Linearna algebra 2 - nastavnički smjer vježbe

uredila: Ana Prlić

Sadržaj

Poglavlje 1

Ponavljanje

***Zadatak* 1.1.** Za sljedeće skupove provjerite jesu li vektorski potprostori zadanog vektorskog prostora. Ako jesu, odredite im dimenziju i po jednu bazu.

a) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0,\ x_1 - 2x_2 - x_4 = 0\} \subset \mathbb{R}^4$

b) $L = \{(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4 : z_1 + iz_4 = z_2 + z_3\} \subset \mathbb{C}^4$.

c) $K = \{A \in M_2(\mathbb{R}) \, : \, AB = A,\ \mathrm{tr}(A) = 0\} \subset M_2(\mathbb{R})$, gdje je $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje:

a) Uočimo da je $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in M$ ako i samo ako vrijedi $x_4 = x_1 - 2x_2$ i $x_3 = -x_1 + x_2 - x_4$, tj. ako i samo ako je $x_4 = x_1 - 2x_2$ i $x_3 = -2x_1 + 3x_2$. Stoga je

$$M = \{(x_1, x_2, -2x_1 + 3x_2, x_1 - 2x_2) : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\} = [\{(1, 0, -2, 1), (0, 1, 3, -2)\}].$$

Dakle M je potprostor od $\mathbb{R}^4$, a skup $\{(1, 0, -2, 1), (0, 1, 3, -2)\}$ je njegov skup izvodnica. Budući da je taj skup ujedno i linearno nezavisan (provjerite za zadaću), on je baza potprostora M pa je $\dim M = 2$.

b) Uočimo da je

$$L = \{(z_2 + z_3 - iz_4, z_2, z_3, z_4) : z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}\} = [\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-i, 0, 0, 1)\}].$$

Dakle L je potprostor od $\mathbb{C}^4$, a skup $\{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (-i, 0, 0, 1)\}$ je njegov skup izvodnica. Budući da je taj skup ujedno i linearno nezavisan (provjerite za zadaću), on je baza potprostora L pa je $\dim L = 3$.

c) Uočimo da je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in K$ ako i samo ako je

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad a + d = 0,$$

odnosno ako i samo ako je $a + 2b = b, c + 2d = d, a + d = 0$ pa je

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} : a + 2b = b, c + 2d = d, a + d = 0 \right\} = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ a & -a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\} = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

Sada je jasno da je K potprostor od $M_2(\mathbb{R})$ i da je skup $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ baza tog potprostora. Vrijedi $\dim K = 1$.

□

***Zadatak* 1.2.** Neka je $M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 - z_2 + \overline{z_3} = 0\}$.

a) Je li M potprostor kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^3$? Ako je, odredite mu dimenziju i neku bazu.

b) Je li M potprostor realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$? Ako je, odredite mu dimenziju i neku bazu.

Rješenje:

a) Neka su $v = (v_1, v_2, v_3)\,, w = (w_1, w_2, w_3) \in M$ te $\alpha \in \mathbb{C}$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} v_1 + w_1 - (v_2 + w_2) + \overline{(v_3 + w_3)} &= v_1 + w_1 - (v_2 + w_2) + \overline{v_3} + \overline{w_3} \\ &= v_1 - v_2 + \overline{v_3} + w_1 - w_2 + \overline{w_3} = 0 + 0 = 0. \end{aligned}$$

Dakle, $v + w = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3) \in M$. Nadalje, za $v \in M$ vrijedi

$$\begin{aligned} \alpha v_1 - \alpha v_2 + \overline{\alpha v_3} &= \alpha v_1 - \alpha v_2 + \overline{\alpha} \cdot \overline{v_3} \\ &= \alpha v_1 - \alpha v_2 + \overline{\alpha} \cdot \overline{v_3} + \alpha \cdot \overline{v_3} - \alpha \cdot \overline{v_3} \\ &= \alpha(v_1 - v_2 + \overline{v_3}) + (\overline{\alpha} - \alpha)\overline{v_3} \\ &= (\overline{\alpha} - \alpha)\overline{v_3} \end{aligned}$$

pa je $\alpha v \in M$ ako i samo ako vrijedi $(\overline{\alpha} - \alpha)\overline{v_3} = 0$. Za $\alpha = i$ i $v = (0, 1, 1)$ imamo $v \in M$ i $\alpha v \notin M$. Dakle M nije potprostor od $\mathbb{C}^3$.

b) Neka je $w = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3) \in M, x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, 3$. Imamo $x_1 + iy_1 - x_2 - iy_2 + x_3 - iy_3 = 0$, odnosno

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 = 0 &\Longrightarrow x_1 = x_2 - x_3 \\ y_1 - y_2 - y_3 = 0 &\Longrightarrow y_1 = y_2 + y_3 \end{aligned}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} w &= (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3) \\ &= (x_2 - x_3 + i\,(y_2 + y_3)\,, x_2 + iy_2, x_3 + iy_3) \\ &= x_2(1, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1) + y_2(i, i, 0) + y_3(i, 0, i). \end{aligned}$$

Uvedimo oznaku $S = \{(1, 1, 0), (-1, 0, 1), (i, i, 0), (i, 0, i)\}$. Imamo $M = [S] \leq \mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$, odnosno M je potprostor realnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^3_{\mathbb{R}}$. Skup S je skup izvodnica za M. Pokažimo da je S linearno nezavisan. Rješavamo jednadžbu

$$\alpha(1, 1, 0) + \beta(-1, 0, 1) + \gamma(i, i, 0) + \delta(i, 0, i) = (0, 0, 0).$$

Imamo

$$\begin{aligned} \alpha - \beta + i\gamma + i\delta &= 0 \\ \alpha + i\gamma = 0 &\Longrightarrow \alpha = \gamma = 0 \\ \beta + i\delta = 0 &\Longrightarrow \beta = \delta = 0 \end{aligned}$$

Dakle, S je linearno nezavisan skup izvodnica za M pa je baza za M i $\dim M = \operatorname{card} S = 4$.

***Zadatak* 1.3.** Neka je $\mathcal{P}_3$ prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3 i neka su

$$K = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = 2p(1)\}, \qquad L = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(-1) = 0\}.$$

Nađite neke baze za $K \cap L$ i $K + L$.

