LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij – 27. siječnja 2025.

Zadatak 1. (10 bodova) Za linearne operatore $A, B \in L(\mathcal{P}^2)$ vrijedi

$$A(1) = x^2 + 1, \quad A(3x^2 - 2x) = 22 - 2x, \quad A(x^2 + 5) = 5x^2 + 13$$
$$B(x^2) = 8, \quad B(2 + x) = 2x^2 + x + 3, \quad B(x^2 + x) = ax^2 + bx + c.$$

Postoje li relni brojevi a, b, c, takvi da je $A = B$? Ako postoje, odredite ih, a ako ne postoje, obrazložite zašto ne postoje.

Rješenje. Odredimo kako operator A djeluje na bazi $\{x^2, 2 + x, x^2 + x\}$ za $\mathcal{P}^2$. Vrijedi:

$$\begin{aligned}
A(x^2) &= A(x^2 + 5) - 5A(1) = 5x^2 + 13 - 5(x^2 + 1) = 8 = B(x^2) \\
A(x) &= \frac{-1}{2}(A(3x^2 - 2x) - 3A(x^2)) = \frac{-1}{2}(22 - 2x - 24) = x + 1 \\
A(2 + x) &= 2A(1) + A(x) = 2(x^2 + 1) + x + 1 = 2x^2 + x + 3 = B(2 + x) \\
A(x^2 + x) &= A(x^2) + A(x) = 8 + x + 1 = x + 9.
\end{aligned}$$

Budući da se A i B podudaraju na dva elementa baze $\{x^2, 2 + x, x^2 + x\}$, da bi vrijedilo $A = B$, nužno je i dovoljno da vrijedi $A(x^2 + x) = B(x^2 + x)$, odnosno $x + 9 = ax^2 + bx + c$. Dakle, $A = B$ ako i samo ako je $a = 0, b = 1, c = 9$.

Uočite da ste isti rezultat mogli dobiti koristeći matrični zapis. Uvedemo li oznaku $(e) = \{1, x, x^2\}$, $(f) = \{x^2, 2 + x, x^2 + x\}$, $(g) = \{1, 3x^2 - 2x, x^2 + 5\}$, , onda je

$$[A]_{(e,f)} = [A]_{(e,g)}[I]_{(g,e)}[I]_{(e,f)} = \begin{bmatrix} 1 & 22 & 13 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Nadalje,

$$[B]_{(e,f)} = \begin{bmatrix} 8 & 3 & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 2 & a \end{bmatrix}$$

Da bi vrijedilo $A = B$, nužno i dovoljno je da vrijedi $[A]_{(e,f)} = [B]_{(e,f)}$, a to je ispunjeno ako i samo ako je $a = 0, b = 1, c = 9$.

Zadatak 2. (8 bodova) Zadan je operator $A \in \mathcal{P}_1 \to \mathcal{P}_2$ s

$$A(at+b) = (a-b)t^2 - bt + a.$$

(a) (2 boda) Odredite matrični zapis linearnog operatora A u paru baza $(e) = \{1, t\}$ i $(f) = \{1, t, t^2\}$.

(b) (6 bodova) Odredite matrični zapis linearnog operatora A u paru baza $(e') = \{1+t, t\}$ i $(f') = \{1+t-t^2, 1+t^2, 1+t\}$.

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\begin{aligned} A(1) &= -t^2 - t \\ A(t) &= t^2 + 1 \end{aligned}$$

pa je $[A]_{(f,e)} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

(b) Dalje imamo

$$[A]_{(f',e')} = [I]_{(f',f)}[A]_{(f,e)}[I]_{(e,e')} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \\ -3 & 0 \end{bmatrix}.$$

Zadatak 3. (10 bodova) Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ ortonormirana baza prostora $V^3(O)$ i neka je $S : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ operator koji vektor prvo projicira na ravninu s jednadžbom $y-3z = 0$, a potom njegovu sliku rotira za kut od $90°$ oko osi z.

(a) (6 bodova) Operatoru S odredite matrični prikaz u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

(b) (4 boda) Odredite jezgru operatora S. Je li S monomorfizam? Obrazložite odgovor.

Rješenje.

(a) Označimo s P linearni operator projekcije na ravninu s jednadžbom $y - 3z = 0$, a s R operator rotacije za kut od $90°$ oko osi z. Koristeći formule izvedene na vježbama, imamo $P(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}$, gdje je $\vec{n}$ jedinični vektor normale ravnine s jednadžbom $y - 3z = 0$, odnosno $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{10}}(\vec{j} - 3\vec{k})$. Sada je

$$
\begin{aligned}
P(\vec{i}) &= \vec{i} - (\vec{i} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{i} \\
P(\vec{j}) &= \vec{j} - (\vec{j} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{j} - \frac{1}{10}(\vec{j} - 3\vec{k}) = \frac{9}{10}\vec{j} + \frac{3}{10}\vec{k} \\
P(\vec{k}) &= \vec{k} - (\vec{k} \cdot \vec{n})\vec{n} = \vec{k} - \frac{-3}{10}(\vec{j} - 3\vec{k}) = \frac{3}{10}\vec{j} + \frac{1}{10}\vec{k},
\end{aligned}
$$

odnosno

$$
[P]_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{9}{10} & \frac{3}{10} \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.
$$

