

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 17. studenog 2025.

Zadatak 1. (12 bodova) Postoje li parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ za koje je preslikavanje $s : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ zadano s

$$s(x, y) = x_1y_1 + \alpha x_2y_3 - 2\beta x_3y_2 + x_4y_4$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^4$? Ako postoje, odredite sve takve parametre.

Rješenje. Da bi preslikavanje s bilo skalarni produkt, ono mora zadovoljavati svojstvo hermitske simetričnosti, tj. $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^4$. To će svojstvo vrijediti ako i samo ako je

$$x_1y_1 + \alpha x_2y_3 - 2\beta x_3y_2 + x_4y_4 = y_1x_1 + \alpha y_2x_3 - 2\beta y_3x_2 + y_4x_4,$$

odnosno ako i samo ako je

$$\alpha(x_2y_3 - x_3y_2) - 2\beta(x_3y_2 - x_2y_3) = 0,$$

tj. ako i samo ako je

$$(x_2y_3 - x_3y_2)(\alpha + 2\beta) = 0.$$

Da bi posljednja jednakost vrijedila za sve $x, y \in \mathbb{R}^4$, nužno je $\alpha + 2\beta = 0$. Ukoliko bi vrijedilo $\alpha + 2\beta \neq 0$, onda, da bi vrijedilo $s(y, x) = \overline{s(x, y)}$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^4$, mora biti $x_2y_3 - x_3y_2 = 0$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^4$, a to očito nije istina (kontraprimjer: $x = (0, 1, 0, 0)$, $y = (0, 1, 1, 0)$). Dakle, da s zadovoljava svojstvo hermitske simetričnosti mora vrijediti $\alpha + 2\beta = 0$, tj. $\alpha = -2\beta$.

Ukoliko je $\alpha = -2\beta$, preslikavanje s glasi

$$s(x, y) = x_1y_1 - 2\beta(x_2y_3 + x_3y_2) + x_4y_4.$$

Preslikavanje s mora biti pozitivno definitno kako bi bilo skalarni produkt, tj. izraz

$$\begin{aligned} s(x, x) &= x_1^2 - 2\beta(x_2x_3 + x_3x_2) + x_4^2 \\ &= x_1^2 - 4\beta x_2x_3 + x_4^2 \end{aligned}$$

mora biti nenegativan za sve $x \in \mathbb{R}^4$. Razlikujemo slučajeve u ovisnosti o β .

1. *slučaj* Ako je $\beta < 0$, onda za $x = (0, -1, 1, 0)$ dobijemo

$$s(x, x) = -4\beta \cdot (-1) \cdot 1 = 4\beta < 0$$

pa s nije skalarni produkt.

2. *slučaj* Ako je $\beta > 0$, onda za $x = (0, 1, 1, 0)$ dobijemo

$$s(x, x) = -4\beta \cdot 1 \cdot 1 = -4\beta < 0$$

pa s nije skalarni produkt.

3. *slučaj* Ako je $\beta = 0$, onda dobivamo

$$s(x, x) = x_1^2 + x_4^2.$$

Da bi preslikavanje s bilo pozitivno definitno treba još zadovoljavati

$$s(x, x) = x_1^2 + x_4^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x = (0, 0, 0, 0).$$

Izraz $s(x, x) = 0$ bit će zadovoljen za sve $x \in \mathbb{R}^4$ oblika $x = (0, a, b, 0)$ pa gornja ekvivalencija ne vrijedi (uzmimo npr. $x = (0, 1, 1, 0) \neq (0, 0, 0, 0)$).

Dakle, ne postoje parametri $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tako da je preslikavanje s skalarni produkt.

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 17. studenog 2025.

Zadatak 2. (7 bodova)

(a) Neka je V realan unitaran prostor i neka su $x, y \in V$. Dokažite da vrijede sljedeće tvrdnje:

(a1) (2 boda) $\|x\| = \|y\|$ ako i samo ako je $\langle x + y | x - y \rangle = 0$.

(a2) (2 boda) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ako i samo ako je $\langle x | y \rangle = 0$.

(b) (3 boda) Dokažite da za svaka tri realna broja $a, b, c \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$(-a + 2b + 3c)^2 \leq 5a^2 + a^2c^2 + 5b^2 + b^2c^2 + 9c^2 + 45.$$

Rješenje.