Rješenje: Zadatak možemo riješiti na standardni način tako da nađemo bazu za K (npr. $\{x, x^2 + 2, x^3 + 6\}$) i bazu za L (npr. $\{(x-1)(x+1), x(x-1)(x+1)\}$) pa algoritmom s vježbi odredimo baze za sumu i presjek tih potprostora. No, jednostavnije je pogledati kako izgleda presjek:

$$K \cap L = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = 2p(1) \text{ i } p(1) = p(-1) = 0\} = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = p(1) = p(-1) = 0\}.$$

Dakle, tražimo sve polinome kojima su -1, 1, 2 nultočke. To su polinomi oblika $p(x) = c(x+1)(x-1)(x-2)$, $c \in \mathbb{R}$ pa je potprostor $K \cap L$ jednodimenzionalan i njegova baza je $\{(x+1)(x-1)(x-2)\}$. Sumu potprostora možemo dobiti tako da najprije odredimo njenu dimenziju:

$$\dim(K + L) = \dim K + \dim L - \dim(K \cap L) = 3 + 2 - 1 = 4 = \dim \mathcal{P}_3$$

pa je $K + L = \mathcal{P}_3$ i njegova baza je bilo koja baza za $\mathcal{P}_3$, npr. kanonska $\{1, x, x^2, x^3\}$. □

***Zadatak* 1.4.** a) U ovisnosti o realnom parametru a odredite rang matrice

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & a^2+3 & 3 \\ 2 & 3 & 18 & 13 \end{bmatrix}$$

b) Postoji li $a \in \mathbb{R}$ tako da je $A^{2023} - A^{2024} = I$, gdje je $I \in M_4(\mathbb{R})$ jedinična matrica?

Rješenje:

a)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & 3 & 6 & 5 \\ 0 & 1 & a^2+3 & 3 \\ 2 & 3 & 18 & 13 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & 9 \\ 0 & 1 & a^2+3 & 3 \\ 0 & 3 & 12 & 9 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 3 & 12 & 9 \\ 0 & 1 & a^2+3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Imamo $r(A) = 2$ ako je $a = \pm 1$, inače $r(A) = 3$.

b) Iz a) dijela znamo da je $r(A) < 4$. Kako je $A \in M_4(\mathbb{R})$ imamo $\det A = 0$. Sada je $\det\left(A^{2023} - A^{2024}\right) = \det\left(A\left(A^{2022} - A^{2023}\right)\right) = \det(A)\det\left(A^{2022} - A^{2023}\right) = 0 \neq 1 = \det I$. Dakle, takav a ne postoji.

□

***Zadatak* 1.5.** U ovisnosti o realnim parametrima λ i μ riješite sustav linearnih jednadžbi $AX = B$ ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 1 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad B = \begin{bmatrix} \mu \\ 3 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

Rješenje:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 2 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda & 3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 2 & 5 & \lambda & 3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -3 & \mu \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & \lambda+8 & -3 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\mu \\ 0 & 0 & 3 & \lambda+8 & -3 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -\mu \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-1 & 3(\mu-1) \end{array}\right].$$

U slučaju $\lambda \neq 1$ sustav ima jedinstveno rješenje (koje ovisi o parametrima). Povratnom supstitucijom dobivamo:

$$x_1 = -3 + 2\mu - 3\frac{\mu-1}{\lambda-1}, \quad x_2 = 3 + \mu + 21\frac{\mu-1}{\lambda-1}, \quad x_3 = -\mu - 9\frac{\mu-1}{\lambda-1}, \quad x_4 = 3\frac{\mu-1}{\lambda-1}.$$

U slučaju $\lambda = 1, \mu \neq 1$ sustav nema rješenja. U slučaju $\lambda = 1, \mu = 1$ sustav će imati beskonačno rješenja. Računamo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -6 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -7 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right]$$

U tom slučaju rješenja su dana s

$$x_1 = -1 - t, \quad x_2 = 4 + 7t, \quad x_3 = -1 - 3t, \quad x_4 = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

***Zadatak* 1.6.** Odredite sve parametre $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje je matrica $A - \lambda I$ regularna, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rješenje: Uočimo da je

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}.$$

Koristeći Laplaceov razvoj po prvom retku dobivamo

$$\det(A-\lambda I) = (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$+ \begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}.$$

Koristeći Sarusssovo pravilo dobivamo

$$\begin{aligned}
\det(A-\lambda I) &= (1-\lambda)(-\lambda^3+4\lambda^2+4\lambda) - (\lambda^2+2\lambda) + (-\lambda^2-2\lambda) - 2(2\lambda^2) \\
&= (1-\lambda)(-\lambda^3+4\lambda^2+4\lambda) - 2(3\lambda^2+2\lambda) \\
&= \lambda(-\lambda^2+4\lambda+4+\lambda^3-4\lambda^2-4\lambda-6\lambda-4) \\
&= \lambda(\lambda^3-5\lambda^2-6\lambda) \\
&= \lambda^2(\lambda^2-5\lambda-6) \\
&= \lambda^2(\lambda+1)(\lambda-6).
\end{aligned}$$

Znamo da je matrica $A-\lambda I$ regularna ako i samo ako je $\det(A-\lambda I)\neq 0$. Dakle, matrica $A-\lambda I$ je regularna ako i samo ako je $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0,-1,6\}$. $\square$

Poglavlje 2

Unitarni prostori

2.1 Skalarni produkt

***Zadatak* 2.1.** Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Znamo da je prostor neprekidnih funkcija na segmentu $[a, b]$, kojeg označavamo s $C\,[a, b]$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{R}$ uz operacije:

$$\begin{aligned}(f+g)(t) &:= f(t) + g(t),\\ (\alpha f)(t) &:= \alpha f(t).\end{aligned}$$

Definirajmo preslikavanje $\langle \cdot \mid \cdot \rangle : C([a, b]) \times C([a, b]) \longrightarrow \mathbb{R}$ s

$$\langle f \mid g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt, \quad f, g \in C([a, b]).$$

Dokažite da je ovako definirano preslikavanje skalarni produkt na $C([a, b])$.

Rješenje: Svojstva (1)-(3) proizlaze direktno iz svojstava Riemannovog integrala. Nadalje,

$$\langle f \mid f \rangle = \int_a^b f(t)f(t)dt \underbrace{\geq}_{\text{monotonost integrala}} \int_a^b 0dt = 0.$$

Ako je $\langle f \mid f \rangle = 0$, onda je $f \equiv 0$ na $[a, b]$. Zaista, ako je $f^2(t_0) > 0$ za neko $t_0 \in [a, b]$, onda zbog neprekidnosti funkcije f^2 postoji neka okolina $o(t_o)$ točke t_0 takva da je $f^2(t) > 0$ za sve $t \in o(t_0)$. No, tada je $\int_{o(t_0)} f(t)^2 dt > 0$ pa je i $\langle f \mid f \rangle > 0$. $\square$

***Zadatak* 2.2.** Provjerite je li preslikavanje definirano s

$$s((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3$$

skalarni produkt na vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$.

