

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok – 9. veljače 2026.

Zadatak 1. (20 bodova) Provjerite je li preslikavanje $|| \cdot || : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ zadano s

$$||x|| = \max\{|x_1| + |x_2|, |x_2| + |x_3|, |x_1| + |x_3|\}$$

norma na $\mathbb{R}^3$. Ako je norma, je li inducirana nekim skalarnim produktom na $\mathbb{R}^3$? Obrazložite odgovore.

Rješenje.

Pozitivna definitnost

Kako je $|x_i| \geq 0$ za sve $i \in \{1, 2, 3\}$, tada je i $|x_i| + |x_j| \geq 0$ za sve $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, iz čega slijedi $||x|| = \max\{|x_1| + |x_2|, |x_2| + |x_3|, |x_1| + |x_3|\} \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^3$. Ako je $x = (0, 0, 0)$, tada je očito $||x|| = 0$. Ako je $||x|| = 0$, tada je $\max\{|x_1| + |x_2|, |x_2| + |x_3|, |x_1| + |x_3|\} = 0$, a to je ispunjeno samo u slučaju kada je $|x_i| + |x_j| = 0$ za sve $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$. Slijedi da je $|x_1| = |x_2| = |x_3| = 0$, odnosno $x = (0, 0, 0)$. Preslikavanje zadovoljava pozitivnu definitnost.

Homogenost

$$\begin{aligned} ||\lambda x|| &= \max\{|\lambda x_1| + |\lambda x_2|, |\lambda x_2| + |\lambda x_3|, |\lambda x_1| + |\lambda x_3|\} \\ &= \max\{|\lambda|(|x_1| + |x_2|), |\lambda|(|x_2| + |x_3|), |\lambda|(|x_1| + |x_3|)\} \\ &= |\lambda| \max\{|x_1| + |x_2|, |x_2| + |x_3|, |x_1| + |x_3|\} \\ &= |\lambda| ||x|| \end{aligned}$$

Preslikavanje zadovoljava homogenost.

Nejednakost trokuta

Za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$\begin{aligned} ||x + y|| &= \max\{|x_1 + y_1| + |x_2 + y_2|, |x_2 + y_2| + |x_3 + y_3|, |x_1 + y_1| + |x_3 + y_3|\} \\ &\leq \max\{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|, |x_2| + |y_2| + |x_3| + |y_3|, |x_1| + |y_1| + |x_3| + |y_3|\} \end{aligned}$$

Kako je $|x_i| + |x_j| \leq ||x||$ i $|y_i| + |y_j| \leq ||y||$ za sve $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$, tada je $|x_i| + |x_j| + |y_i| + |y_j| \leq ||x|| + ||y||$ za sve $i, j \in \{1, 2, 3\}, i \neq j$. Slijedi

$$\max\{|x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2|, |x_2| + |y_2| + |x_3| + |y_3|, |x_1| + |y_1| + |x_3| + |y_3|\} \leq ||x|| + ||y||,$$

odnosno $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

Preslikavanje zadovoljava nejednakost trokuta.

Zaključak: Preslikavanje je norma na $\mathbb{R}^3$.

Induciranost

Ako je norma inducirana skalarnim produktom, tada vrijedi relacija paralelograma

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2(||x||^2 + ||y||^2)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$. Za vektore $x = (1, 0, 0)$ i $y = (0, 1, 0)$ vrijedi

$$||x + y||^2 + ||x - y||^2 = 2^2 + 2^2 = 8$$

$$2(||x||^2 + ||y||^2) = 2(1^2 + 1^2) = 4.$$

Relacija paralelograma nije ispunjena za sve $x, y \in \mathbb{R}^3$ pa zadana norma nije inducirana niti jednim skalarnim produktom na $\mathbb{R}^3$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok – 9. veljače 2026.

