

LINEARNA ALGEBRA 1

Prvi kolokvij - 19. studenog 2025.

1. U $V^3(O)$ zadani su vektori

$$\vec{a} = \vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}, \quad \vec{b} = \vec{i} + \lambda\vec{j} + \vec{k}, \quad \vec{c} = 2\vec{i} + 6\vec{j} + \mu\vec{k},$$

gdje su $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

- (a) (5 bodova) Odredite, ako postoje, λ i μ takve da je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza za $V^3(O)$.
(b) (5 bodova) Odredite, ako postoje, λ i μ takve da vrijedi

$$[\{\vec{a}, \vec{b}\}] = [\{\vec{b}, \vec{c}\}].$$

2. (10 bodova) Za svaki $n \in \mathbb{N}$ dan je skup

$$L_n = \{p \in \mathcal{P}_5 : p(k) = 0 \text{ za svaki } k = 1, \dots, n\}.$$

Pokažite da je $L_n \leq \mathcal{P}_5$ te odredite (ovisno o n) dimenziju tog prostora i (ako postoji) bazu.

3. Neka su zadani

$$X = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : a = ic, \quad b = ia\},$$

$$Y = \{(a, b, c) \in \mathbb{C}^3 : ia - ib + c = 0\}.$$

- (a) (8 bodova) Ako X i Y promatramo kao potprostore kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^3$, odredite dimenzije od X , Y , $X \cap Y$ i $X + Y$, te, ako postoje, po jednu bazu svakog od tih potprostora.
(b) (2 boda) Ako X i Y promatramo kao potprostore realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^3$, odredite dimenzije od X , Y , $X \cap Y$ i $X + Y$.

4. U prostoru matrica $M_2(\mathbb{R})$ zadani su sljedeći potprostori:

$$L = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : a + c = 0 \right\}$$

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

- (a) (6 bodova) Dokažite da je N direktan komplement od L u $M_2(\mathbb{R})$.
(b) (4 boda) Odredite rastav matrice $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ s obzirom na rastav $M_2(\mathbb{R}) = L \dot{+} N$.

5. (a) (5 bodova) Neka je V realan vektorski prostor te $C = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_n\}$ i

$$D = \{x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3, \dots, x_1 + \dots + x_n\}$$

podskupovi od V . Ako je C linearno nezavisan, je li D linearno nezavisan?

- (b) (5 bodova) Neka je $n \geq 2$ paran, te M_n prostor kvadratnih matrica reda n . Postoji li potprostor $L \leq M_n$ dimenzije $n^2/2$ takav da je $L \cap S = \{0\}$, gdje je $S \leq M_n$ potprostor simetričnih matrica?

RJEŠENJA

1. (a) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ je baza za $V^3(O)$ akko su vektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ linearno nezavisni. Iz

$$\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$$

dobivamo sustav:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ 3\alpha + \lambda\beta + 6\gamma &= 0 \\ 2\alpha + \beta + \mu\gamma &= 0\end{aligned}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s -3 i dodamo drugoj te s -2 i dodamo trećoj, pa dobivamo:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta + 2\gamma &= 0 \\ (\lambda - 3)\beta &= 0 \\ -\beta + (\mu - 4)\gamma &= 0\end{aligned}$$

Da bi sustav imao jedinstveno rješenje iz druge jednadžbe vidimo da mora biti $\lambda \neq 3$, a onda iz treće da mora biti $\mu \neq 4$.

Dakle, $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ je baza za $V^3(O)$ akko $\lambda \neq 3$ i $\mu \neq 4$.

- (b) Vrijedi $[\{\vec{a}, \vec{b}\}] = [\{\vec{b}, \vec{c}\}]$ akko

$$\vec{a} \in [\{\vec{b}, \vec{c}\}] \quad \text{i} \quad \vec{c} \in [\{\vec{a}, \vec{b}\}].$$

U tom slučaju, vidimo da $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ moraju biti linearno zavisni, pa je $\lambda = 3$ ili $\mu = 4$.