Rješenje: Trebamo provjeriti svojstva skalarnog produkta. Ukoliko preslikavanje s **ne** zadovoljava bilo koje od svojstava skalarnog produkta, onda s neće biti skalarni produkt. Za $x = (x_1, x_2, x_3)$ računamo $s(x, x)$. Vrijedi

$$s(x, x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 = 2(x_1 + x_2)^2 + x_2^2 + 5x_3^2 \geq 0.$$

Nadalje, $s(x, x) = 0$ ako i samo ako je $(x_1 + x_2)^2 = x_2^2 = x_3^2 = 0$, odnosno $x = (0, 0, 0)$. Dakle, preslikavanje s zadovoljava prvo svojstvo skalarnog produkta, pozitivnu definitnost. Provjerimo sada zadovoljava li preslikavanje s drugo svojstvo skalarnog produkta, tj. hermitsku simetričnost. Uočimo da je $s(x,y) = \overline{s(y,x)}$ za $x, y \in \mathbb{R}^3$ ako i samo ako je

$$2x_1y_1 + 4x_1y_2 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3 = 2y_1x_1 + 4y_1x_2 + 3y_2x_2 + 5y_3x_3,$$

odnosno ako i samo ako je $x_1y_2 = y_1x_2$. Da bi s bio skalarni produkt, nužno je (ali ne i dovoljno) da vrijedi $s(x,y) = s(y,x)$, odnosno $x_1y_2 = y_1x_2$ za sve vektore $x, y \in \mathbb{R}^3$. Jasno je da postoje $x, y \in \mathbb{R}^3$ za koje je $x_1y_2 \neq y_1x_2$. Uzmimo npr. $x = (1,0,0), y = (1,1,0)$. Sada je

$$s(x,y) = s((1,0,0),(1,1,0)) = 2\cdot1\cdot1 + 4\cdot1\cdot1 + 3\cdot0\cdot1 + 5\cdot0\cdot0 = 6, \tag{2.1}$$
$$s(y,x) = s((1,1,0),(1,0,0)) = 2\cdot1\cdot1 + 4\cdot1\cdot0 + 3\cdot1\cdot0 + 5\cdot0\cdot0 = 2. \tag{2.2}$$

Dakle, postoje $x, y \in \mathbb{R}^3$ takvi da $s(x,y) \neq \overline{s(y,x)}$ pa zaključujemo da zadano preslikavanje nije skalarni produkt.

***Zadatak* 2.3.** Zadano je preslikavanje $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sa

$$s(x,y) = x_1(y_1 + 2y_2) + x_2(2y_1 + 4y_2).$$

Je li s skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$? Ako nije, postoji li neki potprostor od $\mathbb{R}^2$ na kojem je s skalarni produkt?

Rješenje: Vrijedi

$$s(x,x) = x_1(x_1 + 2x_2) + x_2(2x_1 + 4x_2) = x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 \geq 0.$$

Nadalje, $s(x,x) = 0$ ako i samo ako je $x_1 + 2x_2 = 0$. Posljednji uvjet zadovoljavaju mnogi $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. Npr. vrijedi $s((-2,1),(-2,1)) = 0$ iako je $(-2,1) \neq (0,0)$. Dakle, preslikavanje s nije skalarni produkt.
Provjerimo ostala svojstva preslikavanja s (bit će nam potrebna za drugi dio zadatka). Vrijedi

$$s(y,x) = y_1(x_1 + 2x_2) + y_2(2x_1 + 4x_2) = x_1(y_1 + 2y_2) + x_2(2y_1 + 4y_2) = s(x,y) = \overline{s(x,y)},$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$. Dakle, preslikavanje s zadovoljava svojstvo hermitske simetričnosti. Dalje imamo

$$s(\lambda x, y) = (\lambda x_1)(y_1 + 2y_2) + (\lambda x_2)(2y_1 + 4y_2) = \lambda(x_1(y_1 + 2y_2) + x_2(2y_1 + 4y_2)) = \lambda s(x,y),$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$ i za sve $\lambda \in \mathbb{R}$. Dakle, preslikavanje s zadovoljava svojstvo homogenosti. Provjerimo svojstvo aditivnosti. Vrijedi

$$\begin{aligned} s(x+y,z) &= (x_1 + y_1)(z_1 + 2z_2) + (x_2 + y_2)(2z_1 + 4z_2) \\ &= x_1(z_1 + 2z_2) + x_2(2z_1 + 4z_2) + y_1(z_1 + 2z_2) + y_2(2z_1 + 4z_2) \\ &= s(x,z) + s(y,z), \end{aligned}$$

za sve $x, y, z \in \mathbb{R}^2$.
Ako promatramo preslikavanje s na bilo kojem potprostoru M od $\mathbb{R}^2$, ono će i dalje zadovoljavati svojstva hermitske simetričnosti, homogenosti i aditivnosti. Također će zadovoljavati svojstvo $s(x,x) \geq 0$ za sve $x \in M$. Dakle, jedino je pitanje kako zadati potprostor M tako da vrijedi $s(x,x) = 0$ ako i samo ako je $x = (0,0)$.

Stavimo li npr. $M = \{(x_1, x_1) : x_1 \in \mathbb{R}\}$, imamo potprostor od $\mathbb{R}^2$ za kojeg vrijedi $s(x,x) = 0$ ako i samo ako je $(x_1 + 2x_1)^2 = 0$, odnosno ako i samo ako je $x_1 = 0$. Dakle, za $x \in M$ vrijedi $s(x,x) = 0$ ako i samo ako je $x = (0,0)$. Preslikavanje s je skalarni produkt na M.

Uočimo da za M možemo uzeti bilo koji pravac kroz ishodište osim pravca s jednadžbom $x_1 + 2x_2 = 0$. Zašto? Pokušajte povezati s geometrijom i rješavanjem homogenog sustava linearnih jednadžbi.

***Zadatak* 2.4.** Dano je preslikavanje $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$s(x,y) = \langle (x_1, ax_1 + 2x_2) \,|\, (y_1, y_2) \rangle,$$

gdje je $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$. Za koje $a \in \mathbb{R}$ je preslikavanje s skalarni produkt?
Rješenje: Vrijedi

$$s(x,y) = x_1y_1 + (ax_1 + 2x_2)y_2 = x_1y_1 + ax_1y_2 + 2x_2y_2.$$

Da bi s bio skalarni produkt, nužno je (ali ne i dovoljno) $s(y,x) = \overline{s(x,y)}$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$, odnosno

$$y_1x_1 + ay_1x_2 + 2y_2x_2 = x_1y_1 + ax_1y_2 + 2x_2y_2,$$

tj. $ax_1y_2 = ay_1x_2$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$. Ako je $a \neq 0$, onda mora vrijediti $x_1y_2 = y_1x_2$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$, što nije uvijek istina (primjerice za $x = (1,2), y = (1,1)$). Dakle, da bi preslikavanje s bilo skalarni produkt, nužno je $a = 0$. U svim ostalim slučajevima s neće biti skalarni produkt.

