

LINEARNA ALGEBRA 2

Četvrti ispitni rok - 7. rujna 2026.

ZADATAK 1

Za $\alpha \in \mathbb{R}$ zadan je linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^4)$ sa

$$A(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + 2x_4, 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4, x_3, x_1 + \alpha x_4).$$

- (a) (12 bodova) U ovisnosti o parametru α , odredite sliku, jezgru, rang i defekt od A .
(b) (8 bodova) Dokažite da se A ne može dijagonalizirati niti za jedan $\alpha \in \mathbb{R}$.

Rješenje:

- (a) Odredimo matricu operatora A u kanonskoj bazi (e) za $\mathbb{R}^4$:

$$A(e_1) = (1, 2, 0, 1)$$

$$A(e_2) = (0, 1, 0, 0)$$

$$A(e_3) = (0, 2, 1, 0)$$

$$A(e_4) = (2, 3, 0, \alpha)$$

Matrica operatora A je tada:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha \end{bmatrix}$$

Da bismo odredili rang operatora A , odredimo rang matrice M . Oduzimanjem dvostrukog prvog retka od drugog i oduzimanjem prvog retka od četvrtog dobivamo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha - 2 \end{bmatrix}$$

Razlikujemo dva slučaja:

- $\alpha \neq 2$

Retci dobivene matrice su linearno nezavisni, stoga je $r(A) = 4$. Iz teorema o rang i defektu slijedi da je $d(A) = 0$.

Kako je defekt nula, jezgra je trivijalna, tj. $\text{Ker } A = \{(0, 0, 0, 0)\}$.

Slika od A je $\mathbb{R}^4$.

- $\alpha = 2$

Četvrti redak dobivene matrice je nul-redak, pa je $r(A) = 3$, a $d(A) = 4 - 3 = 1$.

Rješavanjem sustava $Mx = 0$ dobivamo rješenje oblika $(-2t, t, 0, t)$, $t \in \mathbb{R}$, pa je

$$\text{Ker } A = [\{(-2, 1, 0, 1)\}].$$

Slika operatora razapeta je prvim trima linearno nezavisnim stupcima početne matrice M :

$$\text{Im } A = [\{(1, 2, 0, 1), (0, 1, 0, 0), (0, 2, 1, 0)\}]$$

- (b) Da bismo provjerili dijagonalizabilnost, izračunajmo karakteristični polinom operatora A :

$$k_A(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha - \lambda \end{vmatrix}$$

Razvijemo determinantu po trećem retku:

$$k_A(\lambda) = (1 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 0 & 2 \\ 2 & 1 - \lambda & 3 \\ 1 & 0 & \alpha - \lambda \end{vmatrix}$$

Zatim razvijemo preostalu determinantu po drugom stupcu:

$$k_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ 1 & \alpha - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)^2 ((1 - \lambda)(\alpha - \lambda) - 2)$$

Karakteristični polinom je oblika $k_A(\lambda) = (1 - \lambda)^2 P(\lambda)$. Vidimo da je $\lambda = 1$ svojstvena vrijednost algebarske kratnosti barem 2.

Da bi se operator A mogao dijagonalizirati, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda = 1$ mora biti jednaka njenoj algebarskoj kratnosti (dakle, $d(A - I) \geq 2$). Izračunajmo geometrijsku kratnost:

$$M - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \alpha - 1 \end{bmatrix}$$

Lako se vidi da je rang matrice $r(M - I) = 3$ za sve $\alpha \in \mathbb{R}$. Defekt te matrice, koji ujedno predstavlja geometrijsku kratnost svojstvene vrijednosti $\lambda = 1$, je

$$d(M - I) = 4 - 3 = 1$$

Budući da je geometrijska kratnost strogo manja od algebarske kratnosti, linearni operator A se ne može dijagonalizirati za niti jedan $\alpha \in \mathbb{R}$.

ZADATAK 2

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom zadana je baza $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$, gdje su $b_1 = (1, 1, 1)$, $b_2 = (1, 0, -1)$, $b_3 = (1, -2, 1)$.

- (a) (6 bodova) Odredite dualnu bazu $(b^*) = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$.
- (b) (10 bodova) Operator $T \in L(\mathbb{R}^3)$ u bazi (b) ima matrični prikaz

$$T(b) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Odredite matrični prikaz $T^*(b)$.

(c) (4 boda) Je li operator T hermitski? Obrazložite odgovor.

