

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 22. travnja 2025.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta.

Zadatak 1. (7 bodova)

(a) Odredite sve vrijednosti korijena

$$\sqrt[4]{-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}.$$

(b) Odredite sve $z \in \mathbb{C}$ za koje vrijedi

$$\operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{4}.$$

Skup rješenja skicirajte u kompleksnoj ravnini.

Rješenje 1.

(a) Označimo $z := -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$. Zapisujemo z u trigonometrijskom obliku:

$$r = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = 1, \quad \operatorname{tg}(\varphi) = \frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z} = -\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = -\frac{\sin(\frac{\pi}{3})}{\cos(\frac{\pi}{3})} = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}\right),$$

odakle slijedi da je $\varphi \in \{\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\}$. Iz algebarskog zapisa kompleksnog broja z iščitavamo da se isti nalazi u 2. kvadrantu, stoga je $\varphi = \frac{2\pi}{3}$.

Preostaje primijeniti formulu za računanje n -tih korijena kompleksnog broja z , odakle (za $n = 4$) dobivamo

$$\begin{aligned} - k = 0 &\implies z_0 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right), \\ - k = 1 &\implies z_1 = \cos\left(\frac{4\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{6}\right), \\ - k = 2 &\implies z_2 = \cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7\pi}{6}\right), \\ - k = 3 &\implies z_3 = \cos\left(\frac{10\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{10\pi}{6}\right), \end{aligned}$$

što su upravo traženi kompleksni brojevi.

$$\begin{aligned}
\text{(b)} \quad & \left\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \left(\frac{1}{z} \right) = \frac{1}{4} \right\} = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \left(\frac{1}{x + iy} \right) = \frac{1}{4} \right\} = \\
& \left\{ x + iy \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} \left(\frac{x - iy}{x^2 + y^2} \right) = \frac{1}{4} \right\} = \left\{ x + iy \in \mathbb{C} : -\frac{y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4} \right\} = \\
& \{ x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + y^2 = -4y, x^2 + y^2 \neq 0 \} = \\
& \{ x + iy \in \mathbb{C} : x^2 + (y + 2)^2 = 4 \} \setminus \{0 + 0i\}
\end{aligned}$$

Dakle, traženi skup je kružnica k sa središtem u $z = -2i$ i polumjerom $r = 2$ iz koje isključujemo ishodište.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 22. travnja 2025.

Zadatak 2. (7 bodova)

- (a) Odredite sve holomorfne funkcije $f = u + iv : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ takve da $\operatorname{Im} f$ je realni dio zadan formulom

$$u(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y$$

te ih zapišite kao funkcije u varijabli $z = x + iy$.

- (b) Dokažite da ne postoji holomorfna funkcija $g : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ takva da joj je realan dio zadan formulom

$$u(x, y) = 3x^2 - y^2 + 3x + y.$$

Rješenje 2.

- (a) Uočimo da je $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Ako tražena funkcija f postoji, prema korolaru Teorema o Cauchy - Riemannovim uvjetima (vježbe) slijedi da u nužno mora biti harmonijska funkcija. Računamo pripadne parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = -\sin x \operatorname{ch} y,$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = \sin x \operatorname{sh} y, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y,$$

odakle slijedi

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 0.$$

Dakle, u je harmonijska. Nadalje, ako je u realni dio neke holomorfne funkcije f , onda moraju vrijediti C-R uvjeti, odakle dobivamo:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = \cos x \operatorname{ch} y, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = -\sin x \operatorname{sh} y.$$

Integriranjem prve jednadžbe po y dobivamo

$$v(x, y) = \cos x \operatorname{sh} y + C(x),$$

a zatim deriviranjem dobivene jednadžbe po x i izjednačavanjem s izrazom dobivenim C-R uvjetom imamo

$$C'(x) = 0, \text{ odnosno } C(x) = D \text{ za neki } D \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) = \sin x \operatorname{ch} y + i \cos x \operatorname{sh} y + D$$

odnosno

$$f(z) = \sin z + D, \quad D \in \mathbb{R}.$$

- (b) Uočimo ponovno da je $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Želimo li pokazati da tražena funkcija ne postoji, dovoljno je pokazati da u nije harmonijska. Računamo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 6x + 3, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 6,$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = -2y + 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = -2,$$

odakle slijedi

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 4 \neq 0.$$

Dakle, u nije harmonijska, pa prema spomenutom korolaru možemo zaključiti da takva funkcija f ne postoji.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 22. travnja 2025.

