Linearna algebra 1, 2020./2021.
Prva domaća zadaća

1. Neka je skup $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}\}$ baza za $V^2(O)$. Neka je $\varphi \in \mathbb{R}$, $\varphi \in [0, \pi)$, te neka je $R_\varphi(\overrightarrow{a})$ radijvektor koji nastaje rotacijom radijvektora $\overrightarrow{a}$ za kut φ. Za koje vrijednosti φ je i skup $\{R_\varphi(\overrightarrow{a}), \overrightarrow{b}\}$ baza za $V^2(O)$?

2. Pokažite da skup $S = \{(a, a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\}$ nije sustav izvodnica za $\mathbb{R}^4$. Nađite, ako postoji, vektor $v \in \mathbb{R}^4$ takav da je skup $S \cup \{v\}$ sustav izvodnica za $\mathbb{R}^4$. Je li takav v jedinstven?

3. Neka je $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Pokažite da je skup

$$S = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \in \{-a, a\},\ i = 1, 2, \ldots, n\}$$

sustav izvodnica za $\mathbb{R}^n$.

4. Za koje vrijednosti $x \in \mathbb{R}$ je skup

$$X = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ x & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & x \\ 1 & x \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & x \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x & 1 \\ x & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

linearno nezavisan u $M_2(\mathbb{R})$?

5. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ te neka su dani vektori $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots y_m$ u V $(n, m \in \mathbb{N})$. Dokažite da je

$$[\{x_1, \ldots, x_n\}] = [\{y_1, \ldots, y_m\}]$$

ako i samo ako vrijedi

$$x_1, \ldots, x_n \in [\{y_1, \ldots, y_m\}] \text{ i } y_1, \ldots, y_m \in [\{x_1, \ldots, x_n\}]\,.$$