2.5 Laurentov red

Zadatak 2.5.1. Razvijte u Laurentov red funkciju $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ na području

(a) $K(0,1)$

(b) $\mathbb{C} \setminus \overline{K(0,1)}$

Rješenje. (a) Taylorov red funkcije f oko nule je

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n,$$

pa je zbog jedinstvenosti reda sa svojstvom iz napomene neposredno prije ovog zadatka, to ujedno i Laurentov red funkcije f oko nule.

(b) Za $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{K(0,1)}$ je $|z| > 1$, pa je $\left|\frac{1}{z}\right| < 1$. Stoga vrijedi

$$f(z) = \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{z}} = -\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n = -\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)z^n.$$

$\square$

Zadatak 2.5.2. Razvijte u Laurentov red funkciju $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ oko točke $z_0 = 0$ na području

(a) $K(0,1)$

(b) $V(0,1,2)$

(c) $\mathbb{C} \setminus \overline{K(0,2)}$

Rješenje. (a) Funkcija f je holomorfna na $K(0,1)$ pa tu njen Laurentov red nema netrivijalnih koeficijenata uz negativne potencije:

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) z^n.$$

(b) Funkcija f je holomorfna na $V(0,1,2)$. Za $1 < |z| < 2$ imamo

$$\frac{1}{2-z} = \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{z}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^n, \text{ zbog } \left|\frac{z}{2}\right| < 1$$

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{-1}{z^n}, \text{ zbog } \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

te je stoga traženi Laurentov red jednak

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1}(-1)z^n + \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{-1}{2^{n+1}}z^n.$$

(c) Funkcija f je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \overline{K(0,2)}$ pa njen Laurentov red nema netrivijalnih koeficijenata uz pozitivne potencije. Za $|z| > 2$ imamo

$$\frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{1}{z}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-1}{z^n} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1) z^n, \text{ zbog } \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$

$$-\frac{1}{2-z} = -\frac{1}{z}\frac{1}{\frac{2}{z}-1} = \frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}} = \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n}{z^{n+1}}$$

$$= \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{2^{m-1}}{z^m} = \sum_{n=-\infty}^{-1} 2^{-n-1} z^n, \text{ zbog } \left|\frac{2}{z}\right| < 1$$

pa je stoga Laurentov red funkcije na $\mathbb{C} \setminus \overline{K(0,2)}$

$$f(z) = \frac{1}{1-z} - \frac{1}{2-z} = \sum_{n=-\infty}^{-1} (-1 + 2^{-n-1}) z^n.$$

□

Zadatak 2.5.3. Razvijte funkciju $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-2)}$ u Laurentov red oko točke z_0 u području D, ako je

(a) $z_0 = -1$, $\frac{3}{2} \in D$

(b) $z_0 = 1$, $\frac{3}{2} \in D$

Rješenje. (a) Funkcija f je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{1, 2\}$. Budući da područje D sadrži točku $\frac{3}{2}$, zaključujemo da je D područje unutar vijenca $V(-1, 2, 3) = \{z \in \mathbb{C} \mid 2 < |z+1| < 3\}$ ili cijeli taj vijenac.

Vrijedi $f(z) = \dfrac{1}{z-2} + \dfrac{1}{1-z}$. Imamo

$$\frac{1}{z-2} = \frac{1}{(z+1)-3} = -\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{z+1}{3}} = -\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{z+1}{3}\right)^n, \text{ jer } \left|\frac{z+1}{3}\right| < 1,$$

$$\frac{1}{1-z} = \frac{1}{2-(1+z)} = -\frac{1}{1+z}\frac{1}{1-\frac{2}{z+1}} = -\frac{1}{1+z}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{2}{z+1}\right)^n, \text{ jer } \left|\frac{2}{z+1}\right| < 1,$$

pa je zato

$$f(z) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{-2^{n-1}}{(z+1)^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z+1)^n}{-3^{n+1}}.$$

(b) D je područje unutar $K(1,1) \setminus \{1\} = V(1, 0, 1)$. Imamo

$$\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{1-(z-1)} = -\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n, \text{ jer } |z-1| < 1,$$

pa je zato

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)} = \frac{1}{z-1}\frac{1}{z-2} = \frac{-1}{z-1}\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^n$$

$$= -\sum_{n=0}^{+\infty}(z-1)^{n-1} = \sum_{n=-1}^{+\infty}(-1)(z-1)^n.$$

□

Zadatak 2.5.4. Razvijte u Laurentov red funkciju $f(z) = \dfrac{z+i}{z^2}$ oko točke i u području D koje sadrži točku $-i$.

Rješenje. Funkcija f je holomorfna na $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Područje D je skup

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid 1 < |z - i| < +\infty\}.$$

Znamo da je $\frac{1}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)'$.

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{z} &= -\frac{1}{(z-i)+i} = -\frac{1}{z-i}\frac{1}{1+\frac{i}{z-i}} = -\frac{1}{z-i}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{i^n}{(z-i)^n} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{i^n}{(z-i)^{n+1}}, \text{ jer } \left|\frac{i}{z-i}\right| = \frac{1}{|z-i|} < 1
\end{aligned}$$

Deriviranjem dobijemo

$$\frac{1}{z^2} = \left(-\frac{1}{z}\right)' = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n+1}(-(n+1))\frac{i^n}{(z-i)^{n+2}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{i^n(n+1)}{(z-i)^{n+2}}.$$

Sada je

$$\begin{aligned}
f(z) &= [(z-i)+2i]\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{i^n(n+1)}{(z-i)^{n+2}} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{i^n(n+1)}{(z-i)^{n+1}} + 2\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\frac{i^{n+1}(n+1)}{(z-i)^{n+2}} \\
&= \frac{1}{z-i} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{i^n(n+1)}{(z-i)^{n+1}} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{2i^n n}{(z-i)^{n+1}} \\
&= \frac{1}{z-i} + \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{i^n(n-1)}{(z-i)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^{n-1}\frac{i^n(n-1)}{(z-i)^{n+1}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{-1} i^{n+1}(n+2)(z-i)^n.
\end{aligned}$$

$\square$

Zadatak 2.5.5. Razvijte u Laurentov red u okolini točke 0 funkciju f zadanu sa

(a) $f(z) = z^2 e^{\frac{i}{z}}$

(b) $f(z) = z^2 \sin\left(\pi\dfrac{z+1}{z}\right)$

Rješenje. (a) Funkcija $z \mapsto e^z$ je holomorfna na $\mathbb{C}$ i za svaki $z \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$e^z = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}z^n,$$

pa zaključujemo da za sve $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vrijedi

$$e^{\frac{i}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{i}{z}\right)^n.$$

Iz toga slijedi da je

$$f(z) = z^2 e^{\frac{i}{z}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{i}{z}\right)^{n-2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{i^{n-2}}{(n+2)!}\frac{1}{z^n}.$$

(b) Vrijedi

$$\sin\left(\pi\frac{z+1}{z}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{z}\right) = -\sin\frac{\pi}{z}.$$

Dakle, $f(z) = -z^2 \sin\frac{\pi}{z}$. Funkcija $\sin z$ je holomorfna na $\mathbb{C}$ i za svaki $z \in \mathbb{C}$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Zato je za svaki $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$

$$\sin\frac{\pi}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)! z^{2n+1}}.$$

Sada za našu funkciju f imamo

$$f(z) = -z^2 \sin\frac{\pi}{z} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\pi^{2n+1}}{(2n+1)! z^{2n-1}}.$$

Područje konvergencije redova iz (a) i (b) je $\mathbb{C} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < +\infty\}$. $\square$