LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2024.

Zadatak 1. (10 bodova) Za linearne operatore $A, B \in L(\mathbb{R}^3)$ vrijedi

$$A(1,2,3) = (-6,1,3),\ A(1,1,0) = (-1,1,2),\ A(3,0,0) = (3,3,3)$$
$$B(1,1,1) = (x,1,2),\ B(0,1,0) = (-2,y,1),\ B(0,1,-1) = (-1,0,z).$$

Postoje li x, y, z, takvi da je $A = B$? Ako postoje, odredite ih.

Rješenje. Iz danih podataka lako odredimo kako operator A djeluje na kanonskoj bazi za $\mathbb{R}^3$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
A(1,0,0) &= \frac{1}{3}A(3,0,0) = (1,1,1)\\
A(0,1,0) &= A(1,1,0) - A(1,0,0) = (-1,1,2) - (1,1,1) = (-2,0,1)\\
A(0,0,1) &= \frac{1}{3}(A(1,2,3) - A(1,0,0) - 2A(0,1,0)) = (-1,0,0).
\end{aligned}$$

Uočite da ste isti rezultat mogli dobiti koristeći matrični zapis. Uvedemo li oznaku
$(f) = \{(1,2,3),(1,1,0),(3,0,0)\}$, onda je

$$[A]_{(e)} = [A]_{(e,f)}[I]_{(f,e)} = \begin{bmatrix} -6 & -1 & 3\\ 1 & 1 & 3\\ 3 & 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3\\ 2 & 1 & 0\\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1\\ 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Sada imamo

$$\begin{aligned}
A(1,1,1) &= (-2,1,2)\\
A(0,1,0) &= (-2,0,1)\\
A(0,1,-1) &= (-1,0,1).
\end{aligned}$$

Da bi vrijedilo $A = B$, nužno i dovoljno je da se podudaraju na bazi $\{(1,1,1),(0,1,0),(0,1,-1)\}$, a to vrijedi ako i samo ako je $x = -2, y = 0, z = 1$.

Zadatak 2. (10 bodova) Zadan je operator $A \in L(\mathcal{P}_2)$ s

$$A(a + bt + ct^2) = (a + \lambda b + 2c) + (b + c)t + (a + b)t^2.$$

(a) (7 bodova) U ovisnosti o parametru λ izračunajte rang i defekt operatora A te po jednu bazu (ako postoje) za jezgru i sliku.

(b) (3 boda) Za sve vrijednosti za koje A nije izomorfizam odredite nalazi li se polinom $p(t) = 1 - t$ u slici operatora A te nalazi li se polinom $q(t) = 1 + t - t^2$ u jezgri operatora A.

Rješenje.

(a) Neka je $(e) = \{1, t, t^2\}$. Vrijedi

$$\begin{aligned} A(1) &= 1 + t^2 \\ A(t) &= \lambda + t + t^2 \\ A(t^2) &= 2 + t, \end{aligned}$$

pa je $[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & \lambda & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 0 & \lambda - 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, iz čega slijedi

$$r(A) = r([A]_{(e)}) = \begin{cases} 2, \text{za } \lambda = 3 \\ 3, \text{za } \lambda \neq 3. \end{cases}$$

Iz teorema o rangu i defektu slijedi

$$d(A) = \begin{cases} 1, \text{za } \lambda = 3 \\ 0, \text{za } \lambda \neq 3. \end{cases}$$

Slika operatora A je

$$\mathrm{Im}A = [\{A(1), A(t), A(t^2)\}] = [\{1 + t^2, \lambda + t + t^2, 2 + t\}].$$

Baza za sliku je $\{1 + t^2, 2 + t\}$ za $\lambda = 3$. Ako je $\lambda \neq 3$, onda je A epimorfizam pa je jedna baza za sliku $\mathrm{Im}A = \mathcal{P}_2$ dana s $\{1, t, t^2\}$. Ako je $\lambda \neq 3$, onda je $d(A) = 0$ pa je $\mathrm{Ker}A = \{0\}$, a ako je $\lambda = 3$, onda je

$$A(a + bt + ct^2) = (a + 3b + 2c) + (b + c)t + (a + b)t^2$$

pa je $a + bt + ct^2 \in \mathrm{Ker}A$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned} a + 3b + 2c &= 0 \\ b + c &= 0 \\ a + b &= 0, \end{aligned}$$

odnosno $c = a$, $b = -a$. Dakle, za $\lambda = 3$ je $\mathrm{Ker}A = [\{1 - t + t^2\}]$.

(b) Za $\lambda \neq 3$ je A epimorfizam i monomorfizam, tj. izomorfizam. Za $\lambda = 3$ polinom q očito nije u jezgri operatora A jer je $\mathrm{Ker}A = [\{1 - t + t^2\}]$, a polinom p nije u slici operatora A jer je $\mathrm{Im}(p) = [\{1 + t^2, 2 + t\}]$.

Zadatak 3. (10 bodova) Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $V^3(O)$ i neka je $S : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ operator koji vektor prvo zrcali s obzirom na pravac zadan vektorom $\vec{i} - \vec{k}$, a potom njegovu sliku projicira na ravninu razapetu vektorima $\vec{i} + \vec{j}, \vec{k}$.

(a) (7 bodova) Operatoru S odredite matrični prikaz u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

(b) (3 boda) Postoji li baza (f) za $V^3(O)$ u kojoj S ima matrični prikaz

$$[S]_{(f)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}?$$

Rješenje.

