

LINEARNA ALGEBRA 1

Treći rok - 26. kolovoza 2026.

1. (a) (16 bodova) Zadani su skupovi

$$M = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a - 2b + c = 4, b - d = 0\},$$
$$N = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4 : a + b - c = 0, 2a - d = 0\}.$$

Odredite po jednu bazu i dimenziju za sljedeće potprostore od $\mathbb{R}^4$ (ako nisu trivijalni):

$$[M], [N], [M] + [N], [M] \cap [N], [M \cap N].$$

- (b) (4 boda) Neka su S i T podskupovi konačnodimenzijsalnog vektorskog prostora V . Dokažite sljedeću implikaciju:

$$\dim([S] \cap [T]) = \dim[S \cap T] \implies [S] \cap [T] = [S \cap T]$$

Rješenje:

- (a) Proizvoljan vektor iz M je oblika

$$(a, b, -a + 2b + 4, b) = a(1, 0, -1, 0) + b(0, 1, 2, 1) + (0, 0, 4, 0),$$

pa vidimo da je

$$[M] = \{(1, 0, -1, 0), (0, 1, 2, 1), (0, 0, 4, 0)\}.$$

Navedeni vektori (označimo ih s m_1, m_2, m_3) su i linearno nezavisni, pa oni čine bazu za $[M]$, stoga je $\dim[M] = 3$.

Budući da su jednadžbe kojima je zadan N homogene, N je potprostor od $\mathbb{R}^4$, pa je $[N] = N$. Proizvoljan vektor iz N je oblika

$$(a, b, a + b, 2a) = a(1, 0, 1, 2) + b(0, 1, 1, 0),$$

pa dobivamo da je jedna baza za N

$$\{n_1, n_2\} = \{(1, 0, 1, 2), (0, 1, 1, 0)\}$$

i vrijedi $\dim N = 2$.

Da bismo odredili baze za $[M] + [N]$ i $[M] \cap [N]$, pogledajmo uniju baza za $[M]$ i $[N]$. Lako se vidi da su vektori m_1, m_2, m_3, n_1 linearno nezavisni, pa kako je $\dim \mathbb{R}^4 = 4$, vidimo da je $[M] + [N] = \mathbb{R}^4$. Također imamo sljedeću jednakost:

$$\frac{1}{2}m_1 + m_2 - \frac{1}{2}n_1 = n_2,$$

pa dobivamo da je vektor

$$\frac{1}{2}m_1 + m_2 = \frac{1}{2}n_1 + n_2 = \frac{1}{2}(1, 2, 3, 2)$$

element presjeka $[M] \cap [N]$. Kako je

$$\dim([M] \cap [N]) = \dim[M] + \dim[N] - \dim([M] + [N]) = 3 + 2 - 4 = 1,$$

vidimo da je $\{(1, 2, 3, 2)\}$ baza za $[M] \cap [N]$.

Neka je $(a, b, c, d) \in M \cap N$. Vidimo da tada vrijedi:

$$a - 2b + c = 4$$

$$b - d = 0$$

$$a + b - c = 0$$

$$2a - d = 0$$

Slijedi da je $b = d = 2a$, $c = 3a$, pa kad ovo uvrstimo u prvu jednadžbu dobivamo $0 = 4$. Dakle sustav nema rješenja, pa je $M \cap N = \emptyset$, a onda je $[M \cap N] = \{0\}$.

- (b) Pretpostavimo da je $\dim([S] \cap [T]) = \dim[S \cap T]$. Kako je $S \cap T$ podskup od S i od T , to vrijedi i za njihov linearne ljuske. Dakle

$$[S \cap T] \leq [S], [S \cap T] \leq [T],$$

pa slijedi da je

$$[S \cap T] \leq [S] \cap [T].$$

Sada vidimo da je $[S \cap T]$ potprostor od $[S] \cap [T]$ koji ima istu dimenziju kao $[S] \cap [T]$, pa slijedi tražena jednakost.

2. (a) (12 bodova) U ovisnosti u parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite $r(A_\lambda)$, gdje je

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

- (b) (8 bodova) Postoji li $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je matrica $A_\lambda^T A_\lambda$ regularna? Odgovor obrazložite.

Rješenje:

(a) Ispadne $r(A_\lambda) = \begin{cases} 3, \lambda \neq 5 \\ 2, \lambda = 5 \end{cases}$

- (b) Kako je $r(A_\lambda^T A_\lambda) \leq r(A_\lambda) \leq 3$ za svaki λ , ne postoji traženi λ .

3. (20 bodova)

(a) Za $n \geq 2$ izračunajte determinantu matrice $A_n = (a_{ij})$ zadane s

$$a_{ij} = \begin{cases} ij + 1, & i = j, \\ ij, & i \neq j. \end{cases}$$

(b) Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ regularne matrice takve da je $A + B$ regularna. Dokažite da vrijedi

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B = B(A + B)^{-1}A.$$

Rješenje:

(a) Zadana matrica je

$$A_n = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 5 & 6 & \cdots & 2n \\ 3 & 6 & 10 & \cdots & 3n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 2n & 3n & \cdots & n^2 + 1 \end{bmatrix},$$

