

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 20. travnja 2026.

Svaki zadatak rješavajte na odvojenom papiru.

Vrijeme rješavanja je 120 minuta.

Zadatak 1. (7 bodova) Definirajte kompleksnu eksponencijalnu funkciju i dokažite da je periodična. Definirajte kompleksni logaritam. Izračunajte derivaciju kompleksnog logaritma pretpostavljajući poznatim derivaciju eksponencijalne funkcije.

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 20. travnja 2026.

Zadatak 2. (7 bodova) Definirajte pojam primitivne funkcije. Definirajte zvjezdast skup i iskažite Cauchy-ev teorem za zvjezdast skup. Kako izgleda formula za primitivnu funkciju holomorfne funkcije na zvjezdastom skupu?

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 20. travnja 2026.

Zadatak 3. (7 bodova) Neka je zadana funkcija

$$u(x, y) = ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3,$$

pri čemu su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

- Odredite nužne uvjete na koeficijente a, b, c i d pod kojima će funkcija u biti harmonijska (na $\mathbb{R}^2$).
- Koristeći oblik funkcije u dobiven u (a) dijelu zadatka odredite sve funkcije v takve da je funkcija $f := u + iv$ holomorfna.

Napomena. Nije potrebno eksplicitno računati funkciju f .

Rješenje 3.

- Očito je $u \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Računamo odgovarajuće parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x, y) = 3ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) = 6ax + 2by,$$

odnosno

$$\frac{\partial u}{\partial y}(x, y) = bx^2 + 2cxy + 3dy^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 2cx + 6dy,$$

odakle slijedi

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y) = 2(3a + c)x + 2(b + 3d)y.$$

Ako je u harmonijska funkcija onda nužno moramo imati $c = -3a$ i $b = -3d$.

- Neka je sada

$$u(x, y) = ax^3 - 3dx^2y - 3axy^2 + dy^3.$$

Ako je u realni dio neke holomorfne funkcije f , onda moraju vrijediti C-R uvjeti, odakle dobivamo:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(x, y) = 3ax^2 - 6dxy - 3ay^2, \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 3dx^2 + 6axy - 3dy^2.$$

Integriranjem prve jednadžbe po y dobivamo

$$v(x, y) = 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + E(x),$$

a zatim deriviranjem dobivene jednadžbe po x i izjednačavanjem s izrazom dobivenim C-R uvjetom imamo

$$E'(x) = 3dx^2, \text{ odnosno } E(x) = dx^3 + e \text{ za neki } e \in \mathbb{R}.$$

Dakle, tražene funkcije v dane su s

$$v(x, y) = 3ax^2y - 3dxy^2 - ay^3 + dx^3 + e, e \in \mathbb{R}.$$

KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 20. travnja 2026.

Zadatak 4. (7 bodova) Izračunajte integral

$$\int_{\Gamma} \frac{\ln(z+2)}{z^3 + iz^2 + 6z} dz,$$

pri čemu je Γ pozitivno orijentirana kružnica sa središtem u točki $z_s = 1+i$ i polumjerom $r = 2$. Izraz $\ln(\cdot)$ označava glavnu granu logaritma.

Rješenje 4. Odredimo nultočke nazivnika; to su $z_1 = 0$, $z_2 = 2i$, $z_3 = -3i$. Računamo udaljenosti:

- $|z_1 - z_s| = |0 - 1 - i| = \sqrt{2} < 2$,
- $|z_2 - z_s| = |2i - 1 - i| = \sqrt{2} < 2$,
- $|z_3 - z_s| = |-3i - 1 - i| = \sqrt{17} > 2$.

Dakle, točke 0 i $2i$ nalaze se unutar Γ dok je točka $-3i$ izvan iste. Uočimo da u ovoj konfiguraciji ne možemo direktno primijeniti teorem s vježbi. Naime, ako bismo definirali funkciju f kao

$$f(z) = \frac{\ln(z+2)}{(z-2i)(z+3i)}$$

onda ona ne bila holomorfna u unutrašnjosti Γ . Analogno obrazloženje imamo u slučaju

$$f(z) = \frac{\ln(z+2)}{z(z+3i)}.$$

Međutim, ako pomoću Γ definiramo konture Γ_1 i Γ_2 kao na slici niže (odnosno tako da se točka $z_1 = 0$ nalazi u unutrašnjosti Γ_1 , a točka $z_2 = 2i$ u unutrašnjosti Γ_2), onda vrijedi

$$\int_{\Gamma} \frac{\ln(z+2)}{z^3 + iz^2 + 6z} dz = \int_{\Gamma_1} \frac{\ln(z+2)}{z^3 + iz^2 + 6z} dz + \int_{\Gamma_2} \frac{\ln(z+2)}{z^3 + iz^2 + 6z} dz.$$

Definirajmo

$$f_1(z) = \frac{\ln(z+2)}{(z-2i)(z+3i)}.$$

Uočimo da vrijedi

$$\frac{f_1(z)}{z} = \frac{\ln(z+2)}{z^3 + iz^2 + 6z}.$$

Budući da je f_1 holomorfna na unutrašnjosti Γ_1 te se $z_1 = 0$ nalazi u unutrašnjosti Γ_1 , prema teoremu je

$$I_1 := \int_{\Gamma_1} \frac{f_1(z)}{z} dz = 2\pi i f_1(0) = 2\pi i \frac{\ln(2)}{(-2i)(3i)} = \frac{\pi \ln(2)}{3} i.$$