Za $a = 0$ imamo $s(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2$ i

$$\begin{aligned}
s(x,x) &= x_1^2 + 2x_2^2 \geq 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R}^2 \\
s(x,x) &= 0 \quad \iff \quad x_1^2 + 2x_2^2 = 0 \quad \iff \quad x_1 = x_2 = 0 \quad \iff \quad x = (0,0) \\
s(y,x) &= y_1x_1 + 2y_2x_2 = x_1y_1 + 2x_2y_2 = s(x,y) = \overline{s(x,y)} \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2 \\
s(\lambda x, y) &= (\lambda x_1)y_1 + 2(\lambda x_2)y_2 = \lambda s(x,y) \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^2, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R} \\
s(x+y, z) &= (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_2 + y_2)z_2 = (x_1z_1 + 2x_2z_2) + (y_1z_1 + 2y_2z_2) = s(x,z) + s(y,z) \quad \forall x, y, z \in \mathbb{R}^2,
\end{aligned}$$

iz čega zaključujemo da je s skalarni produkt za $a = 0$. □

***Zadatak* 2.5.** Odredite sve realne brojeve λ za koje je preslikavanje

$$s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + (\lambda^2 + 1)x_1y_2 + (4 - 2\lambda^2)x_2y_1 + (5 + 3\lambda)x_2y_2$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$.
Rješenje: Jedno od svojstava koje preslikavanje s mora zadovoljavati da bi bilo skalarni produkt je $s(y,x) = \overline{s(x,y)}$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$. Uočimo da je $s(y,x) = \overline{s(x,y)}$ ako i samo ako vrijedi

$$x_1y_1 + (\lambda^2+1)x_1y_2 + (4-2\lambda^2)x_2y_1 + (5+3\lambda)x_2y_2 = y_1x_1 + (\lambda^2+1)y_1x_2 + (4-2\lambda^2)y_2x_1 + (5+3\lambda)y_2x_2,$$

odnosno ako i samo ako je

$$(\lambda^2 + 1)(x_1y_2 - y_1x_2) + (4 - 2\lambda^2)(x_2y_1 - y_2x_1) = 0,$$

tj. ako i samo ako je

$$(x_1y_2 - y_1x_2)(3\lambda^2 - 3) = 0.$$

Da bi posljednja jednakost vrijedila za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$, nužno je $3\lambda^2 - 3 = 0$. Ukoliko bi vrijedilo $3\lambda^2 - 3 \neq 0$, onda, da bi vrijedilo $s(y,x) = \overline{s(x,y)}$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$, mora biti $x_1y_2 - y_1x_2 = 0$ za sve $x, y \in \mathbb{R}^2$, a to očito nije istina (uzmimo npr. $x = (1,1), y = (1,0)$). Dakle, da bi s uopće imao šansu biti skalarni produkt, mora vrijediti $3\lambda^2 - 3 = 0$, odnosno $\lambda \in \{-1, 1\}$.
Uočite da ovdje zadatak nije gotov jer u ovom trenutku možemo samo zaključiti da ako $\lambda \notin \{-1, 1\}$, da onda s sigurno nije skalarni produkt (jer ne zadovoljava svojstvo hermitske simetričnosti). Ako

je pak $\lambda \in \{-1, 1\}$, onda preslikavanje s zadovoljava svojstvo hermitske simetričnosti, ali još uvijek moramo provjeriti zadovoljava li i ostala svojstva skalarnog produkta.

Prvi slučaj ($\lambda = 1$): U ovom slučaju je

$$s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 8x_2y_2$$

pa je

$$s((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 8x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 + 4x_2^2 \geq 0.$$

Nadalje, $s((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = 0$ ako i samo ako je $x_1 + 2x_2 = 0$ i $x_2 = 0$, odnosno ako i samo ako je $(x_1, x_2) = (0, 0)$. Dakle, preslikavaje s zadovoljava svojstvo pozitivne definitnosti.
Preostaje još provjeriti homogenost i aditivnost. Za $\mu \in \mathbb{R}$ i $x, y \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$\begin{aligned} s(\mu x, y) &= s((\mu x_1, \mu x_2), (y_1, y_2)) = (\mu x_1)y_1 + 2(\mu x_1)y_2 + 2(\mu x_2)y_1 + 8(\mu x_2)y_2 \\ &= \mu(x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 8x_2y_2) = \mu s(x, y). \end{aligned}$$

Nadalje, za $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ vrijedi

$$\begin{aligned} s(x + y, z) &= s((x_1 + y_1, x_2 + y_2), (z_1, z_2)) = (x_1 + y_1)z_1 + 2(x_1 + y_1)z_2 + 2(x_2 + y_2)z_1 + 8(x_2 + y_2)z_2 \\ &= (x_1z_1 + 2x_1z_2 + 2x_2z_1 + 8x_2z_2) + (y_1z_1 + 2y_1z_2 + 2y_2z_1 + 8y_2z_2) = s(x, z) + s(y, z). \end{aligned}$$

Dakle, s je skalarni produkt za $\lambda = 1$.

Drugi slučaj ($\lambda = -1$): U ovom slučaju je

$$s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2$$

pa je

$$s((x_1, x_2), (x_1, x_2)) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2x_1 + 2x_2^2 = (x_1 + 2x_2)^2 - 2x_2^2.$$

Da bi preslikavanje s bilo skalarni produkt mora vrijediti $(x_1 + 2x_2)^2 - 2x_2^2 \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^2$, no to očito nije istina. Stavimo li npr. $x = (2, -1)$, imamo $s((2, -1), (2, -1)) = -2 < 0$. Dakle, s nije skalarni produkt za $\lambda = -1$.

Domaća zadaća

1. Ispitajte jesu li sljedeća preslikavanja s $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ u $\mathbb{R}$ skalarni produkti.

   a) $a(x, y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 7x_3y_3$,
   b) $b(x, y) = x_1y_1 - 2x_2y_2$,
   c) $c(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 + x_2y_3$,

   gdje su $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$.

2. Ispitajte jesu li sljedeća preslikavanja s $\mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}^3$ u $\mathbb{C}$ skalarni produkti.

   a) $a(x, y) = x_1\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + 7x_3\overline{y_3}$,
   b) $b(x, y) = x_1\overline{y_1} - 2x_2\overline{y_2}$,

c) $c(x, y) = x_1\overline{y_1} + x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} + x_2\overline{y_3}$,

gdje su $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$.

3. Odredite sve realne brojeve λ takve da je preslikavanje $s : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dano sa

$$s((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = \lambda x_1 y_1 + (\lambda^2 - 1)x_1 y_2 + (\lambda + 1)x_2 y_1 + \lambda^3 x_2 y_2$$

skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$.

4. Za koji kompleksan broj τ je preslikavanje $s : \mathbb{C}^2 \times \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ zadano sa

$$s((z_1, z_2), (w_1, w_2)) = z_1\overline{w_1} + \tau z_1\overline{w_2} - iz_2\overline{w_1} + 2z_2\overline{w_2}$$

skalarno množenje na $\mathbb{C}^2$?

5. Za koje kompleksne brojeve λ je preslikavanje

$$s\left(\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{bmatrix}\right) = (\lambda - 1)(a_1\overline{a_2} + b_1\overline{b_2}) + \overline{\lambda}(c_1\overline{c_2} + d_1\overline{d_2})$$

skalarno množenje na prostoru $M_2(\mathbb{C})$?