Sada od drugog retka oduzmemo dvostruki prvi redak, od trećeg retka trostruki prvi redak itd., tj. za $i = 2, \dots, n$ napravimo

$$R_i \leftarrow R_i - iR_1.$$

Dobivamo

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ -2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -3 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -n & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Sada prvom stupcu dodamo dvostruki drugi stupac, trostruki treći stupac itd., tj.

$$C_1 \leftarrow C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n.$$

Tada

$$\det A_n = \begin{vmatrix} 1 + \sum_{k=1}^n k^2 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Dakle, razvojem po prvom stupcu:

$$\det A_n = 1 + \sum_{k=1}^n k^2 = 1 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

(b) Vrijedi

$$A^{-1} + B^{-1} = B^{-1}(A + B)A^{-1}.$$

Buduci da su A , B i $A+B$ regularne, slijedi da su i A^{-1} i B^{-1} regularne, te je produkt na desnoj strani regularan (i odmah je i lijeva strana regularna). Invertiranjem slijedi

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B.$$

Analogno, iz

$$A^{-1} + B^{-1} = A^{-1}(A+B)B^{-1}$$

dobivamo

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = B(A+B)^{-1}A.$$

Dakle,

$$(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A+B)^{-1}B = B(A+B)^{-1}A.$$

4. (20 bodova) U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustav

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 + \lambda x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + (\lambda - 1)x_3 + (\lambda + 5)x_4 = \lambda + 5, \\ (\lambda - 1)x_3 + (\lambda + 4)x_4 = \lambda + 3. \end{cases}$$

Rješenje: Proširena matrica sustava je

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & \lambda - 1 & \lambda + 5 & \lambda + 5 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & \lambda + 4 & \lambda + 3 \end{array} \right].$$

Gaussovom eliminacijom dobivamo

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 & \lambda + 5 & \lambda + 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & \lambda + 4 & \lambda + 3 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2\lambda - 2 & \lambda + 6 & \lambda + 4 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & \lambda + 4 & \lambda + 3 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda + 2) & -(\lambda + 2) \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & \lambda + 4 & \lambda + 3 \end{array} \right] \\ & \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & \lambda & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 & \lambda + 4 & \lambda + 3 \\ 0 & 0 & 0 & -(\lambda + 2) & -(\lambda + 2) \end{array} \right]. \end{aligned}$$

Za $\lambda \neq -2$ iz posljednjeg retka slijedi

$$x_4 = 1.$$

Ako je i $\lambda \neq 1$, iz trećeg retka dobivamo

$$x_3 = -\frac{1}{\lambda - 1},$$

a zatim

$$x_2 = \frac{2\lambda - 1}{\lambda - 1}, \quad x_1 = -\frac{\lambda}{\lambda - 1}.$$

Dakle, za $\lambda \neq 1, -2$,

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(-\frac{\lambda}{\lambda - 1}, \frac{2\lambda - 1}{\lambda - 1}, -\frac{1}{\lambda - 1}, 1 \right).$$

Za $\lambda = 1$ dobivamo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{array} \right],$$

pa istodobno mora vrijediti

$$x_4 = \frac{4}{5} \quad \text{i} \quad x_4 = 1,$$

što je nemoguće. Sustav nema rješenja.

Za $\lambda = -2$ dobivamo

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Stavimo $x_4 = t$. Tada

$$x_3 = \frac{2t-1}{3}, \quad x_2 = \frac{t+4}{3}, \quad x_1 = \frac{2-4t}{3}.$$

Stoga je

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{2-4t}{3}, \frac{t+4}{3}, \frac{2t-1}{3}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

5. (20 bodova) Neka je $A \in M_4$ matrica ranga 2. Neka je B matrica nastala iz A tako što smo joj zamijenili prvi i drugi redak, te trećem stupcu dodali peterostruki zbroj prva dva stupca.

- (a) Zapišite matricu B pomoću A i elementarnih matrica.
 (b) Ako su $C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}^T$ i $C_2 = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}^T$ dva rješenja sustava $AX = 0$, odredite neku bazu za prostor rješenja sustava $BX = 0$.

Rješenje: (a) $B = F_{12}AF_{13}^5F_{23}^5$.

(b) Označimo

$$\Omega_A = \{X \in M_{4,1} : AX = 0\} \quad \text{i} \quad \Omega_B = \{X \in M_{4,1} : BX = 0\}.$$

Tada je $\dim \Omega_A = 4 - r(A) = 2$, pa je $\Omega_A = [\{C_1, C_2\}]$. Kako je B nastala iz A elementarnim transformacijama, imamo $r(B) = r(A) = 2$ odakle je $\dim \Omega_B = 4 - r(B) = 2$. Nadalje, zbog

$$BX = 0 \Leftrightarrow F_{12}AF_{13}^5F_{23}^5X = 0 \Leftrightarrow AF_{13}^5F_{23}^5X = 0.$$

iz $F_{13}^5F_{23}^5X = C_i, i = 1, 2$ dobivamo dva linearno nezavisna rješenja sustava $BX = 0$:

$$X = (F_{13}^5F_{23}^5)^{-1}C_i = F_{23}^{-5}F_{13}^{-5}C_i, i = 1, 2.$$

Ova rješenja nastaju iz C_i tako što trećem retku dodamo prvi redak pomnožen s -5 i drugi redak pomnožen s -5 . Prema tome, bazu za Ω_B čine

$$D_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -12 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad D_2 = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -27 \\ -1 \end{bmatrix}.$$