Zadatak 2. (22 boda)

- (a) (12 bodova) U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ odredite najbolju aproksimaciju matrice

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matricama iz potprostora $\text{Ker}(\text{tr})$, gdje je $\text{tr} : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija koja matrici pridružuje njezin trag.

- (b) (10 bodova) U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom definiranim formulom

$$\langle p|q \rangle := \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt, \quad \forall p, q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$$

zadan je linearan funkcional

$$f(p) = p(-1) + p(1).$$

Odredite polinom $q \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ takav da vrijedi

$$f(p) = \langle p|q \rangle, \quad \forall p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Rješenje.

- (a) Odredimo prvo jezgru linearnog operatora $\text{tr} : M_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$. Uočimo da ako je $\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$ u $\text{Ker}(\text{tr})$, onda je $w = -x$, pa je

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

baza za $\text{Ker}(\text{tr})$. Označimo te elemente baze redom s A_1, A_2, A_3 . Najbolja aproksimacija matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

matricama iz potprostora $\text{Ker}(\text{tr})$ je ortogonalna projekcija matrice A na potprostor $\text{Ker}(\text{tr})$. Postoje dva načina kako možemo riješiti zadatak. Jedan način je da ortonormiramo bazu $\{A_1, A_2, A_3\}$ potprostora $\text{Ker}(\text{tr})$ i primijenimo formulu za ortogonalnu projekciju. Ortonormiranjem dobijemo vektore

$$E_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Primjenom formule za ortogonalnu projekciju dobivamo da je najbolja aproksimacija matrice A matricama iz potprostora $L = \text{Ker}(\text{tr})$ dana s

$$A_L = \langle A | E_1 \rangle E_1 + \langle A | E_2 \rangle E_2 + \langle A | E_3 \rangle E_3 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Drugi način kako možemo riješiti zadatak je da prvo izračunamo ortogonalnu projekciju na $L^\perp$ i onda izračunamo $A_L = A - A_{L^\perp}$. Prvo ćemo odrediti $L^\perp$.

Neka je $B = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in L^\perp$. Uočimo da je tada

$$\begin{cases} a - d = \langle B | A_1 \rangle = 0 \\ b = \langle B | A_2 \rangle = 0 \\ c = \langle B | A_3 \rangle = 0, \end{cases}$$

pa je tada $\{I\}$ baza prostora $L^\perp$, a $\{\frac{1}{\sqrt{2}}I\}$ ortonormirana baza prostora $L^\perp$. Tada je tražena najbolja aproksimacija ortogonalna projekcija vektora A na $\text{Ker}(\text{tr})$, odnosno

$$A_L = A - A_{L^\perp} = A - \left\langle A \left| \frac{1}{\sqrt{2}}I \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}}I = A - I = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

(b) Neka je $q(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$, $t \in \mathbb{R}$ i uzmimo $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$, $t \in \mathbb{R}$. Time dobivamo sustav

$$\begin{cases} 2 = f(p_0) = \langle p_0 | q \rangle = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 \\ 0 = f(p_1) = \langle p_1 | q \rangle = \frac{2}{3}a_1 \\ 2 = f(p_2) = \langle p_2 | q \rangle = \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_2. \end{cases}$$

Rješavanjem sustava dobivamo da je $a_0 = -\frac{3}{2}$, $a_1 = 0$, $a_2 = \frac{15}{2}$, odnosno $q(t) = -\frac{3}{2} + \frac{15}{2}t^2$, $t \in \mathbb{R}$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok – 9. veljače 2026.

Zadatak 3. (26 bodova)

- (a) (10 bodova) Za koje je $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ preslikavanje $C : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^3$

$$C(z_1, z_2) = (\alpha z_1 + \beta \overline{z_1}, z_1 + z_2, \gamma z_2)$$

linearan operator?

- (b) (16 bodova) Neka je $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $V^3(O)$ i neka je $S : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ linearni operator koji vektor prvo zrcali s obzirom na pravac razapet vektorom $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$, a potom ga zrcali s obzirom na ravninu razapetu vektorima $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$ i $\vec{c} = 2\vec{j} + \vec{k}$. Odredite matrični zapis operatora S u bazi (e) te njegov rang i defekt.

