cauchy–eve ocjene na koeficijente i objasnite kako se koriste da se dokaže Liouvilleov teorem.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi ispit (nastavnički smjer) – 15. lipnja 2026.

Zadatak 3. (14 bodova) Zadana je funkcija $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ formulom

$$u(x, y) = e^x \cos y - 2xy.$$

Odredite (ako postoje) holomorfne funkcije $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ takve da je

(a) $f(1) = e - 1 + (e + 2)i$,

(b) $f(i\pi) = -1 + i\pi$.

Dobivene funkcije zapišite kao funkcije u varijabli $z = x + iy$.**Rješenje 3.** Računamo:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = e^x \cos y - 2y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = e^x \cos y,$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -e^x \sin y - 2x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \cos y.$$

Lagano se pokazuje da je $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Imamo

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Dakle, u je harmonijska. Ako je u realni dio neke holomorfne funkcije f , onda moraju vrijediti C-R uvjeti, odakle dobivamo:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = e^x \cos y - 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = e^x \sin y + 2x.$$

Integriranjem prve jednadžbe po y dobivamo

$$v(x, y) = e^x \sin y - y^2 + C(x),$$

a zatim deriviranjem dobivene jednadžbe po x i izjednačavanjem s izrazom dobivenim C-R uvjetom imamo

$$C'(x) = 2x, \text{ odnosno } C(x) = x^2 + D \text{ za neki } D \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = e^x \cos y - 2xy + i(e^x \sin y - y^2 + x^2 + D)$$

odnosno

$$f(z) = e^z + iz^2 + iD, \quad D \in \mathbb{R}.$$

(a) $f(1) = e - 1 + (e + 2)i \implies e - 1 + (e + 2)i = e + i(1 + D) \implies$ traženi D ne postoji.

(b) $f(i\pi) = -1 + i\pi \implies -1 + i\pi = -1 + i(-\pi^2 + D) \implies D = \pi(1 + \pi).$

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi ispit (nastavnički smjer) – 15. lipnja 2026.

Zadatak 4. (14 bodova) Zadana je funkcija

$$f(z) = \frac{e^{\frac{2026}{z-1}}}{z^3 + 2z^2 + z}.$$

- (a) Odredite singularitete funkcije f te ispitajte njihov karakter. Za polove (ako isti postoje) odredite red.
- (b) Koristeći teorem o reziduumima izračunajte integral

$$\int_{\Gamma} f(z) dz,$$

pri čemu je Γ pozitivno orijentirana kružnica oko 0 polumjera 2.

Rješenje 4.

- (a) Singulariteti funkcije f su $z = 0$, $z = 1$ i $z = -1$. Očito su svi izolirani. Klasificirajmo ih:

- $(z+1)^2|_{z=-1} = 0$, $((z+1)^2)'|_{z=-1} = (2(z+1))|_{z=-1} = 0$, $((z+1)^2)''|_{z=-1} \neq 0$
 $\implies -1$ je nultočka drugog reda funkcije $z \mapsto (z+1)^2$
 $\implies -1$ je pol drugog reda funkcije $z \mapsto \frac{1}{(z+1)^2}$.

Jer je funkcija $z \mapsto \frac{e^{\frac{2026}{z-1}}}{z}$ holomorfnu u -1 te je njena evaluacija u toj točki različita od nule, prema tvrdnji s vježbi (2.6.3) zaključujemo da je -1 pol 2. reda funkcije f .

- $z|_{z=0} = 0$, $z'|_{z=0} \neq 0$
 $\implies 0$ je nultočka prvog reda funkcije $z \mapsto z$
 $\implies 0$ je pol prvog reda funkcije $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Jer je funkcija $z \mapsto \frac{e^{\frac{2026}{z-1}}}{(z+1)^2}$ holomorfnu u 0 te je njena evaluacija u toj točki različita od nule, prema tvrdnji s vježbi (2.6.3) zaključujemo da je 0 pol 1. reda funkcije f .