2.2 Gramova determinanta

***Zadatak* 2.6.** Koristeći Gramovu determinantu odredite je li skup matrica

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ i & -i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1+i & 1-i \end{bmatrix}\right\}$$

linearno nezavisan skup u $M_2(\mathbb{C})$.

Rješenje: Označimo matrice iz zadatka redom s A, B, C. Imamo

$$\Gamma(A, B, C) = \begin{vmatrix} \langle A \,|\, A\rangle & \langle A \,|\, B\rangle & \langle A \,|\, C\rangle \\ \langle B \,|\, A\rangle & \langle B \,|\, B\rangle & \langle B \,|\, C\rangle \\ \langle C \,|\, A\rangle & \langle C \,|\, B\rangle & \langle C \,|\, C\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 6 \end{vmatrix} = 0.$$

Kako je $\Gamma(A, B, C) = 0$, po propoziciji s predavanja zaključujemo da je skup $\{A, B, C\}$ linearno zavisan skup. □

***Zadatak* 2.7.** Pomoću Gramove determinante ispitajte za koje $a \in \mathbb{R}$ su vektori $(a, 1, -1)$ i $(-1, -a, a)$ linearno nezavisni u $\mathbb{R}^3$.

Rješenje: Uvedimo oznake $x = (a, 1, -1), y = (-1, -a, a)$. Imamo

$$\begin{aligned} \Gamma(x, y) &= \begin{vmatrix} \langle x \,|\, x\rangle & \langle x \,|\, y\rangle \\ \langle y \,|\, x\rangle & \langle y \,|\, y\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} (a^2+2) & -3a \\ -3a & (2a^2+1) \end{vmatrix} \\ &= (a^2+2)(2a^2+1) - 9a^2 \\ &= 2a^4 + 5a^2 + 2 - 9a^2 \\ &= 2(a^4 - 2a^2 + 1) = 2(a^2-1)^2 \end{aligned}$$

Vidimo da je $\Gamma(x, y) = 0$ ako i samo ako je $a^2 = 1$, odnosno, vektori x i y su linearno nezavisni ako i samo ako je $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. □

***Zadatak* 2.8.** Neka su $\{v_1, v_2, v_3\}$ linearno nezavisni vektori u nekom unitarnom prostoru $(V, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$. Postoje li skalari $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ takvi da je Gramova matrica vektora $v_1 + \alpha v_2, \beta v_1 + 2v_2 + 3v_3, -v_1 + \gamma v_3, -4v_1 + \delta v_2 - \delta v_3$ dijagonalna?

Rješenje: Uvedimo oznake

$$\begin{aligned} a &= v_1 + \alpha v_2, \\ b &= \beta v_1 + 2v_2 + 3v_3, \\ c &= -v_1 + \gamma v_3, \\ d &= -4v_1 + \delta v_2 - \delta v_3. \end{aligned}$$

Pretpostavimo da postoje skalari $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ takvi da je $G(a, b, c, d)$ dijagonalna matrica. Tada je

$$\Gamma(a,b,c,d) = \begin{vmatrix} \langle a \,|\, a \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \langle b \,|\, b \rangle & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \langle c \,|\, c \rangle & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \langle d \,|\, d \rangle \end{vmatrix} = \langle a \,|\, a \rangle \langle b \,|\, b \rangle \langle c \,|\, c \rangle \langle d \,|\, d \rangle.$$

Budući da su vektori $\{v_1, v_2, v_3\}$ linearno nezavisni, vrijedi $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ pa su brojevi $\langle a \,|\, a \rangle$, $\langle b \,|\, b \rangle$, $\langle c \,|\, c \rangle$, $\langle d \,|\, d \rangle$ pozitivni, a onda je $\Gamma(a, b, c, d) > 0$, iz čega slijedi da je skup $\{a, b, c, d\}$ linearno nezavisan. Međutim, $a, b, c, d \in [\{v_1, v_2, v_3\}]$. Imamo četiri vektora trodimenzinalnog vektorskog prostora pa oni ne mogu biti linearno nezavisni. Dakle, ne postoje skalari $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ takvi da je $G(a, b, c, d)$ dijagonalna matrica.

Domaća zadaća

1. Pomoću Gramove matrice ispitajte jesu li sljedeći skupovi vektora linearno nezavisni u odgovarajućem prostoru

   a) $\{(-2i, i, 5+i), (-1, -3i, i)\}$ u $\mathbb{C}^3$,

   b) $\{(1,1,0), (2,5,1), (-11,1,6)\}$ u $\mathbb{R}^3$,

   c) $\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \right\}$ u $M_2(\mathbb{R})$,

   d) $\{1 + t + 2t^2, 3 + t^2\}$ u $\mathcal{P}_2([0,1])$.

2. Neka su a, b, c linearno zavisni vektori u realnom unitarnom prostoru $(V, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$. Ako je

   $$G(a,b,c) = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ * & * & 5 \\ * & * & 14 \end{bmatrix},$$

   odredite preostale elemente Gramove matrice $G(a, b, c)$.

3. Postoje li vektori $\vec{a}, \vec{b} \in V^2$ takvi da je

   $$G(\vec{a}, \vec{b}) = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}?$$

   Obrazložite odgovor.

2.3 Nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog

***Zadatak* 2.9.** Neka su $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$(a + c + 2d)^2 \leq a^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 5 + 5c^2 + 5d^2.$$

Rješenje: Uočimo da je desna strana jednaka

$$a^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 5 + 5c^2 + 5d^2 = (a^2 + b^2 + 5)(1 + c^2 + d^2).$$

Primjenom nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog na vektore $(a, b, 1, 2)$ i $(1, 0, c, d)$, dobivamo

$$|\langle (a, b, 1, 2) \,|\, (1, 0, c, d)\rangle|^2 \leq \langle (a, b, 1, 2) \,|\, (a, b, 1, 2)\rangle \langle (1, 0, c, d) \,|\, (1, 0, c, d)\rangle,$$

tj.

$$(a + c + 2d)^2 \leq (a^2 + b^2 + 5)(1 + c^2 + d^2) = a^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 5 + 5c^2 + 5d^2.$$

Zadatak se mogao riješiti i tako da nejednakost Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog primijenimo na vektore $(a, 1, 2)$ i $(1, c, d)$. Imamo

$$|\langle (a, 1, 2) \,|\, (1, c, d)\rangle|^2 \leq \langle (a, 1, 2) \,|\, (a, 1, 2)\rangle \langle (1, c, d) \,|\, (1, c, d)\rangle,$$

tj.

$$\begin{aligned}(a + c + 2d)^2 \leq (a^2 + 5)(1 + c^2 + d^2) &= a^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + 5 + 5c^2 + 5d^2 \\ &\leq a^2 + a^2c^2 + a^2d^2 + b^2 + b^2c^2 + b^2d^2 + 5 + 5c^2 + 5d^2.\end{aligned}$$

□

***Zadatak* 2.10.** Dokažite da za svaka četiri realna broja a, b, c, d vrijede sljedeće nejednakosti:

a) $(ac + 2bd)^2 \leq a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2d^2 + 4b^2d^2$,

b) $|a^2 + b^2 + cd| \leq \sqrt{a^4 + 2a^2b^2 + b^4 + a^2d^2 + b^2d^2 + a^2c^2 + b^2c^2 + c^2d^2}$.