(a1) Raspisivanjem skalarnog produkta dobivamo

$$\langle x + y | x - y \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x | x \rangle - \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle - \langle y | y \rangle = 0.$$

Kako je V realan unitaran prostor, tada je $\langle x | y \rangle = \langle y | x \rangle$ pa vrijedi

$$\langle x + y | x - y \rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle x | x \rangle = \langle y | y \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \|x\|^2 = \|y\|^2 \quad \Leftrightarrow \quad \|x\| = \|y\|.$$

(a2) Raspisivanjem norme dobivamo

$$\|x + y\|^2 = \langle x + y | x + y \rangle = \langle x | x \rangle + \langle x | y \rangle + \langle y | x \rangle + \langle y | y \rangle = \|x\|^2 + 2\langle x | y \rangle + \|y\|^2.$$

Zaključujemo da je $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$ ako i samo ako je $\langle x | y \rangle = 0$.

(b) Desna strana jednaka je

$$5a^2 + a^2c^2 + 5b^2 + b^2c^2 + 9c^2 + 45 = 5(a^2 + b^2 + 9) + c^2(a^2 + b^2 + 9) = (a^2 + b^2 + 9)(5 + c^2).$$

Primjenom nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog na vektore $(a, b, 3)$ i $(-1, 2, c)$ dobivamo

$$|\langle (a, b, 3) | (-1, 2, c) \rangle|^2 \leq \langle (a, b, 3) | (a, b, 3) \rangle \langle (-1, 2, c) | (-1, 2, c) \rangle,$$

tj.

$$(-a + 2b + 3c)^2 \leq (a^2 + b^2 + 9)(1 + 4 + c^2) = 5a^2 + a^2c^2 + 5b^2 + b^2c^2 + 9c^2 + 45.$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 17. studenog 2025.

Zadatak 3. (10 bodova) U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom

$$\langle p | q \rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx, \quad p, q \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$$

dan je skup $M = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : \frac{1}{6}p'''(x) - p(0) = 0, p(x) = -p(-x) \forall x \in \mathbb{R}\}$.

- (a) (4 boda) Dokažite da je M potprostor od $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ i odredite mu jednu bazu.
- (b) (3 boda) Odredite ortogonalni komplement potprostora M .
- (c) (3 boda) Prikažite vektor $p = x^3 + 2x + 1$ kao zbroj vektora iz M i $M^\perp$.

Rješenje.

- (a) Neka je $p \in M$, $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Iz definicije skupa M slijedi da je

$$0 = \frac{1}{6}p'''(x) - p(0) = a - d$$

i

$$bx^2 + d = 0$$

za svaki $x \in \mathbb{R}$. Iz toga slijedi da je $a = b = d = 0$, pa je M vektorski prostor dimenzije 1 s bazom $\{a_1\}$, gdje je $a_1(x) = x$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

- (b) Neka je $q \in M^\perp$, $q(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Iz toga slijedi da je

$$0 = \langle q | a_1 \rangle = \frac{1}{5}a + \frac{1}{4}b + \frac{1}{3}c + \frac{1}{2}d.$$

Prostor rješenja ove jednadžbe dan je kao linearna ljuska skupa

$$\left\{ (1, 0, 0, -\frac{2}{5}), (0, 1, 0, -\frac{1}{2}), (0, 0, 1, -\frac{2}{3}) \right\},$$

pa je $\{a_2, a_3, a_4\}$ baza $M^\perp$, gdje su $a_2(x) = x^3 - \frac{2}{5}$, $a_3(x) = x^2 - \frac{1}{2}$, $a_4(x) = x - \frac{2}{3}$ za svaki $x \in \mathbb{R}$.

(c) Vektor p trebamo prikazati kao $p = p_M + p_{M^\perp}$, gdje je $p_M \in M$ i $p_{M^\perp} \in M^\perp$. Neka je

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}.$$

S vježbi znamo da je

$$p_M = \langle p | e_1 \rangle e_1 = \frac{41\sqrt{3}}{30} e_1 = \frac{41}{10} x,$$

pa je

$$p_{M^\perp} = p - p_M = x^3 - \frac{21}{10}x + 1.$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 17. studenog 2025.

Zadatak 4. (8 bodova) Zadane su točke $T_1 = (-3, -8)$, $T_2 = (-1, -2)$, $T_3 = (1, 24)$, $T_4 = (3, 10)$. Koristeći ortogonalnu projekciju, odredite jednadžbu pravca $y = kx + l$ koji najbolje aproksimira dane točke.