ZADATAK 3

Na prostoru $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ zadan je skalarni produkt

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(t)q(t) dt.$$

Neka je $M = \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) \leq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

(a) (8 bodova) Odredite $M^\perp$.

(b) (6 bodova) Odredite ortogonalni projektor na M , tj. odredite $P_M(a + bt + ct^2)$ za proizvoljne $a, b, c \in \mathbb{R}$.

(c) (6 bodova) Odredite najbolju aproksimaciju polinoma

$$p(t) = 1 + t + t^2$$

elementima iz M i udaljenost $d(p, M)$.

Rješenje: Budući da je

$$M = \mathcal{P}_1(\mathbb{R}) = \{a + bt : a, b \in \mathbb{R}\} = [\{1, t\}],$$

vrijedi

$$M^\perp = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : \langle p, 1 \rangle = 0, \langle p, t \rangle = 0\}.$$

(a) Neka je

$$p(t) = a + bt + ct^2 \in M^\perp.$$

Tada mora vrijediti

$$\langle p, 1 \rangle = \int_{-1}^1 (a + bt + ct^2) dt = 2a + \frac{2}{3}c = 0$$

i

$$\langle p, t \rangle = \int_{-1}^1 (at + bt^2 + ct^3) dt = \frac{2}{3}b = 0.$$

Slijedi

$$b = 0, \quad a = -\frac{c}{3}.$$

Prema tome,

$$p(t) = c \left(t^2 - \frac{1}{3} \right),$$

pa je

$$M^\perp = \left[\left\{ t^2 - \frac{1}{3} \right\} \right].$$

(b) Neka je

$$p(t) = a + bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$$

Ortogonalna projekcija $P_M p$ je polinom oblika

$$P_M p = \alpha + \beta t$$

takav da vrijedi

$$p - P_M p \in M^\perp.$$

Dakle,

$$\langle p - (\alpha + \beta t), 1 \rangle = 0$$

i

$$\langle p - (\alpha + \beta t), t \rangle = 0.$$

Iz prvog uvjeta dobivamo

$$\int_{-1}^1 ((a - \alpha) + (b - \beta)t + ct^2) dt = 0,$$

odnosno

$$2(a - \alpha) + \frac{2}{3}c = 0,$$

pa je

$$\alpha = a + \frac{c}{3}.$$

Iz drugog uvjeta dobivamo

$$\int_{-1}^1 ((a - \alpha)t + (b - \beta)t^2 + ct^3) dt = 0,$$

odnosno

$$\frac{2}{3}(b - \beta) = 0,$$

pa je

$$\beta = b.$$

Stoga je

$$\boxed{P_M(a + bt + ct^2) = a + \frac{c}{3} + bt}.$$

(c) Najbolja aproksimacija polinoma

$$p(t) = 1 + t + t^2$$

elementima iz M jednaka je njegovoj ortogonalnoj projekciji na M . Prema (b) vrijedi

$$P_M p(t) = 1 + \frac{1}{3} + t = \boxed{\frac{4}{3} + t}.$$

Udaljenost polinoma p od potprostora M jednaka je

$$d(p, M) = \|p - P_M p\|.$$

Kako je

$$p(t) - P_M p(t) = t^2 - \frac{1}{3},$$

dobivamo

$$d(p, M)^2 = \left\langle t^2 - \frac{1}{3}, t^2 - \frac{1}{3} \right\rangle = \int_{-1}^1 \left(t^2 - \frac{1}{3} \right)^2 dt.$$

Računamo:

$$\int_{-1}^1 \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9} \right) dt = \frac{2}{5} - \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{9} \cdot 2 = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

Prema tome,

$$d(p, M) = \sqrt{\frac{8}{45}} = \frac{2\sqrt{10}}{15}.$$

OKRENITE LIST

ZADATAK 4

(20 bodova) Svedite formu $q(x, y, z) = -8x^2 - 7y^2 - 3z^2 + 12xy + 4xz - 8yz$ na kanonski oblik, odredite joj definitnost te zapišite nove koordinate pomoću starih.

Rješenje: Za matricu $A = \begin{bmatrix} -8 & 6 & 2 \\ 6 & -7 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix}$ i vektor $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ vrijedi $q(x, y, z) = \langle Av, v \rangle$.