Rješenje.

- (a) Preslikavanje C treba zadovoljavati svojstvo homogenosti i aditivnosti kako bi bio linearan operator. Provjerom homogenosti dobivamo

$$C(\lambda z_1, \lambda z_2) = \lambda C(z_1, z_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$(\alpha \lambda z_1 + \beta \overline{\lambda z_1}, \lambda z_1 + \lambda z_2, \gamma \lambda z_2) = \lambda(\alpha z_1 + \beta \overline{z_1}, z_1 + z_2, \gamma z_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}$$

$$(\alpha \lambda z_1 + \beta \overline{\lambda} \cdot \overline{z_1}, \lambda z_1 + \lambda z_2, \gamma \lambda z_2) = (\alpha \lambda z_1 + \beta \lambda \overline{z_1}, \lambda z_1 + \lambda z_2, \gamma \lambda z_2), \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}.$$

Iz zadnje jednakosti vidimo da će homogenost vrijediti ako i samo ako je $\beta \overline{\lambda} \overline{z_1} = \beta \lambda \overline{z_1}$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ i svaki $z_1 \in \mathbb{C}$, a to vrijedi ako i samo ako je $\beta = 0$. Provjerom aditivnosti nećemo dobiti dodatne uvjete

$$\begin{aligned} C(z + w) &= C(z_1 + w_1, z_2 + w_2) = (\alpha(z_1 + w_1), (z_1 + w_1) + (z_2 + w_2), \gamma(z_2 + w_2)) \\ &= (\alpha z_1, z_1 + z_2, \gamma z_2) + (\alpha w_1, w_1 + w_2, \gamma w_2) \\ &= C(z_1, z_2) + C(w_1, w_2) \\ &= C(z) + C(w). \end{aligned}$$

Preslikavanje C je linearan operator ako i samo ako je $\beta = 0$ i $\alpha, \gamma \in \mathbb{C}$.

- (b) Neka je $A : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ linearan operator zrcaljenja s obzirom na pravac razapet vektorom $\vec{a}$ i neka je $B : V^3(O) \rightarrow V^3(O)$ linearan operator zrcaljenja s obzirom na ravninu razapetu vektorima $\vec{b}$ i $\vec{c}$. S vježbi je poznato da linearni operatori A i B djeluju na proizvoljan vektor $\vec{v}$ na sljedeće načine

$$A(\vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot \vec{a}_0) \vec{a}_0 - \vec{v}, \quad \vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}),$$

$$B(\vec{v}) = \vec{v} - 2(\vec{v} \cdot \vec{n}) \vec{n}, \quad \vec{n} = \frac{\vec{b} \times \vec{c}}{\|\vec{b} \times \vec{c}\|} = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}).$$

Djelovanjem operatora A i B na elemente baze (e) dobivamo

$$A(\vec{i}) = \frac{1}{3}(-\vec{i} + 2\vec{j} - 2\vec{k}), \quad A(\vec{j}) = \frac{1}{3}(2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}), \quad A(\vec{k}) = \frac{1}{3}(-2\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}),$$

$$B(\vec{i}) = \frac{1}{9}(\vec{i} + 4\vec{j} - 8\vec{k}), \quad B(\vec{j}) = \frac{1}{9}(4\vec{i} + 7\vec{j} + 4\vec{k}), \quad B(\vec{k}) = \frac{1}{9}(-8\vec{i} + 4\vec{j} + \vec{k}).$$

Slijedi

$$[A]_{(e)} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}, \quad [B]_{(e)} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Operator S je kompozicija operatora A i B pa slijedi

$$\begin{aligned} [S]_{(e)} &= [B \circ A]_{(e)} = [B]_{(e)} \cdot [A]_{(e)} = \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -8 \\ 4 & 7 & 4 \\ -8 & 4 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{27} \begin{bmatrix} 23 & 14 & -2 \\ 2 & -7 & -26 \\ 14 & -22 & 7 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Iz geometrijskih opisa operatora A i B , vidimo da je $\text{Im}S = B(A(V^3(O))) = B(V^3(O)) = V^3(O)$. Slijedi da je $r(S) = 3$, a po teoremu o rangu i defektu slijedi $d(S) = 0$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok – 9. veljače 2026.