- Funkcija $z \mapsto e^z$ je holomorfnu na $\mathbb{C}$ i vrijedi $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$, $z \in \mathbb{C}$. Oдавde je funkcija $z \mapsto e^{\frac{2026}{z-1}}$ holomorfnu na $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ i vrijedi $e^{\frac{2026}{z-1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2026^n}{n!} \frac{1}{(z-1)^n}$. Direktno iz Laurentovog reda iščitavamo da je 1 bitan singularitet funkcije $z \mapsto e^{\frac{2026}{z-1}}$.

Ponovno, jer je funkcija $z \mapsto \frac{1}{z^3+2z^2+z}$ holomorfnu u 1 te je njena evaluacija u toj točki različita od nule, prema spomenutoj tvrdnji s vježbi zaključujemo da je 1 bitan singularitet funkcije f .

- (b) Prema (a) je 1 bitan singularitet funkcije f (koji se ujedno nalazi unutar $S(0, 2)$), stoga je prirodno pokušati izračunati integral koristeći reziduume u singularitetima koji se nalaze izvan $S(0, 2)$. Računamo:

$$f_1(z) = f\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{e^{\frac{2026}{\frac{1}{z}-1}}}{\frac{1}{z^3} + \frac{2}{z^2} + \frac{1}{z}} = \frac{z^3 e^{\frac{2026z}{z-1}}}{1 + 2z + z^2}.$$

Očito je $\lim_{z \rightarrow 0} f_1(z) = 0$, stoga zaključujemo da je f analitička u beskonačnosti. Sada je

$$Res(f, \infty) = \lim_{z \rightarrow +\infty} z(f(\infty) - f(z)) = - \lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{2026}{z-1}}}{z^2 + 2z + 1} = 0.$$

Koristeći teorem o reziduuumima i relaciju za sumu reziduuma dobivamo

$$\int_{\Gamma} \frac{e^{\frac{2026}{z-1}}}{z^3 + 2z^2 + z} dz = -2\pi i Res(f, \infty) = 0.$$

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi ispit (nastavnički smjer) – 15. lipnja 2026.

Zadatak 5. (14 bodova) Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(2x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 9)} dx.$$

Rješenje 5. Označimo gornji integral s I i stavimo

$$f(z) := \frac{1}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}.$$

Singulariteti funkcije f su $z_1 = i, z_2 = -i, z_3 = 3i, z_4 = -3i$. Primijetimo da su svi z_i polovi 1. reda te da se z_1 i z_3 nalaze u gornjoj poluravnini. Primijetimo također da se niti jedan singularitet ne nalazi na realnoj osi.

Za $|z| = R$ (gdje je R dovoljno velik) imamo

$$|f(z)| = \frac{1}{|(z^2 + 1)(z^2 + 9)|} \leq \frac{1}{|z|^4 - 10|z|^2 - 9} = \frac{1}{R^4 - 10R^2 - 9}.$$

Stavimo

$$M(R) := \frac{1}{R^4 - 10R^2 - 9}, \quad F(z) := \frac{e^{2iz}}{(z^2 + 1)(z^2 + 9)}.$$

Vrijedi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} M(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R^4 - 10R^2 - 9} = 0,$$

stoga prema Jordanovoj lemi imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i (Res(F, i) + Res(F, 3i)).$$

Računamo pripadne reziduume:

$$Res(F, i) = \lim_{z \rightarrow i} (z - i)F(z) = -\frac{i}{16e^2},$$

$$Res(F, 3i) = \lim_{z \rightarrow 3i} (z - 3i)F(z) = \frac{i}{48e^6},$$

pa je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \Re \left(2\pi i \left(-\frac{i}{16e^2} + \frac{i}{48e^6} \right) \right) = \frac{\pi(3e^4 - 1)}{24e^6}.$$