Rješenje. Želimo minimizirati funkciju $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(k, l) = \sum_{i=1}^4 (y_i - (kx_i + l))^2 = (-8 - (-3k + l))^2 + (-2 - (-k + l))^2 + (24 - (k + l))^2 + (10 - (3k + l))^2.$$

Uočimo da je

$$f(k, l) = d((-8, -2, 24, 10), (-3k + l, -k + l, k + l, 3k + l))^2$$

za proizvoljne $k, l \in \mathbb{R}$. Neka je

$$M = \{(-3k + l, -k + l, k + l, 3k + l) : k, l \in \mathbb{R}\}.$$

Očito je $\{(-3, -1, 1, 3), (1, 1, 1, 1)\}$ baza vektorskog prostora M . Dakle, trebamo odrediti ortogonalnu projekciju vektora $x = (-8, -2, 24, 10)$ na M . Gram-Schmidtovim postupkom dobijemo da je

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{20}}(-3, -1, 1, 3), \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1) \right\}$$

ortonormirana baza vektorskog prostora M . Označimo te vektore redom e_1 i e_2 . Stoga, dobijemo da je ortogonalna projekcija vektora x na M

$$x_M = \langle x | e_1 \rangle e_1 + \langle x | e_2 \rangle e_2 = 4(-3, -1, 1, 3) + 6(1, 1, 1, 1).$$

Iz toga slijedi da je $k = 4$, a $l = 6$, pa je $y = 4x + 6$ jednadžba pravca koji najbolje aproksimira dane točke.

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij – 17. studenog 2025.

Zadatak 5. (13 bodova)

- a) (5 bodova) Neka su vektori $a, b, c \in \mathbb{R}^3$, gdje je $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}}(x, 2, y)$, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}(z, s, 3)$ i neka je njihova Gramova matrica

$$G(a, b, c) = \begin{bmatrix} t & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}.$$

Odredite x, y, z, s, t . Obrazložite odgovor.

- b) (8 bodova) Zadana je matrica $A \in M_3(\mathbb{R})$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 0 & 5 \\ -2 & 7 & 1 \end{bmatrix}$$

Koristeći ortogonalnu projekciju, minimizirajte izraz

$$\text{tr}((A - B)(A - B)^t),$$

pri čemu je B antisimetrična matrica u $M_3(\mathbb{R})$. Odgovor detaljno obrazložite.

Rješenje.

- (a) Najprije uočimo da je

$$\langle a | a \rangle = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \mid \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) \right\rangle = \frac{1}{3}(1^2 + 1^2 + 1^2) = 1,$$

iz čega slijedi $t = \langle a | a \rangle = 1$.

Uočimo da vrijedi $|\langle a | b \rangle|^2 = \langle a | a \rangle \langle b | b \rangle = 4$. Iz CSB nejednakosti slijedi da su a i b linearno zavisni vektori. Kako je $a \neq (0, 0, 0)$, postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $b = \lambda a$. Iz $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $b = \frac{1}{\sqrt{3}}(x, 2, y)$ slijedi da je $\lambda = 2$, iz čega slijedi $x = y = 2$.

Na sličan način vidimo da vrijedi $|\langle a | c \rangle|^2 = \langle a | a \rangle \langle c | c \rangle = 9$. Iz CSB nejednakosti slijedi da su a i c linearno zavisni vektori. Kako je $a \neq (0, 0, 0)$, postoji $\mu \in \mathbb{R}$ takav da je $c = \mu a$. Iz $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$, $c = \frac{1}{\sqrt{3}}(z, s, 3)$ slijedi da je $\mu = 3$, iz čega slijedi $z = s = 3$.

(b) Primijetimo da je

$$\operatorname{tr}((A - B)(A - B)^T) = \|A - B\|^2,$$

gdje je $\|\cdot\|$ norma definirana s

$$\|X\| = \sqrt{\langle X | X \rangle}, \quad \langle X | Y \rangle = \operatorname{tr}(XY^T).$$

Dakle, tražimo antisimetričnu matricu B za koju je udaljenost $\|A - B\|$ najmanja, tj. tražimo ortogonalnu projekciju matrice A na potprostor svih antisimetričnih matrica.

Opći oblik antisimetrične matrice u $M_3(\mathbb{R})$ je

$$\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Jedna baza tog potprostora L je dana s

$$A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Gram-Schmidtovim postupkom dobijemo ortonormiranu bazu

$$E_i = \frac{1}{\sqrt{2}} A_i, \quad i = 1, 2, 3.$$

Ortogonalna projekcija dana je formulom

$$A_L = \langle A | E_1 \rangle E_1 + \langle A | E_2 \rangle E_2 + \langle A | E_3 \rangle E_3 = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Stoga je najmanja vrijednost izraza $\operatorname{tr}((A - B)(A - B)^t)$ jednaka $\|A - A_L\|^2 = 81$.