Rješenja zadataka za četvrte vježbe

Zadatak 1.4.3. Riješite jednadžbe:

(a) $\ln(i-z)=1$

(b) $e^{2z}+2e^z-3=0$

(c) $\sin z+\cos z=2$

(d) $|\operatorname{tg} z|=1$

Rješenje. (a) Prvo provjerimo da se 1 nalazi u kodomeni glavne grane prirodnog logaritma, $1\in\mathbb{R}\times\langle-\pi,\pi\rangle$. Broj 1 je u kodomeni, pa dalje računamo:

$$
\begin{aligned}
&\ln(i-z)=1\\
&\ln|i-z|+i\arg(i-z)=1\\
&\ln|i-z|=1,\ \arg(i-z)=0\\
&|i-z|=e,\ \arg(i-z)=0
\end{aligned}
$$

Slijedi $i-z=e$, pa je rješenje $z=i-e$.

(b) Računamo:

$$
\begin{aligned}
&e^{2z}+2e^z-3=0\\
&\iff (e^z+1)^2=4\\
&\iff e^z+1=\pm 2\\
&\iff e^z\in\{1,-3\}\\
&\iff z\in \operatorname{Ln}(1)\cup\operatorname{Ln}(-3)\\
&\iff \{i2k\pi : k\in\mathbb{Z}\}\cup\{\ln 3+i(\pi+2k\pi) : k\in\mathbb{Z}\}.
\end{aligned}
$$

(c) Računamo:

$$
\begin{aligned}
&\sin z+\cos z=2\\
&\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}+\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}/\cdot 2i\\
&e^{iz}(1+i)+e^{-iz}(i-1)=4i/\cdot e^{iz}\\
&(1+i)(e^{iz})^2-4ie^{iz}+(i-1)=0/\cdot\frac{1-i}{2}\\
&(e^{iz})^2-2(1+i)e^{iz}-\frac{(1-i)^2}{2}=0\\
&(e^{iz}-(1+i))^2-(1+i)^2+i=0\\
&(e^{iz}-(1+i))^2=i\\
&(e^{iz}-(1+i))=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\\
&e^{iz}\in\left\{(\frac{\sqrt{2}}{2}+1)+i(\frac{\sqrt{2}}{2}+1),(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1)+i(-\frac{\sqrt{2}}{2}+1\right\}\\
&iz\in\left\{\ln(1+\sqrt{2})+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi),\ \ln(\sqrt{2}-1)+i(\frac{\pi}{4}+2k\pi) : k\in\mathbb{Z}\right\}\\
&z\in\left\{\frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln(1+\sqrt{2}),\ \frac{\pi}{4}+2k\pi-i\ln(\sqrt{2}-1) : k\in\mathbb{Z}\right\}.
\end{aligned}
$$

(d) Vrijedi $|\operatorname{tg} z| = 1$ ako i samo ako je $|\sin z| = |\cos z|$ i $\cos z \neq 0$. Pišemo $z = x + iy$. Prisjetimo se da vrijedi

$$\sin(iz) = i\operatorname{sh}(z), \ \cos(iz) = \operatorname{ch}(z).$$

Izrazit ćemo lijevu i desnu stranu u algebarskom obliku jer imamo modul. Korištenjem adicijskih formula imamo:

$$\begin{aligned}\sin z &= \sin(x+iy) = \sin(x)\cos(iy) + \cos(x)\sin(iy) = \sin(x)\operatorname{ch}(y) + i\cos(x)\operatorname{sh}(y)\\ \cos z &= \cos(x+iy) = \cos(x)\cos(iy) + \sin(x)\sin(iy) = \cos(x)\operatorname{ch}(y) + i\sin(x)\operatorname{sh}(y).\end{aligned}$$

Sada možemo nastaviti:

$$\begin{aligned}&|\sin z| = |\cos z|\\ &\iff |\sin z|^2 = |\cos z|^2\\ &\iff (\sin(x)\operatorname{ch}(y))^2 + (\cos(x)\operatorname{sh}(y))^2 = (\cos(x)\operatorname{ch}(y))^2 + (\sin(x)\operatorname{sh}(y))^2\\ &\iff \sin^2 x(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y) = \cos^2 x(\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y)\\ &\iff \sin^2 x = \cos^2 x\\ &\iff |\operatorname{tg} x| = 1\\ &\iff \operatorname{tg} x = \pm 1.\end{aligned}$$

Iz ovoga slijedi da su rješenje svi kompleksni brojevi z takvi da je $\operatorname{Re} z = \pm\frac{\pi}{4} + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

□

Zadatak 1.4.4. Funkcijom $f(z) = e^z$ preslikajte sljedeće skupove:

(a) $\left\{x + iy \in \mathbb{C} \mid 0 < x < +\infty, \ 0 < y < \frac{\pi}{2}\right\}$

(b) $\{x + iy \in \mathbb{C} \mid -\infty < x < 0, \ 0 < y < 2\pi\}$

Rješenje. (a) Pišemo $e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos x + i\sin y)$. Zbog $x \in \langle 0, +\infty\rangle$, moramo imati $|e^z| = e^x \in \langle 1, +\infty\rangle$. Iz drugog uvjeta čitamo $\arg e^z \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$. Dakle, slika našeg skupa je skup

$$\{w \in \mathbb{C} : |w| > 1, 0 < \arg w < \frac{\pi}{2}\}.$$

(Nacrtajte sliku!)

(b) Sličnim argumentima kao u (a) dijelu zadatka, rješenje je

$$\{w \in \mathbb{C} : 0 < |w| < 1, 0 < \arg w < 2\pi\}.$$

To je krug polumjera 1 bez pozitivnog realnog polupravca i bez ruba. Ovdje smo s $\arg w$ bili označili one kutove u $\operatorname{Arg} w$ koji su unutar $[0, 2\pi\rangle$.

□

Zadatak 1.4.5. Funkcijom $f(z) = \ln z$ preslikajte skup

$$G = \left\{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z| < e, \ 0 < \arg z < \frac{\pi}{2}\right\}.$$

Rješenje. Prisjetimo se da je po definiciji

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z,$$

gdje je $\arg z$ onaj kut iz $\operatorname{Arg} z$ koji je unutar $\langle -\pi, \pi \rangle$, za $z \in \mathbb{C} \backslash \{x : x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$. Iz prvog uvjeta slijedi da je $0 < \operatorname{Re}(\ln z) = \ln e < 1$, a iz drugog uvjeta slijedi da je $0 < \operatorname{Im}(\ln z) = \arg z < \frac{\pi}{2}$. Dakle,

$$f(G) = \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \in \langle 0, 1 \rangle, \ \operatorname{Im} w \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \right\}.$$

(Nacrtajte taj skup!) $\square$

Zadatak 1.4.6. Izračunajte:

(a) $\left(\dfrac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{2i}$

(b) $(-1)^{\sqrt{2}}$

Rješenje. (a) Lako se vidi da je $\left| \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right| = 1$, $\arg \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) = \frac{\pi}{4}$, pa je

$$\operatorname{Ln} \left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right) = \left\{ i \left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi \right) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Slijedi da je

$$\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{2i} = e^{2i(i(\frac{\pi}{4}+2k\pi))} = e^{-(\frac{\pi}{2}+4k\pi)}$$

(b) Vidimo da je $\operatorname{Ln}(-1) = \{i(2k+1)\pi : k \in \mathbb{Z}\}$. Tada je

$$(-1)^{\sqrt{2}} = e^{\sqrt{2}i(2k+1)\pi} = \cos(\sqrt{2}(2k+1)\pi) + i \sin(\sqrt{2}(2k+1)\pi)$$

$\square$

Zadatak 1.4.7. Izračunajte:

(a) $\operatorname{Arc} \cos i$

(b) $\operatorname{Arc} \operatorname{tg} \frac{i}{3}$

Rješenje. Oba zadatka pokušajte riješiti bez formula, tako da riješite pripadne jednadžbe (a) $\cos z = i$ i (b) $\operatorname{tg} z = \frac{i}{3}$. Slijedi rješenje pomoću formula.

(a) $z = i, z^2 - 1 = -2, \sqrt{z^2 - 1} = \pm \sqrt{2} i.$

$$\operatorname{Ln}(i \pm \sqrt{2} i) = \ln |i \pm \sqrt{2} i| + i \operatorname{Arg}(i \pm \sqrt{2} i) =$$

$$= \left\{ \ln(1 + \sqrt{2}) + i(\frac{\pi}{2} + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \ln(\sqrt{2} - 1) + i(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Slijedi da je

$$\operatorname{Arc} \cos(z) = \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \cdot \ln(\sqrt{2} + 1) : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ -\frac{\pi}{2} + 2k\pi - i \cdot \ln(\sqrt{2} - 1) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

(b) $z = \dfrac{i}{3}$, $\dfrac{1+iz}{1-iz} = \dfrac{1-\frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{2}$. Dakle, imamo

$$\operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \left\{\ln\frac{1}{2} + i2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \{-\ln 2 + i2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}.$$

$$\operatorname{Arc\,tg} z = -\frac{i}{2}\operatorname{Ln}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) = \left\{k\pi + \frac{\ln 2}{2} i \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \left\{k\pi + \ln(\sqrt{2}) i \mid k \in \mathbb{Z}\right\}.$$

$\square$