Navedite neke a, b, c, d za koje vrijedi jednakost, pri čemu su svi različiti od 0 i nisu svi medusobno jednaki.

Rješenje:

a) Uočimo da je desna strana jednaka

$$a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2d^2 + 4b^2d^2 = (a^2 + 2b^2)(c^2 + 2d^2).$$

Primjenom nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog na vektore $(a, \sqrt{2}b)$ i $(c, \sqrt{2}d)$, dobivamo

$$|\langle (a, \sqrt{2}b) \,|\, (c, \sqrt{2}d)\rangle|^2 \leq \langle (a, \sqrt{2}b) \,|\, (a, \sqrt{2}b)\rangle \langle (c, \sqrt{2}d) \,|\, (c, \sqrt{2}d)\rangle,$$

tj.

$$(ac + 2bd)^2 \leq (a^2 + 2b^2)(c^2 + 2d^2) = a^2c^2 + 2b^2c^2 + 2a^2d^2 + 4b^2d^2.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori $(a, \sqrt{2}b)$ i $(c, \sqrt{2}d)$ linearno zavisni, npr. za

$$a = b = 1,\ c = d = 2.$$

b) Uočimo da je kvadrat desne strane jednak

$$\begin{aligned} a^4+2a^2b^2+b^4+a^2d^2+b^2d^2+a^2c^2+b^2c^2+c^2d^2 &= (a^2+b^2)^2+(a^2+b^2)(c^2+d^2)+c^2d^2 \\ &= (a^2+b^2)^2+(a^2+b^2)c^2+(a^2+b^2)d^2+c^2d^2 \\ &= (a^2+b^2)(a^2+b^2+c^2)+d^2(a^2+b^2+c^2) \\ &= (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+d^2). \end{aligned}$$

Primjenom nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog na vektore (a,b,c) i (a,b,d), dobivamo

$$|\langle (a,b,c) \mid (a,b,d)\rangle|^2 \le \langle (a,b,c) \mid (a,b,c)\rangle \langle (a,b,d) \mid (a,b,d)\rangle,$$

tj.

$$(a^2+b^2+cd)^2 \le (a^2+b^2+c^2)(a^2+b^2+d^2) = a^4+2a^2b^2+b^4+a^2d^2+b^2d^2+a^2c^2+b^2c^2+c^2d^2.$$

Odatle slijedi

$$a^2+b^2+cd \le |a^2+b^2+cd| \le \sqrt{a^4+2a^2b^2+b^4+a^2d^2+b^2d^2+a^2c^2+b^2c^2+c^2d^2}.$$

Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori (a,b,c) i (a,b,d) linearno zavisni, npr. za

$$a=b=1,\ c=d=2.$$

***Zadatak* 2.11.** Dokažite da za sve $x,y,z\in\mathbb{R}$ vrijedi nejednakost

$$\frac{x+y+z+3(x+y+z)^3}{2\sqrt{3}} \le \sqrt{x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^6}.$$

Rješenje: Ukoliko desnu stranu pomnožimo s $2\sqrt{3}$ i kvadriramo, dobit ćemo

$$12(x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^6) = \langle (x,y,z,(x+y+z)^3) \mid (x,y,z,(x+y+z)^3)\rangle \langle (1,1,1,3) \mid (1,1,1,3)\rangle$$

Primjenom nejednakosti Cauchy-Schwarz-Bunjakowskog na vektore $(x,y,z,(x+y+z)^3)$ i $(1,1,1,3)$, dobivamo

$$|\langle (x,y,z,(x+y+z)^3) \mid (1,1,1,3)\rangle|^2 \le \langle (x,y,z,(x+y+z)^3) \mid (x,y,z,(x+y+z)^3)\rangle \langle (1,1,1,3) \mid (1,1,1,3)\rangle,$$

tj.

$$|x+y+z+3(x+y+z)^3|^2 \le 12(x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^6).$$

Odatle slijedi

$$\frac{x+y+z+3(x+y+z)^3}{2\sqrt{3}} \le \left|\frac{x+y+z+3(x+y+z)^3}{2\sqrt{3}}\right| \le \sqrt{x^2+y^2+z^2+(x+y+z)^6}.$$

Domaća zadaća

1. Dokažite da za sve $a,b,c,d\in\mathbb{R}$ vrijede sljedeće nejednakosti:

a) $(ac + 2bd + 3)^2 \leq a^2 + b^2 + 9c^2 + 36d^2 + a^2c^2 + 4a^2d^2 + b^2c^2 + 4b^2d^2 + 9$,

b) $(29a - b + 34c + 5d)^2 \leq 2023(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$

2. Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ s $f(x, y, z) = x + 2y + 3z$. Nađite maksimum funkcije f uz uvjet $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Odredite x, y, z za koje se taj maksimum postiže?

3. Neka su a, b, c, d pozitivni realni brojevi takvi da je $a + b + c + d = 1$. Nađite minimalnu vrijednost izraza $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$. Za koje a, b, c, d se taj minimum postiže?

4. Pokažite da za pozitivne realne brojeve x, y, z vrijedi

$$x + y + z \leq 2\left(\frac{x^2}{y+z} + \frac{y^2}{x+z} + \frac{z^2}{x+y}\right)$$

2.4 Norma i metrika

***Zadatak* 2.12.** Dokažite da je preslikavanje $\|\cdot\|_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadano s

$$\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\}$$

norma na $\mathbb{R}^n$. Je li ta norma inducirana nekim skalarnim produktom na $\mathbb{R}^n$?

Rješenje: Kako je $|x_i| \geq 0$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to je i $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$. Nadalje, vrijedi $\|x\|_\infty = 0$ ako i samo ako je $\max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = 0$, a to je ispunjeno samo u slučaju kada je $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| = 0$, odnosno ako i samo ako je $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_\infty &= \max\{|\lambda x_1|, \ldots, |\lambda x_n|\} \\
&= \max\{|\lambda||x_1|, \ldots, |\lambda||x_n|\} \\
&= |\lambda| \max\{|x_1|, \ldots, |x_n|\} = |\lambda|\|x\|_\infty.
\end{aligned}$$

Osim toga, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned}
\|x + y\|_\infty &= \max\{|x_1 + y_1|, \ldots, |x_n + y_n|\} \\
&\leq \max\{|x_1| + |y_1|, \ldots, |x_n| + |y_n|\}.
\end{aligned}$$

Kako je $\|x\|_\infty \geq |x_i|$ i $\|y\|_\infty \geq |y_i|$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ to je $|x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$ za sve $i \in \{1, \ldots, n\}$ pa je i $\max\{|x_1| + |y_1|, \ldots, |x_n| + |y_n|\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, odnosno $\|x + y\|_\infty \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$. Dakle $\|\cdot\|_\infty$ je norma na $\mathbb{R}^n$.