Zadatak 3. (7 bodova) U skupu kompleksnih brojeva riješite jednadžbu

$$2 \sin z + 3i \cos z = 5i.$$

Rješenje 3.

$$\begin{aligned} 2 \sin z + 3i \cos z = 5i &\iff 2 \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} + 3i \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = 5i \\ &\iff 2e^{iz} - 2e^{-iz} - 3e^{iz} - 3e^{-iz} = -10 \\ &\iff e^{2iz} - 10e^{iz} + 5 = 0. \end{aligned}$$

Sada možemo ili nadopuniti do potpunog kvadrata ili uvesti supstituciju $w := e^{iz}$. Sada je

$$w^2 - 10w + 5 = 0,$$

odakle je

$$w_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 20}}{2} = \frac{10 \pm 4\sqrt{5}}{2} = 5 \pm 2\sqrt{5}.$$

Dakle,

$$e^{iz} = 5 \pm 2\sqrt{5} \iff iz \in Ln(5 \pm 2\sqrt{5}) = \ln_{\mathbb{R}} |5 \pm 2\sqrt{5}| + iArg(5 \pm 2\sqrt{5}).$$

Konačno,

$$iz \in \left\{ \ln(5 + 2\sqrt{5}) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ \ln(5 - 2\sqrt{5}) + 2k\pi i : k \in \mathbb{Z} \right\}$$

stoga je

$$z \in \left\{ 2k\pi - i \ln(5 + 2\sqrt{5}) : k \in \mathbb{Z} \right\} \cup \left\{ 2k\pi - i \ln(5 - 2\sqrt{5}) : k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 22. travnja 2025.

Zadatak 4. (7 bodova) Neka je Γ neka pozitivno orijentirana kontura u čijoj se unutrašnjosti nalaze točke $z = -2$ i $z = i$, a točka $z = 1$ se nalazi izvan iste. Izračunajte integral

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2}$$

Rješenje 4. Uočimo da u ovoj konfiguraciji ne možemo direktno primijeniti teorem s vježbi. Naime, ako bismo definirali funkciju f kao

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}$$

onda ona ne bila holomorfna u unutrašnjosti Γ . Analogno obrazloženje imamo u slučaju

$$f(z) = \frac{1}{(1-z)(z-i)^2}.$$

Međutim, ako pomoću Γ definiramo konture Γ_1 i Γ_2 kao na slici niže, onda vrijedi

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2} = \int_{\Gamma_1} \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2} + \int_{\Gamma_2} \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2},$$

Definirajmo

$$f_1(z) = \frac{1}{(1-z)(z+2)}.$$

Uočimo da vrijedi

$$\frac{f_1(z)}{(z-i)^2} = \frac{1}{(1-z)(z+2)(z-i)^2}.$$

Budući da je f_1 holomorfna na unutrašnjosti Γ_1 te se $z = i$ nalazi u unutrašnjosti Γ_1 , prema teoremu je

$$I_1 := \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(z)}{(z-i)^2} dz = \frac{2\pi i}{1!} f_1'(i).$$

Imamo

$$f_1'(z) = \left[\frac{1}{-z^2 - z + 2} \right]' = \frac{2z + 1}{(-z^2 - z + 2)^2},$$

stoga je

$$f_1'(i) = \frac{2i + 1}{(-i^2 - i + 2)^2} = \frac{2i + 1}{8 - 6i} \cdot \frac{8 + 6i}{8 + 6i} = \frac{22i - 4}{100},$$