Matrični prikaz rotacije je

$$
[R]_{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},
$$

jer je $R(\vec{i}) = \vec{j}$, $R(\vec{j}) = -\vec{i}$, $R(\vec{k}) = \vec{k}$. Istu matricu možemo dobiti i uvrštavajući kut od $90°$ u formulu izvedenu na vježbama. Sada je

$$
[S]_{(e)} = [R \circ P]_{(e)} = [R]_{(e)}[P]_{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{9}{10} & -\frac{3}{10} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{bmatrix}.
$$

(b) Jezgru operatora možemo odrediti računski iz definicije jezgre, rješavajući homogeni sustav jednadžbi, a možemo i uz vrlo malo računa, na sljedeći način.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(S) &= \{\vec{v} \in V^3(0) : S(\vec{v}) = \vec{0}\} = \{\vec{v} \in V^3(0) : R(P(\vec{v})) = \vec{0}\} \\
&= \{\vec{v} \in V^3(0) : P(\vec{v}) \in \mathrm{Ker}R = \{\vec{0}\}\} = \mathrm{Ker}P.
\end{aligned}
$$

Vektor $\vec{v}$ je u $\mathrm{Ker}P$ ako i samo ako je $\vec{v}$ kolinearan s vektorom $\vec{n}$ (jer je to vektor smjera pravca normale zadane ravnine). Stoga je $\mathrm{Ker}(S) = [\{\vec{j} - 3\vec{k}\}] \neq \{\vec{0}\}$ pa S nije monomorfizam.

Zadatak 4. (12 bodova)

a) (10 bodova) Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je svojom matricom u kanonskoj bazi

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore linearnog operatora A te algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti. Može li se operator A dijagonalizirati? Ako se može dijagonalizirati, odredite $[A]_{(e)}^{2025}$.

b) (2 boda) Postoji li baza (e') od $\mathbb{R}^3$ takva da je

$$[A]_{(e')} = \begin{bmatrix} \frac{-1+\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\ 2 & \frac{-1-\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}?$$

Obrazložite odgovor.

Rješenje.

(a) Karakteristični polinom operatora A je

$$k_A(\lambda) = \det([A]_{(e)} - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -4 & -2 \\ 2 & -3-\lambda & -2 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2,$$

odakle slijedi da je $\sigma(A) = \{1, -1\}$, $a(1) = 2$, $a(-1) = 1$. Odredimo sada svojstvene potprostore.

$\boxed{V_A(-1)}$ Rješavamo $([A]_{(e)} - (-1) \cdot I)x = 0$ i dobivamo $V_A(-1) = [\{(1,1,0)\}]$. Dakle, $g(-1) = 1$.

$\boxed{V_A(1)}$ Rješavamo $([A]_{(e)} - I)x = 0$ i dobivamo $V_A(1) = [\{(1,0,1),(0,1,-2)\}]$. Dakle, $g(1) = 2$.

Kako je $a(1) = g(1), a(-1) = g(-1)$ i $a(1) + a(-1) = \dim \mathbb{R}^3$, zaključujemo da se operator A može dijagonalizirati. Odaberimo bazu (a) koja se sastoji od svojstvenih vektora,

$$(a) = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,-2)\}.$$

Vrijedi

$$[A]_{(a)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stoga je

$$
\begin{aligned}
[A]_{(e)}^{2025} &= ([I]_{(e,a)}[A]_{(a)}[I]_{(e,a)}^{-1})^{2025} = [I]_{(e,a)}[A]_{(a)}^{2025}[I]_{(e,a)}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 3 & -4 & -2 \\ 2 & -3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

(b) Ukoliko postoji takva baza (e'), onda su $[A]_e$ i $[A]_{e'}$ slične matrice pa te matrice moraju imati isti rang, trag, determinatnu i karakteristični polinom (ovo su nužni, ne i dovoljni uvjeti). Iako im se rang, trag i determinanta podudaraju, matrice ipak nisu slične jer je

$$k_{[A]_{(e)}}(\lambda) = -(\lambda+1)(\lambda-1)^2,\ k_{[A]_{(e')}}(\lambda) = -\left(\lambda - \frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)\left(\lambda - \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)(\lambda-2)$$

pa je $k_{[A]_{(e)}}(\lambda) \neq k_{[A]_{(e')}}(\lambda)$, što znači da matrice $[A]_{(e)}$ i $[A]_{(e')}$ nisu slične.

Zadatak 5. (10 bodova)

(a) (7 bodova) Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem, $A : V \to W$ linearni operator i (e) i (f) baze za V, odnosno W. Dokažite da za svaki $x \in V$ vrijedi

$$[A(x)]_{(f)} = [A]_{(f,e)}[x]_{(e)}.$$

(b) (3 boda) Može li linearni operator $B : \mathcal{P}_1 \to \mathbb{R}^3$ biti epimorfizam? Može li biti monomorfizam? Ako može, nađite primjer takvog operatora. Obrazložite odgovore.

Rješenje.

(a) Vidjeti predavanja.

(b) Ako je B epimorfizam, onda je $r(B) = \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ pa je po teoremu o rangu i defektu $d(B) = \dim\mathcal{P}_1 - r(B) = 2 - 3 = -1$, što nije moguće pa B ne može biti epimorfizam.

S druge strane, B može biti monomorfizam, npr.

$$B(at + b) = (a, b, 0),\ a, b \in \mathbb{R}$$

je monomorfizam iz $\mathcal{P}_1$ u $\mathbb{R}^3$.