Linearna algebra 2, 2020./2021.

1. domaća zadaća

1. Neka je preslikavanje $A : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ zadano kao $A(p) = (\int_0^1 p(t)dt, p(0))$. Provjerite linearnost od A, te odredite $A(M)$, gdje je $M = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p'(1) = 0\}$.

2. Postoji li linearni operator sa zadanim svojstvom:

   (a) $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\operatorname{Ker} A = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 : x_1 x_2 x_3 = 0\}$,

   (b) $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\operatorname{Im} A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \geq 1\}$,

   (c) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ takav da je $\operatorname{Ker} A = \left[\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 x_2 x_3 = 0\}\right]$,

   (d) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\operatorname{Im} A = \left[\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 = 1, x_3 = 0\}\right]$?

   Ako postoji, nađite primjer takvog linearnog operatora, ako ne postoji, obrazložite zašto.

3. Odredite matrični prikaz linearnog operatora $A : \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R}), (Ap)(t) = p'(t) + p(t+1)$ u kanonskoj bazi za $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, te iz tog prikaza odredite je li A monomorfizam/epimorfizam/izomorfizam. Zatim odredite jezgru i sliku od A.

4. Neka su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem. Dokažite:

   (a) Postoji epimorfizam $A \in L(V, W)$ ako i samo ako je $\dim V \geq \dim W$.

   (b) Postoji monomorfizam $A \in L(V, W)$ ako i samo ako je $\dim V \leq \dim W$.

   (c) Postoji izomorfizam $A \in L(V, W)$ ako i samo ako je $\dim V = \dim W$.

5. Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te $\{B_{ij} : i, j = 1, \ldots, n\}$ neka baza za $L(V)$. Pretpostavimo da je $S \in L(V)$ takav da je $SB_{ij} = B_{ij}S$ za sve $i, j = 1, \ldots, n$. Dokažite da je $S = \lambda I_V$ za neki $\lambda \in \mathbb{F}$.