- $\lambda = 3$

Iz $\vec{a} = \alpha\vec{b} + \beta\vec{c}$ dobivamo sustav:

$$\begin{aligned}\alpha + 2\beta &= 1 & \alpha + 2\beta &= 1 \\ 3\alpha + 6\beta &= 3 & (\mu - 2)\beta &= 1 \\ \alpha + \mu\beta &= 2\end{aligned}$$

Vidimo da ovaj sustav ima rješenje za $\mu \neq 2$.

Iz $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$ dobivamo sustav:

$$\begin{aligned}\alpha + \beta &= 2 \\ 3\alpha + 3\beta &= 6 \\ 2\alpha + \beta &= \mu\end{aligned}$$

Ovaj sustav ima rješenje za proizvoljan μ .

- $\mu = 4$

U ovom slučaju je $\vec{c} = 2\vec{a}$, pa vrijedi

$$\vec{a} = \frac{1}{2}\vec{c} \in [\{\vec{b}, \vec{c}\}] \quad \text{i} \quad \vec{c} \in [\{\vec{a}, \vec{b}\}].$$

Zaključak: tvrdnja vrijedi za $\lambda = 3$ i $\mu \neq 2$ te za $\mu = 4$ i $\lambda \in \mathbb{R}$.

Rješenje bez korištenja (a) dijela

Iz $\vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$ dobivamo sustav:

$$\begin{array}{ll} \alpha + 2\beta = 1 & \alpha + 2\beta = 1 \\ \lambda\alpha + 6\beta = 3 & (6 - 2\lambda)\beta = 3 - \lambda \\ \alpha + \mu\beta = 2 & (\mu - 2)\beta = 1 \end{array}$$

Kako je $(\mu - 2)\beta = 1$, vidimo da mora biti $\mu \neq 2$ te je tada $\beta = \frac{1}{\mu - 2}$.

Iz jednadžbe $(6 - 2\lambda)\beta = 3 - \lambda$ vidimo da imamo dva slučaja:

- $\lambda = 3$

Tada je navedena jednadžba $0 = 0$, pa u tom slučaju sustav ima rješenje za svaki $\mu \neq 2$.

- $\lambda \neq 3$

Tada vidimo da mora biti

$$\beta = \frac{3 - \lambda}{6 - 2\lambda} = \frac{1}{2},$$

a s druge strane $\beta = \frac{1}{\mu - 2}$, pa je $\mu = 4$.

Uočimo da je svakako $\beta \neq 0$, pa vidimo da ako je $\vec{a} = \alpha \vec{b} + \beta \vec{c}$, onda je

$$\vec{c} = \frac{1}{\beta} \vec{a} - \frac{\alpha}{\beta} \vec{b}.$$

Dakle, jednakost linearnih ljuski vrijedi za $\lambda = 3$ i $\mu \neq 2$ te za $\lambda \neq 3$ i $\mu = 4$ - što je ekvivalentno uvjetu $(\lambda = 3 \text{ i } \mu \neq 2)$ ili $(\mu = 4 \text{ i } \lambda \in \mathbb{R})$ iz prošlog rješenja.

2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Neka su $p, q \in L_n$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada za svaki $k = 0, 1, \dots, n$ imamo

$$(\alpha p + \beta q)(k) = \underbrace{\alpha p(k)}_{=0} + \underbrace{\beta q(k)}_{=0} = 0.$$

Dakle, imamo da je $\alpha p + \beta q \in L_n$, pa prema karakterizaciji vektorskih potprostora slijedi $L_n \leq \mathcal{P}_5$ za svaki $n \in \mathbb{N}$.