Da bismo vidjeli je li ta norma inducirana skalarnim produktom, trebamo vidjeti vrijedi li relacija paralelograma

$$\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 = 2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$. Stavimo li npr. $x = (2, 0, \ldots, 0, 1)$, $y = (-2, 0, \ldots, 0, 1)$, onda je

$$\|x + y\|_\infty^2 + \|x - y\|_\infty^2 = 2^2 + 4^2 = 20,$$

dok je $2(\|x\|_\infty^2 + \|y\|_\infty^2) = 2(2^2 + 2^2) = 16$. Vidimo da relacija paralelograma nije ispunjena za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ pa zadana norma nije inducirana niti jednim skalarnim produktom na $\mathbb{R}^n$. $\square$

***Zadatak* 2.13.** Dokažite da je preslikavanje $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadano s

$$\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n|$$

norma na $\mathbb{R}^n$. Je li ta norma inducirana nekim skalarnim produktom na $\mathbb{R}^n$?

Rješenje: Kako je $|x_i| \geq 0$ za sve $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, to je i $\|x\|_1 = |x_1| + \ldots + |x_n| \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$. Nadalje, vrijedi $\|x\|_1 = 0$ ako i samo ako je $|x_1| = |x_2| = \ldots = |x_n| = 0$, odnosno ako i samo ako je $x = 0_{\mathbb{R}^n}$. Za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} \|\lambda x\|_1 &= |\lambda x_1| + \ldots + |\lambda x_n| \\ &= |\lambda||x_1| + \ldots + |\lambda||x_n| \\ &= |\lambda|(|x_1| + \ldots + |x_n|) = |\lambda|\|x\|_1. \end{aligned}$$

Osim toga, za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ vrijedi

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= |x_1 + y_1| + \ldots + |x_n + y_n| \\ &\leq |x_1| + |y_1| + \ldots + |x_n| + |y_n| \\ &= (|x_1| + \ldots + |x_n|) + (|y_1| + \ldots + |y_n|) = \|x\|_1^2 + \|y\|_1^2. \end{aligned}$$

Dakle $\|\cdot\|_1$ je norma na $\mathbb{R}^n$.
Da bismo vidjeli je li ta norma inducirana skalarnim produktom, trebamo vidjeti vrijedi li relacija paralelograma

$$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2)$$

za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$. Stavimo li npr. $x = (2, 0, \ldots, 0, 1)$, $y = (-2, 0, \ldots, 0, 1)$, onda je

$$\|x + y\|_1^2 + \|x - y\|_1^2 = 2^2 + 4^2 = 20,$$

dok je $2(\|x\|_1^2 + \|y\|_1^2) = 2(3^2 + 3^2) = 36$. Vidimo da relacija paralelograma nije ispunjena za sve $x, y \in \mathbb{R}^n$ pa zadana norma nije inducirana niti jednim skalarnim produktom na $\mathbb{R}^n$.

***Zadatak* 2.14.** a) Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ te $||\cdot||$ neka norma na $\mathbb{R}^2$. Je li tada preslikavanje $s(x) = ||Ax||, x = (x_1, x_2)$ norma na $\mathbb{R}^2$?

b) Neka je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ te $||\cdot||$ neka norma na $\mathbb{R}^2$. Je li tada preslikavanje $s(x) = ||Ax||, x = (x_1, x_2)$ norma na $\mathbb{R}^2$?

Rješenje:

a) Za $x \in \mathbb{R}^2$ je $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$ pa je $s(x) = \|Ax\| = \|(x_1 + 3x_2, 2x_1 + x_2)\|$. Provjerimo svojstva norme

   (1) $s(x) = \|(x_1 + 3x_2, 2x_1 + x_2)\| \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^2$. Nadalje, $s(x) = 0$ ako i samo ako je $\|(x_1 + 3x_2, 2x_1 + x_2)\| = 0$, odnosno ako i samo ako je $(x_1 + 3x_2, 2x_1 + x_2) = (0, 0)$. Rješavanjem sustava $x_1 + 3x_2 = 0, 2x_1 + x_2 = 0$ dobijemo jedinstveno rješenje $x_1 = x_2 = 0$. Naime, matrica tog sustava je upravo matrica A, a ona je regularna pošto joj je determinanta različita od nule pa ovaj homogeni sustav ima jedinstveno, trivijalno rješenje.

   (2) $s(\lambda x) = \|A(\lambda x)\| = \|\lambda A x\| = |\lambda|\|Ax\| = |\lambda| s(x)$ za sve $x \in \mathbb{R}^2$ i za sve $\lambda \in \mathbb{R}$.

(3) $s(x+y) = \|A(x+y)\| = \|Ax + Ay\| \leq \|Ax\| + \|Ay\| = s(x) + s(y)$.

Dakle, s je norma na $\mathbb{R}^2$.

b) Za $x \in \mathbb{R}^2$ je $Ax = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$ pa je $s(x) = \|Ax\| = \|(x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2)\|$.
Provjerimo svojstva norme
$s(x) = \|(x_1 + 2x_2, 2x_1 + 4x_2)\| \geq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}^2$. Nadalje, $s(x) = 0$ ako i samo ako je $\|(x_1+2x_2, 2x_1+4x_2)\| = 0$, odnosno ako i samo ako je $(x_1+2x_2, 2x_1+4x_2) = (0,0)$. Rješavanjem sustava $x_1 + 2x_2 = 0, 2x_1 + 4x_2 = 0$ dobijemo jednoparametarsko rješenje $x_1 = -2t, x_2 = t$, $t \in \mathbb{R}$. Sada je jasno da postoji i netrivijalno rješenje ovog sustava, npr. $x = (-2,1)$. Vrijedi $s(-2,1) = 0$, iako je $(-2,1) \neq (0,0)$. Dakle, s nije norma na $\mathbb{R}^2$ pa ostala svojstva ne trebamo ni provjeravati (uočite da preslikavanje s zadovoljava preostala svojstva norme).

□

***Zadatak* 2.15.** Dokažite da je preslikavanje $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zadano s

$$d(x,y) = \begin{cases} 1, & x \neq y \\ 0, & x = y \end{cases}$$

metrika na $\mathbb{R}^n$.

Rješenje: Sva su svojstva očita osim nejednakosti trokuta. Za $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ imamo sljedeće mogućnosti:

(1) $x = y = z$; u ovom slučaju je $d(x,y) = d(y,z) = d(x,z) = 0$ pa je $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$.