(a) Ovaj zadatak se može riješiti koristeći formule koje smo izveli na nastavi, ali ćemo pokazati jednostavniji pristup u kojem koristimo matrice prijelaza. Označimo sa Z zrcaljenje s obzirom na pravac zadan vektorom $\vec{i} - \vec{k}$. Uočimo da je to vektor normale ravnine s jednadžbom $x = z$ i operator Z svaki vektor $\vec{v}$ te ravnine preslikava u vektor $-\vec{v}$. Odaberimo bazu $(a) = \{\vec{a_1}, \vec{a_2}, \vec{a_3}\}$, gdje je $\vec{a_1} = \vec{i} - \vec{k}$, $\vec{a_2} = \vec{j}$, $\vec{a_3} = \vec{i} + \vec{k}$. Tada je $Z(\vec{a_1}) = \vec{a_1}$, $Z(\vec{a_2}) = -\vec{a_2}$, $Z(\vec{a_3}) = -\vec{a_3}$ pa je

$$[Z]_{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Iz toga slijedi

$$[Z]_{(e)} = [I]_{(e,a)}[Z]_{(a)}[I]_{(a,e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Označimo s P projekciju na ravninu razapetu vektorima $\vec{i} + \vec{j}, \vec{k}$. Vektor normale te ravnine je $\vec{i} - \vec{j}$. Odaberimo bazu $(b) = \{\vec{b_1}, \vec{b_2}, \vec{b_3}\}$, gdje je $\vec{b_1} = \vec{i} + \vec{j}$, $\vec{b_2} = \vec{k}$, $\vec{b_3} = \vec{i} - \vec{j}$. Tada je $P(\vec{b_1}) = \vec{b_1}$, $P(\vec{b_2}) = \vec{b_2}$, $P(\vec{b_3}) = \vec{0}$ pa je

$$[P]_{(b)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Iz toga slijedi

$$[P]_{(e)} = [I]_{(e,b)}[P]_{(b)}[I]_{(b,e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$[S]_{(e)} = [P \circ Z]_{(e)} = [P]_{(e)}[Z]_{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(b) Iz (a) dijela zadatka vidimo da je $\mathrm{tr}A = \frac{-1}{2}$. Kako je

$$\mathrm{tr}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0,$$

zaključujemo da matrice $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nisu slične pa ne postoji baza (f) za $V^3(O)$ u kojoj S ima matrični prikaz

$$[S]_{(f)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 4. (10 bodova)

a) (3 boda) Linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan je svojom matricom u paru baza $(e) = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$, $(e') = \{(1,0,0),(1,1,1),(1,1,0)\}$ s

$$[A]_{(e',e)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix}.$$

Odredite matrični zapis operatora A u kanonskoj bazi, tj. odredite $[A]_{(e)}$.

b) (7 bodova) Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore ovog operatora te algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti. Može li se operator A dijagonalizirati? Ako se može dijagonalizirati, odredite $[A]_{(e)}^{2024}$.

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$[A]_{(e)} = [I]_{(e,e')}[A]_{(e',e)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -3 & -2 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Karakteristični polinom operatora A je

$$k_A(\lambda) = \det([A]_{(e)} - \lambda I) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & -2 & -2 \\ -1 & -3-\lambda & -2 \\ 2 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda(\lambda+1)^2,$$

odakle slijedi da je $\sigma(A) = \{0,-1\}$, $a(0) = 1$, $a(-1) = 2$. Odredimo sada svojstvene potprostore.

$\boxed{V_A(0)}$ Rješavamo $([A]_{(e)} - 0 \cdot I)x = 0$ i dobivamo $V_A(0) = [\{(-1,-1,2)\}]$. Dakle, $g(0) = 1$.

$\boxed{V_A(-1)}$ Rješavamo $([A]_{(e)} + I)x = 0$ i dobivamo $V_A(-1) = [\{(2,2,-3),(2,3,-4)\}]$. Dakle, $g(-1) = 2$.

Kako je $a(0) = g(0), a(-1) = g(-1)$ i $a(0) + a(-1) = \dim \mathbb{R}^3$, zaključujemo da se operator A može dijagonalizirati. Odaberimo bazu (a) koja se sastoji od svojstvenih vektora,

$$(a) = \{(-1,-1,2),(2,2,-3),(2,3,-4)\}.$$

Vrijedi

$$[A]_{(a)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Stoga je

$$\begin{aligned} [A]_{(e)}^{2024} &= ([I]_{(e,a)}[A]_{(a)}[I]_{(e,a)}^{-1})^{2024} = [I]_{(e,a)}[A]_{(a)}^{2024}[I]_{(e,a)}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Zadatak 5. (10 bodova)

(a) (7 bodova) Neka su V i W netrivijalni vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$ i $A : V \to W$ linearni operator. Koristeći teorem o rangu i defektu dokažite da je rang linearnog operatora A jednak rangu matričnog prikaza linearnog operatora A u bilo kojem paru baza.

(b) (3 boda) Neka je V netrivijalni konačnodimenzionalni vektorski prostor, $A \in L(V)$ i $(e), (e')$ dvije baze za vektorski prostor V. Jesu li matrice $[A]_{(e,e')}$ i $[A]_{(e)}$ nužno slične? Ako jesu, dokažite, a ako nisu, navedite kontraprimjer.

Rješenje.

(a) Vidjeti predavanja.

(b) Matrice $[A]_{(e,e')}$ i $[A]_{(e)}$ ne moraju biti slične. Uzmimo npr. $I \in L(\mathbb{R}^2)$, $(e) = \{(1,0),(0,1)\}$, $(e') = \{(1,0),(1,1)\}$. Tada je $[I]_{(e,e')} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, dok je $[I]_{(e)} = I$. Matrica I je slična samo samoj sebi pa $[I]_{(e,e')}$ i $[I]_{(e)}$ nisu slične.