Odredimo sada pripadne dimenzije te baze (ukoliko postoje). Primijetimo prvo da za $n > 5$ bi svaki polinom $p \in L_n$ imao šest ili više različitih nultočki. Kako je posebno $\deg p \leq 5$, slijedi da mora biti $p = 0$. Stoga je

$$L_n = \{0\} \text{ i } \dim L_n = 0 \quad \text{za sve } n > 5.$$

Promotrimo sada slučaj $n = 1$. Tada je

$$\begin{aligned} L_1 &= \{p \in \mathcal{P}_5 : p(1) = 0\} \\ &= \{(t-1)q(t) : q \in \mathcal{P}_4\} \\ &= \{(t-1)(at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e) : a, b, c, d, e \in \mathbb{R}\} \\ &= [\{t-1, t(t-1), t^2(t-1), t^3(t-1), t^4(t-1)\}]. \end{aligned}$$

Odavde vidimo da je $\{t-1, t(t-1), t^2(t-1), t^3(t-1), t^4(t-1)\}$ sustav izvodnica za L_1 , pa kako je on linearno nezavisan (rastući stupanj polinoma u skupu), slijedi da je to i baza za L_1 , te je $\dim L_1 = 5$. Posve analogno dobijemo i za $2 \leq n \leq 5$ da je skup

$$\left\{ t^m \prod_{k=1}^n (x-k) : 0 \leq m \leq 5-n \right\}$$

sustav baza za L_n (sustav izvodnica istim raspisom kao i za $n = 1$, te linearno nezavisan ponovno zbog rastućeg stupnja), te je $\dim L_n = 6 - n$ za $n = 1, \dots, 5$.

3. (a) Za proizvoljan element $(a, b, c) \in X$ vrijedi:

$$(a, b, c) = (ic, i \cdot ic, c) = (ic, -c, c) = c \cdot (i, -1, 1),$$

pa vidimo da je $\{(i, -1, 1)\}$ skup izvodnica, a odmah i baza (zbog linearne nezavisnosti) za X . Dakle, $\dim X = 1$.

Slično, za proizvoljan element $(a, b, c) \in Y$ vrijedi:

$$(a, b, c) = (a, b, ib - ia) = a \cdot (1, 0, -i) + b \cdot (0, 1, i),$$

pa je $\{(1, 0, -i), (0, 1, i)\}$ skup izvodnica, a odmah i baza (zbog linearne nezavisnosti) za Y . Dakle, $\dim Y = 2$.

Sada je skup $\{(i, -1, 1), (1, 0, -i), (0, 1, i)\}$ skup izvodnica za $X + Y$, ali moramo provjeriti linearnu nezavisnost.

Pretpostavimo da je $\alpha(1, 0, -i) + \beta(0, 1, i) = (i, -1, 1)$, za neke $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.

Dobivamo sustav:

$$\begin{aligned}\alpha &= i, \\ \beta &= -1, \\ -i\alpha + i\beta &= 1,\end{aligned}$$

no taj sustav nema rješenja, pa je dani skup linearno nezavisan.

Slijedi da je navedeni skup također i baza za potprostor $X + Y$ te je $\dim(X + Y) = 3$

Sada je $\dim(X \cap Y) = 1 + 2 - 3 = 0$ te navedeni potprostor nema bazu.

- (b) Sada za proizvoljan element $(a, b, c) = (a_1 + ia_2, b_1 + ib_2, c_1 + ic_2) \in X$ vrijedi

$$(a, b, c) = c(i, -1, 1) = c_1(i, -1, 1) + ic_2(i, -1, 1) = c_1(i, -1, 1) + c_2(-1, -i, i).$$

Skup $\{(i, -1, 1), (-1, -i, i)\}$ je linearno nezavisan u $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^3$, pa je to baza za X te je $\dim X = 2$.

Slično,

$$\{(1, 0, -i), (i, 0, 1), (0, 1, i), (0, i, -1)\}$$

je baza za Y , pa je $\dim Y = 4$.

Također, opet vidimo da je skup

$$B_X \cup B_Y = \{(i, -1, 1), (-1, -i, i), (1, 0, -i), (i, 0, 1), (0, 1, i), (0, i, -1)\}$$

linearno nezavisan, pa je to baza za $X + Y$ te je $\dim(X + Y) = 6$.