Zadatak 4. (12 bodova) Neka je $A \in L(\mathbb{C}^2)$ linearan operator koji u kanonskoj bazi (e) ima matrični prikaz

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & a \\ \bar{a} & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite za koje $a \in \mathbb{C}$ je $0 \in \sigma(A)$. Za sve takve a odredite neku bazu prostora $\mathbb{C}^2$, ovisnu o a , u kojoj je matrica operatora A dijagonalna (ako takva baza postoji).

Rješenje. Uočimo da je $0 \in \sigma(A)$ ekvivalentan uvjetu $k_A(0) = 0$, odnosno $\det([A - 0 \cdot I]_{(e)}) = 0$, iz čega dobivamo da je $2 - |a|^2 = 0$, odnosno $|a| = \sqrt{2}$. Karakteristični polinom je jednak

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & a \\ \bar{a} & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - a \cdot \bar{a} = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - |a|^2 = (1 - \lambda)(2 - \lambda) - 2 = \lambda(\lambda - 3),$$

pa je $\sigma(A) = \{0, 3\}$. Sada se lako dobije da su pripadni svojstveni potprostori

$$V_A(0) = \{x \in \mathbb{C}^2 : A(x) = 0 \cdot x\} = [\{(-a, 1)\}], \quad V_A(3) = \{x \in \mathbb{C}^2 : A(x) = 3x\} = [\{(1, \bar{a})\}].$$

Iz toga slijedi da je $\{(-a, 1), (1, \bar{a})\}$ baza u kojoj operator A ima dijagonalni matrični prikaz.

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok – 9. veljače 2026.

Zadatak 5. (20 bodova)

- (a) (6 bodova) Neka je V netrivialni vektorski prostor, $A : V \rightarrow V$ linearni operator i $v_1, v_2 \in V \setminus \{0_V\}$ takvi da vrijedi

$$A(v_1) = 3v_1, A(v_2) = -v_2.$$

Može li vektor $v_1 + v_2$ biti svojstveni vektor operatora A ? Obrazložite odgovor.

- (b) (14 bodova) Neka je $(V, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ konačnodimenzionalni unitarni prostor, M potprostor od V i $b \in V$. Definirajte udaljenost vektora b od potprostora M , definirajte ortogonalnu projekciju vektora b na potprostor M i dokažite da vrijedi

$$d(b, M) = d(b, b_M),$$

gdje je b_M ortogonalna projekcija vektora b na potprostor M .

Rješenje.

- (a) Pretpostavimo da je vektor $v_1 + v_2$ svojstveni vektor operatora A . Tada za neki $\lambda \in \mathbb{F}$ vrijedi

$$A(v_1 + v_2) = \lambda(v_1 + v_2),$$

iz čega slijedi

$$\lambda(v_1 + v_2) = A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2) = 3v_1 - v_2,$$

odnosno $(\lambda - 3)v_1 + (\lambda + 1)v_2 = 0$. Kako su v_1 i v_2 svojstveni vektori za različite svojstvene vrijednosti, prema teoremu s predavanja znamo da su oni linearno nezavisni, a onda je $\lambda - 3 = 0$ i $\lambda + 1 = 0$. Iz toga slijedi $\lambda = 3 = -1$, odnosno $3 = -1$. Kako smo došli do kontradikcije, zaključujemo da vektor $v_1 + v_2$ ne može biti svojstveni vektor operatora A .

- (b) Vidjeti predavanja.