pa je

$$I_1 = 2\pi i \cdot \frac{22i - 4}{100} = \frac{-11\pi - 2\pi i}{25}.$$

Nadalje, neka je

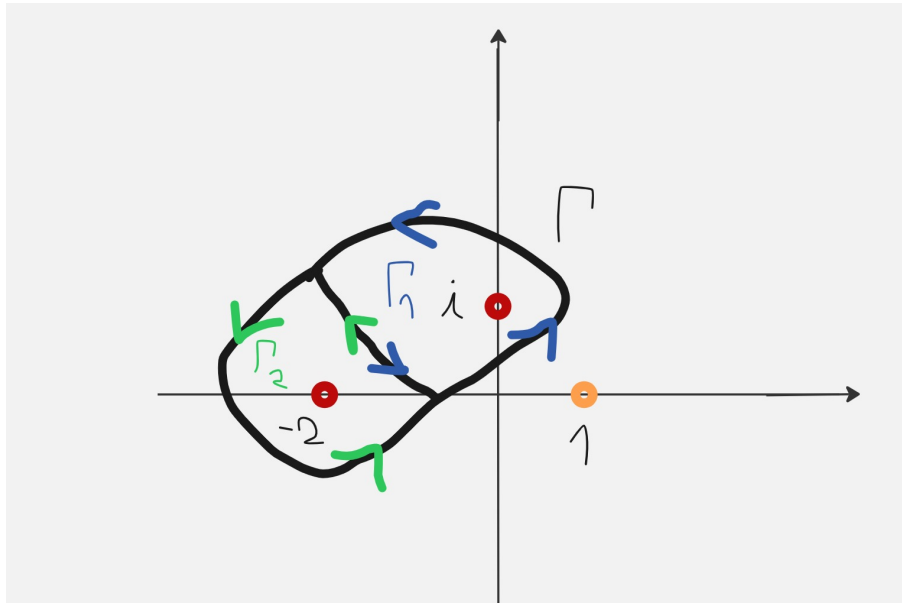
$$f_2(z) = \frac{1}{(1-z)(z-i)^2}.$$

Kako je f_2 holomorfna u unutrašnjosti Γ_2 te se $z = -2$ nalazi u unutrašnjosti Γ_2 , prema teoremu je

$$I_2 := \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(z)}{z+2} dz = 2\pi i f_2(-2) = \frac{2\pi i}{(1+2)(-2-i)^2} = \frac{2\pi i}{3} \frac{3-4i}{25} = \frac{6\pi i + 8\pi}{75}.$$

Konačno je

$$\int_{\Gamma} \frac{dz}{(1-z)(z+2)(z-i)^2} = I_1 + I_2 = \frac{-11\pi - 2\pi i}{25} + \frac{6\pi i + 8\pi}{75} = -\frac{\pi}{3}.$$



KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 22. travnja 2025.

Zadatak 5. (7 bodova) Razvijte funkciju

$$f(z) = e^{3iz} \sin z$$

u Taylorov red oko točke $z_0 = \frac{\pi}{3}$. Odredite područje konvergencije dobivenog reda.

Rješenje 5. Koristimo definiciju $\sin z$:

$$f(z) = e^{3iz} \sin z = e^{3iz} \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right) = \frac{1}{2i} (e^{4iz} - e^{2iz}).$$

Budući da želimo razvoj oko točke $z_0 = \frac{\pi}{3}$, koristimo

$$e^{4iz} = e^{4i(z - \frac{\pi}{3}) + \frac{4\pi}{3}i} = e^{4i(z - \frac{\pi}{3})} e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

odnosno

$$e^{2iz} = e^{2i(z - \frac{\pi}{3}) + \frac{2\pi}{3}i} = e^{2i(z - \frac{\pi}{3})} e^{\frac{2\pi}{3}i}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{2i} \left(e^{4i(z - \frac{\pi}{3})} e^{\frac{4\pi}{3}i} - e^{2i(z - \frac{\pi}{3})} e^{\frac{2\pi}{3}i} \right) \\ &= \frac{1}{2i} \left(e^{\frac{4\pi}{3}i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4i)^n}{n!} (z - \frac{\pi}{3})^n - e^{\frac{2\pi}{3}i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!} (z - \frac{\pi}{3})^n \right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2i(n!)} \left(e^{\frac{4\pi}{3}i} (4i)^n - e^{\frac{2\pi}{3}i} (2i)^n \right) \left(z - \frac{\pi}{3} \right)^n. \end{aligned}$$

Područje konvergencije je $\mathbb{C}$.