Nadalje, neka je

$$f_2(z) = \frac{\ln(z+2)}{z(z+3i)}.$$

Ponovno je

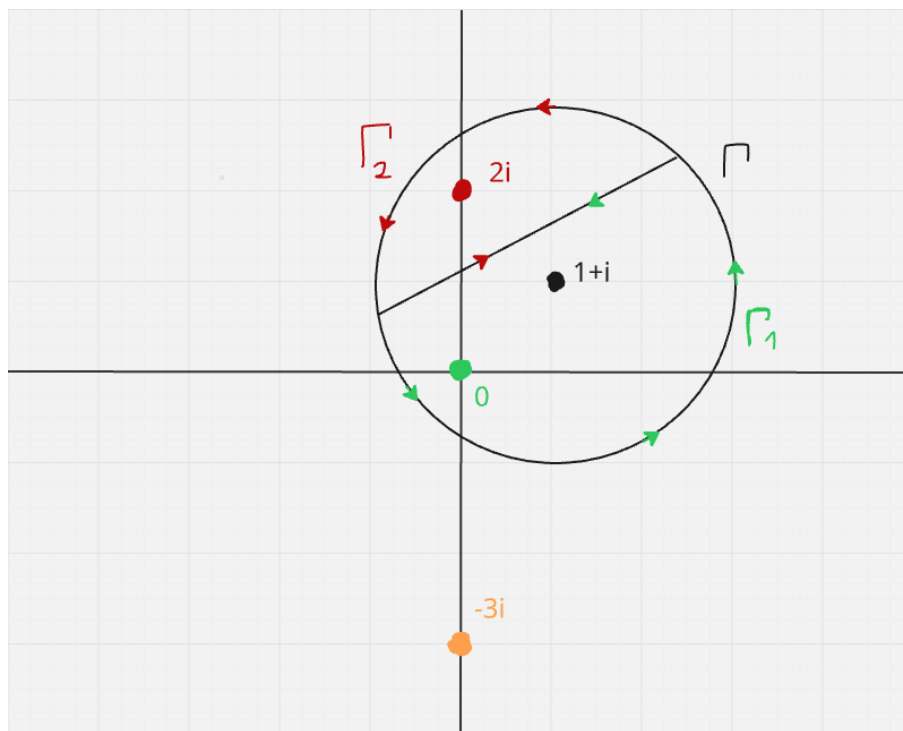
$$\frac{f_2(z)}{z-2i} = \frac{\ln(z+2)}{z^3 + iz^2 + 6z}.$$

Kako je f_2 holomorfna u unutrašnjosti Γ_2 te se točka $z_2 = 2i$ nalazi u unutrašnjosti Γ_2 , prema teoremu je

$$I_2 := \int_{\Gamma_2} \frac{f_2(z)}{z-2i} dz = 2\pi i f_2(2i) = -\frac{\pi}{5}i (\ln|2+2i| + i \arg(2+2i)) = -\frac{\pi}{5}i \left(\ln(2\sqrt{2}) + \frac{\pi}{4}i \right).$$

Konačno je

$$\int_{\Gamma} \frac{\ln(z+2)}{z^3 + iz^2 + 6z} dz = I_1 + I_2 = \pi i \left(\frac{\ln(2)}{3} - \frac{\ln(2\sqrt{2})}{5} - \frac{\pi}{20}i \right) = \pi i \left(\frac{\ln(2)}{30} - \frac{\pi}{20}i \right) = \frac{\pi^2}{20} + \frac{\pi \ln(2)}{30}i.$$



KOMPLEKSNA ANALIZA

Prvi kolokvij (nastavnički smjer) – 20. travnja 2026.

Zadatak 5. (7 bodova) Razvijte funkciju

$$f(z) = \left(z - \frac{\pi}{6}\right)^{2026} \sin^2 z$$

u Taylorov red oko točke $z_0 = \frac{\pi}{6}$. Odredite područje konvergencije dobivenog reda.

Rješenje 5. Koristimo definiciju $\sin z$:

$$\sin^2 z = \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}(e^{2iz} - 2 + e^{-2iz}).$$

Budući da želimo razvoj oko točke $z_0 = \frac{\pi}{6}$, koristimo

$$e^{2iz} = e^{2i(z - \frac{\pi}{6}) + \frac{\pi}{3}i} = e^{\frac{\pi}{3}i} e^{2i(z - \frac{\pi}{6})}$$

odnosno

$$e^{-2iz} = e^{-2i(z - \frac{\pi}{6}) - \frac{\pi}{3}i} = e^{-\frac{\pi}{3}i} e^{-2i(z - \frac{\pi}{6})}.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{4} \left(z - \frac{\pi}{6}\right)^{2026} (e^{\frac{\pi}{3}i} e^{2i(z - \frac{\pi}{6})} - 2 + e^{-\frac{\pi}{3}i} e^{-2i(z - \frac{\pi}{6})}) \\ &= -\frac{1}{4} \left(z - \frac{\pi}{6}\right)^{2026} \left(e^{\frac{\pi}{3}i} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{n!} \left(z - \frac{\pi}{6}\right)^n - 2 + e^{-\frac{\pi}{3}i} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(2i)^n}{n!} \left(z - \frac{\pi}{6}\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(z - \frac{\pi}{6}\right)^{2026} - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2i)^n}{4(n!)} (e^{\frac{\pi}{3}i} + (-1)^n e^{-\frac{\pi}{3}i}) \left(z - \frac{\pi}{6}\right)^{n+2026} \\ &= \frac{1}{4} \left(z - \frac{\pi}{6}\right)^{2026} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2i)^n}{4(n!)} (e^{\frac{\pi}{3}i} + (-1)^n e^{-\frac{\pi}{3}i}) \left(z - \frac{\pi}{6}\right)^{n+2026}. \end{aligned}$$

Područje konvergencije je $\mathbb{C}$.