

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi ispit (nastavnički smjer) – 29. lipnja 2026.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta.

Zadatak 1. (14 bodova) Iskažite i dokažite Cauchy-ev teorem za derivaciju. Iskažite Cauchy-ev teorem za zvjezdast skup i iskoristite ga da odredite primitivnu funkciju od $1/z$ na domeni koju treba specificirati.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi ispit (nastavnički smjer) – 29. lipnja 2026.

Zadatak 2. (14 bodova) Definirajte područje. Definirajte gomilište skupa. Iskažite princip jedinstvenosti za holomorfne funkcije. Ako je cijela funkcija f identički jednaka nuli na imaginarnoj osi, koliko je $f(1)$? Svoj odgovor obrazložite.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi ispit (nastavnički smjer) – 29. lipnja 2026.

Zadatak 3. (14 bodova) Razvijte funkciju

$$f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z$$

u Taylorov red oko točke $z_0 = 0$ i odredite radijus konvergencije dobivenog reda.

Rješenje 3. Uočimo,

$$f(z) = \sin^4 z + \cos^4 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^4 + \left(\frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^4 =: \frac{1}{16}(A + B).$$

Računamo:

$$A = (e^{iz} - e^{-iz})^4 = e^{4iz} - 4e^{2iz} + 6 - 4e^{-2iz} + e^{-4iz}.$$

Analogno je

$$B = (e^{iz} + e^{-iz})^4 = e^{4iz} + 4e^{2iz} + 6 + 4e^{-2iz} + e^{-4iz}.$$

Konačno,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{8} (e^{4iz} + 6 + e^{-4iz}) \\ &= \frac{1}{8} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4i)^n}{n!} z^n + 6 + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (4i)^n}{n!} z^n \right) \\ &= \frac{3}{4} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4i)^n [1 + (-1)^n]}{8n!} z^n \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(4i)^n [1 + (-1)^n]}{8n!} z^n \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2(4i)^{2k}}{8(2k)!} z^{2k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(4i)^{2k}}{4(2k)!} z^{2k}. \end{aligned}$$

Područje konvergencije reda je cijeli $\mathbb{C}$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi ispit (nastavnički smjer) – 29. lipnja 2026.

Zadatak 4. (14 bodova) Odredite broj nultočaka funkcije

$$h(z) = z^7 + 5z^4 + 10z^2 + 1$$

unutar $V(0; 1, 2)$, pritom računajući njihove kratnosti.

Rješenje 4. Odredit ćemo broj $N_{S(0,1)}(h)$ nultočaka funkcije h unutar $S(0, 1)$, zatim broj $N_{S(0,2)}(h)$ istih unutar $S(0, 2)$, a potom od $N_{S(0,2)}(h)$ oduzeti $N_{S(0,1)}(h)$ i broj nultočaka funkcije h na $S(0, 1)$.

- Uzmimo $f(z) = 10z^2$, $g(z) = z^7 + 5z^4 + 1$. Očito je $h = f + g$. Nadalje, za $z \in S(0, 1)$ vrijedi

$$|f(z)| = 10|z|^2 = 10, \quad |g(z)| = |z^7 + 5z^4 + 1| \leq |z|^7 + 5|z|^4 + 1 = 7.$$

Dakle, za sve $z \in S(0, 1)$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, stoga iz Rouchéovog teorema slijedi $N_{S(0,1)}(h) = N_{S(0,1)}(f) = 2$.

- Uzmimo $f(z) = z^7$, $g(z) = 5z^4 + 10z^2 + 1$. Očito je $h = f + g$. Nadalje, za $z \in S(0, 2)$ vrijedi

$$|f(z)| = |z|^7 = 128, \quad |g(z)| = |5z^4 + 10z^2 + 1| \leq 5|z|^4 + 10|z|^2 + 1 = 80 + 40 + 1 = 121.$$

Dakle, za sve $z \in S(0, 2)$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, stoga iz Rouchéovog teorema slijedi $N_{S(0,2)}(h) = N_{S(0,2)}(f) = 7$.

- Ima li h nultočaka na $S(0, 1)$? Pretpostavimo da ima, tj. da je $h(z) = 0$ za neki $z \in S(0, 1)$. Tada je

$$z^7 + 5z^4 + 10z^2 = -1.$$

Međutim, tada je

$$1 = |-1| = |z^7 + 5z^4 + 10z^2| \geq 10|z|^2 - |z|^7 - 5|z|^4 = 10 - 1 - 5 = 4,$$

što je kontradikcija. Dakle,

$$N_{V(0;1,2)}(h) = N_{S(0,2)}(h) - N_{S(0,1)}(h) = 7 - 2 = 5.$$

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi ispit (nastavnički smjer) – 29. lipnja 2026.

Zadatak 5. (14 bodova) Izračunajte integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 \cos(5x)}{(x^2 + 1)(x^2 + 16)} dx.$$

Rješenje 5. Označimo gornji integral s I i stavimo

$$f(z) := \frac{z^2}{(z^2 + 1)(z^2 + 16)}.$$

Označimo

$$F(z) := f(z)e^{5iz}.$$

Singulariteti funkcije f su $z_1 = i$, $z_2 = -i$, $z_3 = 4i$, $z_4 = -4i$. Primijetimo da su z_1 i z_3 u gornjoj poluravnini te da funkcija f nema singulariteta na realnoj osi. Svi singulariteti su polovi 1. reda. Za $|z| = R$ (gdje je R dovoljno velik) vrijedi

$$|f(z)| = \frac{|z|^2}{|(z^2 + 1)(z^2 + 16)|} \leq \frac{|z|^2}{|z|^4 - 17|z|^2 + 16} = \frac{R^2}{R^4 - 17R^2 + 16} =: M(R).$$

Očito $M(R) \rightarrow 0$ kada $R \rightarrow \infty$, stoga prema Jordanovoj lemi vrijedi

$$\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx = 2\pi i (res(F, z_1) + res(F, z_3)).$$

Računamo

- $res(F, i) = \frac{z^2 e^{5iz}}{(z^4 + 17z^2 + 16)'} \Big|_{z=i} = \frac{e^{-5}}{30} i,$
- $res(F, 4i) = \frac{z^2 e^{5iz}}{(z^4 + 17z^2 + 16)'} \Big|_{z=4i} = -\frac{4e^{-20}}{30} i.$

Kako je

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(5x)}{(x^4 + 17x^2 + 16)} dx = \Re \left(\int_{-\infty}^{+\infty} F(x) dx \right),$$

uvrštavanjem dobivamo $I = \frac{\pi}{15} (4e^{-20} - e^{-5}).$