2.3 Integral kompleksne funkcije

Zadatak 2.3.1. Izračunajte integrale $\int_\Gamma |z|\,dz$ i $\int_\Sigma |z|\,dz$ po krivuljama na slici. Na slici je krivulja Γ dužina i krivulja Σ polukružnica, obje su u zatvaraču gornje poluravnine, krajnje su im točke -1 i 1 i usmjerene su od -1 prema 1.

Rješenje. Jedna od parametrizacija dužine Γ je

$$\Gamma \dots\ \gamma(t) = t,\ -1 < t < 1.$$

Računamo:

$$\begin{aligned}\int_\Gamma |z|dz &= \int_{-1}^{1} |t| \cdot 1\ dt\\ &= \int_{-1}^{0} -t\ dt + \int_0^1 t\ dt\\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

Polukružnicu Σ ćemo parametrizirati kao

$$\Sigma \dots\ \sigma(t) = e^{it},\ \pi > t > 0.$$

Računamo:

$$\begin{aligned}\int_\Sigma |z|dz &= \int_\pi^0 1 \cdot ie^{it}dt\\ &= i \cdot \frac{e^{it}}{i}\Big|_\pi^0\\ &= 2.\end{aligned}$$

Krivulje Γ i Σ imaju i druge parametrizacije, naprimjer

$$\begin{aligned}\Gamma \dots\ \gamma(t) &= \cos t,\ \pi > t > 0\\ \Sigma \dots\ \sigma(t) &= e^{2it},\ \frac{\pi}{2} > t > 0.\end{aligned}$$

Može se provjeriti da se i uz ove drugačije parametrizacije dobije isti rezultat. □

Zadatak 2.3.2. Izračunajte sljedeće integrale po zadanim krivuljama u pozitivnom smjeru.

(a) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z-i)^3}\,dz$

(b) $\displaystyle\int_{|z-2|=2} \frac{z}{z^4-1}\,dz$

(c) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2-1}\,dz$, gdje je Γ neka krivulja koja okružuje točke -1 i 1

Rješenje. (a) Budući da je i unutar kružnice jednadžbe $|z| = 2$, možemo koristiti formulu

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$$

za $n = 2$, $z_0 = i$, $f(z) = \cos z$. Sada imamo:

$$-\cos i = \frac{2!}{2\pi i} \int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z - i)^3},$$

pa je

$$\int_{|z|=2} \frac{\cos z}{(z - i)^3} = -\pi i \operatorname{ch} 1.$$

(b) Vrijedi $z^4 - 1 = (z - 1)(z^3 + z^2 + z + 1)$. Stavimo

$$f(z) = \frac{z}{z^3 + z^2 + z + 1}$$

i primijetimo da nultočke nazivnika $-1, i, -i$ nisu u unutrašnjosti kružnice (a točka 1 jest) i vrijedi

$$\frac{f(z)}{z - 1} = \frac{z}{z^4 - 1}.$$

Sada po Cauchyjevoj integralnoj formuli imamo

$$\int_{|z-2|=2} \frac{z}{z^4 - 1} dz = \int_{|z-2|=2} \frac{f(z)}{z - 1} dz = 2\pi i f(1) = 2\pi i \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2} i.$$

(c) Koristimo rastav na parcijalne razlomke i potom Cauchyjevu integralnu formulu posebno na svakom sumandu:

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{e^z}{z^2 - 1} dz &= \frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{e^z}{z - 1} dz - \frac{1}{2} \int_\Gamma \frac{e^z}{z + 1} dz \\
&= \frac{1}{2} \cdot 2\pi i e^1 - \frac{1}{2} \cdot 2\pi i e^{-1} \\
&= \pi i \left(e - \frac{1}{e} \right).
\end{aligned}$$

□

2.4 Taylorov red

Zadatak 2.4.1. Razvijte u Taylorov red u okolini točke z_0 sljedeće funkcije.

(a) $f(z) = \dfrac{1}{4 - z^2}$, $z_0 = 0$

(b) $f(z) = \dfrac{1}{1 + z}$, $z_0 = i$

(c) $f(z) = \dfrac{1}{(1 - z)^2}$, $z_0 = 0$

Rješenje. (a) Znamo da je

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{4-z^2} \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{z^2}{4}} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z^2}{4}\right)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{4^{n+1}}. \end{aligned}$$

Red konvergira ako je $|\frac{z^2}{4}| < 1$, tj. ako je $|z| < 2$.

(b) Računamo:

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{1+z} \\ &= \frac{1}{1+i+z-i} \\ &= \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{1+\frac{z-i}{1+i}} \\ &= \frac{1}{1+i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(1+i)^n} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-i)^n}{(1+i)^{n+1}}. \end{aligned}$$

Red konvergira ako je $|\frac{z-i}{1+i}| < 1$, tj. ako je $|z-i| < \sqrt{2}$.

(c) Primijetimo da je

$$\frac{d}{dz} \frac{1}{1-z} = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Sada je

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(1-z)^2} \\ &= \frac{d}{dz} \left(\sum_{n=0}^{\infty} z^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} n z^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n. \end{aligned}$$

Red konvergira za $|z| < 1$.

□