

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 15. lipnja 2026.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta.

Zadatak 1. (7 bodova) Definirajte lokalnu uniformnu konvergenciju niza holomorfnih funkcija. Iskažite karakterizaciju lokalno uniformne konvergencije. Koja svojstva s obzirom na derivacije vrijede? Iskažite tvrdnju i objasnite ideju dokaza.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 15. lipnja 2026.

Zadatak 2. (7 bodova) Iskažite Liouvilleov teorem i osnovni teorem algebre. Skicirajte glavne ideje dokaza osnovnog teorema algebre iz Liouvilleovog teorema.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 15. lipnja 2026.

Zadatak 3. (7 bodova) Odredite Laurentov razvoj funkcije

$$f(z) = \frac{z+2}{z^2-4z+3}$$

oko točke $z_0 = 1$ u području D koje sadrži 4.

Rješenje 3. Funkcija f je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{1, 3\}$. Dakle, područje D na kojem je f holomorfna te $4 \in D$ jest $V(1; 2, \infty)$ (može se raditi i s podskupovima ovog područja koji sadrže 4). Primijetimo da za $z \in D$ vrijedi

$$2 < |z-1| \iff \frac{2}{|z-1|} < 1.$$

Računamo

$$\frac{z+2}{z^2-4z+3} = \frac{z+2}{(z-1)(z-3)} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z-3}.$$

Standardnim rastavom na parcijalne razlomke lagano dobivamo

$$A = -\frac{3}{2}, \quad B = \frac{5}{2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{z+2}{z^2-4z+3} = -\frac{3}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{z-1} \frac{1}{1-\frac{2}{z-1}} = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{1}{z-1} + \frac{5}{2} \frac{1}{z-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(z-1)^n} = \\ &= -\frac{3}{2} \frac{1}{z-1} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{z-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n-1}}{(z-1)^{n+1}} = \\ &= \frac{1}{z-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{5 \cdot 2^{n-2}}{(z-1)^n}. \end{aligned}$$

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 15. lipnja 2026.

Zadatak 4. (7 bodova) Koristeći Rouchéov teorem odredite broj nultočka polinoma

$$p(z) = z^4 + 50z^2 + 49$$

unutar $V(0; 3, 4)$, pritom računajući njihove kratnosti. Egzaktnim računanjem nultočka provjerite dobiveni rezultat.

Rješenje 4. Izračunat ćemo broj nultočka polinoma p unutar $K(0, 3)$, zatim unutar $K(0, 4)$, a potom provjeriti postoje li nultočke polinoma p na $S(0, 3)$.

- (a) Uzmimo $f(z) = 50z^2$, $g(z) = z^4 + 49$. Očito je $p = f + g$. Nadalje, za $z \in S(0, 3)$ vrijedi

$$|f(z)| = 50|z|^2 = 450, \quad |g(z)| = |z^4 + 49| \leq |z|^4 + 49 = 130.$$

Dakle, za sve $z \in S(0, 3)$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, stoga iz Rouchéovog teorema slijedi $N_{S(0,3)}(p) = N_{S(0,3)}(f) = 2$.

- (b) Uzmimo f i g kao u (a) dijelu zadatka. Za $z \in S(0, 4)$ vrijedi

$$|f(z)| = 50|z|^2 = 800, \quad |g(z)| = |z^4 + 49| \leq |z|^4 + 49 = 305.$$

Dakle, za sve $z \in S(0, 4)$ vrijedi $|g(z)| < |f(z)|$, stoga iz Rouchéovog teorema slijedi $N_{S(0,4)}(p) = N_{S(0,4)}(f) = 2$.

- (c) Budući da se unutar $K(0, 4)$ nalaze dvije nultočke polinoma p (računajući kratnosti) te se obje nalaze unutar $K(0, 3)$, zaključujemo da se na $S(0, 3)$ ne nalazi niti jedna nultočka polinoma p . Dakle, imamo

$$N_{V(0;3,4)}(p) = N_{S(0,4)}(p) - N_{S(0,3)}(p) = 2 - 2 = 0.$$

- (d) Koristeći supstituciju $t = x^2$ ili nadopunom do potpunog kvadrata pronalazimo da nultočke polinoma p leže u skupu $\{i, -i, 7i, -7i\}$, odakle je jasno da se niti jedna od njih ne nalazi unutar $V(0; 3, 4)$.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Drugi kolokvij (nastavnički smjer) – 15. lipnja 2026.

Zadatak 5. (7 bodova) Izračunajte integral

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx.$$

Rješenje 5. Označimo gornji integral s I i stavimo

$$f(z) := \frac{z^2 + 2}{(z^2 + 4)(z^2 + 9)}.$$

Singulariteti funkcije f su $z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$, $z_3 = 3i$, $z_4 = -3i$. Primijetimo da se z_1 i z_3 nalaze u gornjoj poluravnini te da f nema singulariteta na realnoj osi.

Kako je funkcija $x \mapsto \frac{x^2+2}{(x^2+4)(x^2+9)}$ parna, to je

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx.$$

Za $|z| = R$ (gdje je R dovoljno velik) imamo

$$|f(z)| = \frac{|z^2 + 2|}{|z^4 + 13z^2 + 36|} \leq \frac{|z|^2 + 2}{|z|^4 - 13|z|^2 - 36} = \frac{R^2 + 2}{R^4 - 13R^2 - 36}.$$

Stavimo

$$M(R) := \frac{R^2 + 2}{R^4 - 13R^2 - 36}.$$

Vrijedi

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \cdot M(R) = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{R^3 + 2R}{R^4 - 13R^2 - 36} = 0,$$

stoga prema Jordanovoj lemi imamo

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2 + 2}{(x^2 + 4)(x^2 + 9)} dx = 2\pi i (res(f, z_1) + res(f, z_3)).$$

Jer je z_1 pol prvog reda, a f -ju možemo napisati kao $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, pri čemu su $g(z) = z^2 + 2$ i $h(z) = z^4 + 13z^2 + 36$ holomorfne te je $h'(z_1) = 20i \neq 0$, dobivamo da je

$$res(f, z_1) = \frac{g(z_1)}{h'(z_1)} = -\frac{2}{20i} = \frac{i}{10}.$$

Analogno je

$$res(f, z_3) = \frac{g(z_3)}{h'(z_3)} = -\frac{7i}{30},$$

te je stoga

$$I = \frac{1}{2} 2\pi i \left(\frac{i}{10} - \frac{7i}{30} \right) = \frac{2\pi}{15}.$$