Slijedi da je $\dim(X \cap Y) = 0$ te taj potprostor nema bazu.

4. (a) Raspisivanjem uvjeta za L , dobiva se da je matrica iz L oblika $\begin{bmatrix} a & b \\ b & -a \end{bmatrix}$, pa vidimo da je

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

baza za L . Dakle $\dim L = 2$.

Baza za N je

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\},$$

pa je i $\dim N = 2$. Kako je $\dim L + \dim N = 4 = \dim M_2(\mathbb{R})$, preostaje još dokazati da je $L \cap N = \{0\}$.

Pretpostavimo da je $A \in L \cap N$. Tada je zbog $A \in N$, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$, a zbog $A \in L$ vrijedi $a + a = 0$ i $b = -b$. Iz ovoga slijedi $a = b = 0$, pa $A = 0$.

- (b) Prikažimo $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ u bazi za $M_2(\mathbb{R})$ koja je dobivena kao unija baza od L i N :

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Izjednačavajući koordinate lijeve i desne strane, dobivamo sustav:

$$\begin{aligned} \alpha + \gamma &= a \\ \beta + \delta &= b \\ \beta - \delta &= c \\ -\alpha + \gamma &= d \end{aligned}$$

Rješenja ovog sustava su:

$$\alpha = \frac{a-d}{2}, \beta = \frac{b+c}{2}, \gamma = \frac{a+d}{2}, \delta = \frac{b-c}{2},$$

pa je traženi rastav

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a-d}{2} & \frac{b+c}{2} \\ \frac{b+c}{2} & -\frac{a-d}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{a+d}{2} & \frac{b-c}{2} \\ -\frac{b-c}{2} & \frac{a+d}{2} \end{bmatrix}.$$

5. (a) Pokažimo da je D linearno nezavisan na dva načina. Prvi:

Neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ bilo koji skalari za koje vrijedi

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2(x_1 + x_2) + \dots + \alpha_n(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = 0.$$

Tada je

$$(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n)x_1 + (\alpha_2 + \dots + \alpha_n)x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0$$

Kako je C linearno nezavisan, imamo

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$$

$$\alpha_2 + \dots + \alpha_n = 0$$

$$\alpha_n = 0.$$

Povratnom supstitucijom dobijemo $0 = \alpha_n = \dots = \alpha_1$. Dakle D je linearno nezavisan.

Drugi način. Ako je $n = 1$ tvrdnja očito vrijedi. Neka je $n \geq 2$. Vektor $x_1 \neq 0$ jer je C linearno nezavisan. Kada bi D bio linearno zavisn, postojao bi $2 \leq k \leq n$ i skalari $\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}$ takvi da je

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = \alpha_1 x_1 + \alpha_2(x_1 + x_2) + \dots + \alpha_{k-1}(x_1 + x_2 + \dots + x_{k-1}).$$

Imamo dvije opcije nastavka dokaza. Prva:

$$x_k = (\alpha_1 + \dots + \alpha_{k-1} - 1)x_1 + (\alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1} - 1)x_2 + \dots + (\alpha_{k-1} - 1)x_{k-1}.$$

Što bi značilo da je C linearno zavisn, pa imamo kontradikciju.

Druga:

$$x_1 + x_2 + \dots + x_k = (\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1})x_1 + (\alpha_2 + \dots + \alpha_{k-1})x_2 + \dots + \alpha_{k-1}x_{k-1}.$$

Kako je skup C baza za $[C]$, a zapis u gornjoj jednadžbi nije jedinstven, imamo kontradikciju.

- (b) Pretpostavimo da takav L postoji. Kako je $\dim S = n(n+1)/2$ a $\dim M_n = n^2$ imamo

$$\begin{aligned} n^2 = \dim M_n &\geq \dim(L + S) = \dim L + \dim S - \dim(L \cap S) \\ &= n^2/2 + n(n+1)/2 - 0 \\ &= n^2 + n/2. \end{aligned}$$

Kontradikcija.