Izračunamo karakteristični polinom matrice A :

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -8 - \lambda & 6 & 2 \\ 6 & -7 - \lambda & -4 \\ 2 & -4 & -3 - \lambda \end{vmatrix}$$

Razvojem determinante dobivamo:

$$k_A(\lambda) = -\lambda^3 - 18\lambda^2 - 45\lambda = -\lambda(\lambda^2 + 18\lambda + 45) = -\lambda(\lambda + 3)(\lambda + 15)$$

Spektar matrice je $\sigma(A) = \{0, -3, -15\}$. Budući da su sve svojstvene vrijednosti manje ili jednake nuli, forma je **negativno semidefinitna**.

Odredimo pripadne svojstvene potprostore:

Za $\lambda_1 = 0$:

$$(A - 0I)v = 0 \implies \begin{bmatrix} -8 & 6 & 2 \\ 6 & -7 & -4 \\ 2 & -4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies v \in \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} \right\} \right]$$

$$v_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_1 := \frac{1}{\|v_1\|} v_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Za $\lambda_2 = -3$:

$$(A + 3I)v = 0 \implies \begin{bmatrix} -5 & 6 & 2 \\ 6 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies v \in \left[\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\} \right]$$

$$v_2 := \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_2 := \frac{1}{\|v_2\|} v_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

Za $\lambda_3 = -15$:

$$(A + 15I)v = 0 \implies \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ 6 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies v \in \left[\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\} \right]$$

$$v_3 := \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \hat{v}_3 := \frac{1}{\|v_3\|} v_3 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Vektori $\hat{v}_1$, $\hat{v}_2$ i $\hat{v}_3$ su ortonormirani, pa je matrica prijelaza iz kanonske baze u bazu $\{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$ ortogonalna. Ako označimo

$$Q = [\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3] = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -15 \end{bmatrix},$$

vrijedi $A = QDQ^T$. Uvođenjem supstitucije za nove koordinate $w = Q^T v$:

$$w = \begin{bmatrix} \frac{1}{3}x + \frac{2}{3}y - \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{2}{3}z \\ \frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{1}{3}z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ s \\ k \end{bmatrix}$$

Forma zapisana u kanonskom obliku glasi:

$$q(x, y, z) = \langle Av, v \rangle = \langle DQ^T v, Q^T v \rangle = 0r^2 - 3s^2 - 15k^2$$

ZADATAK 5

Neka je V realan unitaran prostor konačne dimenzije, te $A \in L(V)$ takav da je:

$$r(A - 2I) = 1 \quad \text{i} \quad k_A(\lambda) = -(\lambda - 2)^2(\lambda - 3).$$

- a) (4 boda) Odredite dimenziju od V i spektar od A .
- b) (8 bodova) Može li se A dijagonalizirati?
- c) (8 bodova) Ako za sve $x \in \text{Ker}(A - 2I)$ i $y \in \text{Ker}(A - 3I)$ vrijedi

$$\|x + y\| = \|x - y\|,$$

gdje je norma inducirana skalarnim produktom, je li A hermitski?

Rješenje:

- a) Realan λ_0 je u spektru ako i samo je nultočka karakterističnog polinoma, a njegov stupanj je dimenzija od V . Dakle $\sigma(A) = \{2, 3\}$ i $\dim V = 3$.
- c) Prema Teoremu o rangu i defektu, geometrijska kratnost svojstvene vrijednosti 2 je

$$g(2) = d(A - 2I) = \dim V - r(A - 2I) = 3 - 1 = 2.$$

Suma geometrijskih kratnosti svojstvenih vrijednosti je

$$\dim V = 3 = 2 + 1 \leq g(2) + g(3) \leq \dim V,$$

pa je A dijagonalizabilan.

d) Pokažimo da su x i y okomiti. Kvadriranjem početne jednakosti imamo

$$\begin{aligned}\langle x + y, x + y \rangle &= \langle x - y, x - y \rangle \\ ||x||^2 + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + ||y||^2 &= ||x||^2 - \langle x, y \rangle - \langle y, x \rangle + ||y||^2 \\ 2\langle x, y \rangle &= -2\langle x, y \rangle \\ \langle x, y \rangle &= 0\end{aligned}$$

Neka je $\{e_1, e_2\}$ ortonormirana baza za svojstveni protprostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 2, te $\{e_3\}$ ortonormirana baza za svojstveni protprostor koji odgovara svojstvenoj vrijednosti 3, tada je $\{e_1, e_2, e_3\}$ ONB za V . A je hermitski jer je

$$(A^*)_e = (A_e)^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} = A_e.$$