(2) $x = y \neq z$; u ovom slučaju je $d(x,y) = 0$, $d(y,z) = d(x,z) = 1$ pa je $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$.

(3) $x \neq y = z$; u ovom slučaju je $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 0$, $d(x,z) = 1$ pa je $d(x,z) = d(x,y) + d(y,z)$.

(4) $z = x \neq y$; u ovom slučaju je $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 1$, $d(x,z) = 0$ pa je $d(x,z) = 0 < 2 = d(x,y) + d(y,z)$.

(5) $x \neq y, y \neq z, x \neq z$; u ovom slučaju je $d(x,y) = d(y,z) = d(x,z) = 1$ pa je $d(x,z) = 1 < 2 = d(x,y) + d(y,z)$.

□

Domaća zadaća

1. Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$ te $|| \cdot ||$ neka norma na $\mathbb{R}^2$. Odredite nužne i dovoljne uvjete na matricu A uz koje je preslikavanje $s(x) = ||Ax||, x = (x_1, x_2)$ norma na $\mathbb{R}^2$.

2. Ispitajte jesu li sljedeći prostori uz zadana preslikavanja normirani

   a) $\mathbb{R}^3$ s $a(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 6z^2$
   b) $\mathbb{R}^3$ s $b(x,y,z) = \sqrt{x^2 + 2y^2 + 6z^2}$
   c) $M_2(\mathbb{R})$ s $c(A) = \max_{i,j}|a_{ij}|$, gdje je $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$

   Ako je neko od zadanih preslikavanja norma, odredite je li inducirana skalarnim produktom.

3. Neka su a, b vektori u unitarnom prostoru U. Pokažite da ako je $||a+b|| = ||a-b|| = ||b||$, tada je a nulvektor.

2.5 Ortogonalizacija baze

***Zadatak* 2.16.** U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom dani su vektori

$$a_1 = (1,2,2),\ a_2 = (1,-2,0),\ a_3 = (-1,0,1).$$

Dokažite da su ti vektori linearno nezavisni i ortonormirajte ih.
Rješenje: Imamo $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$. Nadalje, $b_2 = a_2 - \langle a_2 \,|\, e_1\rangle e_1 = \frac{1}{3}(4,-4,2)$ pa je $e_2 = \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{1}{3}(2,-2,1)$. Konačno,

$$b_3 = a_3 - \langle a_3 \,|\, e_1\rangle e_1 - \langle a_3 \,|\, e_2\rangle e_2 = \frac{1}{9}(-8,-4,8)$$

pa je $e_3 = \frac{b_3}{\|b_3\|} = \frac{1}{3}(-2,-1,2)$. Pošto je $\dim[\{a_1,a_2,a_3\}] = \dim[\{e_1,e_2,e_3\}] = 3$, to su vektori a_1, a_2, a_3 linearno nezavisni.

Napomena 2.1. *Općenito, vektori $\{a_1,\ldots,a_m\}$ su linearno zavisni ako i samo ako se postupak ortogonalizacije ne može provesti.*

***Zadatak* 2.17.** U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2$, skupa polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednakog dva, sa standardnim skalarnim produktom

$$\langle p \,|\, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad p,q \in \mathcal{P}_2$$

ortonormirajte standardnu bazu $\{1,t,t^2\}$.
Rješenje: Uvedimo oznake $p_1(t) = 1,\ p_2(t) = t,\ p_3(t) = t^2$. Uočimo da je

$$\|p_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} dt} = \sqrt{t\Big|_{-1}^{1}} = \sqrt{1-(-1)} = \sqrt{2}.$$

Stoga je $e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}p_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dalje imamo

$$\begin{aligned}
b_2(t) &= p_2(t) - \langle p_2 \,|\, e_1\rangle e_1(t) = t - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} tdt\right) = t - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^{1} = t\\
e_2(t) &= \frac{b_2(t)}{\|b_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2dt}}b_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{1}}}b_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t\\
b_3(t) &= p_3(t) - \langle p_3 \,|\, e_1\rangle e_1 - \langle p_3 \,|\, e_2\rangle e_2 = t^2 - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} t^2dt\right) - \frac{3}{2}t\left(\int_{-1}^{1} t^3dt\right) = t^2 - \frac{1}{3}\\
e_3(t) &= \frac{b_3(t)}{\|b_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(t^2-\frac{1}{3})^2dt}}b_3(t) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

***Zadatak* 2.18.** U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{C})$ sa standardnim skalarnim produktom

$$\langle A \,|\, B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*), \quad A,B \in M_2(\mathbb{C})$$

ortonormirajte bazu $\left\{\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix}\right\}$ i prikažite matricu $A = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$ u toj ortonormiranoj bazi.

Rješenje: Uvedimo oznake

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$E_1 = \frac{A_1}{\|A_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$B_2 = A_2 - \langle A_2 \,|\, E_1 \rangle E_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = \frac{B_2}{\|B_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = A_3 - \langle A_3 \,|\, E_1 \rangle E_1 - \langle A_3 \,|\, E_2 \rangle E_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E_3 = \frac{B_3}{\|B_3\|} = \frac{1}{\sqrt{45}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -6 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B_4 = A_4 - \langle A_4 \,|\, E_1 \rangle E_1 - \langle A_4 \,|\, E_2 \rangle E_2 - \langle A_4 \,|\, E_3 \rangle E_3 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$E_4 = \frac{B_4}{\|B_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0. \end{bmatrix}$$

Znamo da je $A = \langle A \,|\, E_1 \rangle E_1 + \langle A \,|\, E_2 \rangle E_2 + \langle A \,|\, E_3 \rangle E_3 + \langle A \,|\, E_4 \rangle E_4 = \sqrt{2} E_1 + \frac{3}{\sqrt{5}} E_2 - \frac{1}{\sqrt{5}} E_3.$ □

Domaća zadaća

1. Nađite ortonormiranu bazu za potprostore od $\mathbb{R}^3$ zadane jednadžbama

   a) $x + y + 2z = 0$,

   b) $x = \frac{y}{3} = z$,

2. U unitarnom prostoru $\mathbb{C}^3$ sa standardnim skalarnim produktom ortonormirajte sljedeći skup vektora:

   $$\{(1, 2i, 0), (-2 - i, 0, 1), (0, 3i, 1)\}.$$

   Je li ortonormirani skup baza za taj vektorski prostor? Prikažite vektor $(1, 2, i)$ kao linearnu kombinaciju elemenata tog ortonormiranog skupa.

3. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa skalarnim produktom

   $$s(x, y) = x_1 y_1 + 2 x_2 y_2 + 5 x_3 y_3.$$

   ortonormirajte sljedeći skup vektora:

   $$\{(1, 0, 3), (2, 4, 1)\}.$$

4. Pronađite po jednu ortonormiranu bazu za sljedeće vektorske potprostore:

a) $A = \{at^2 + bt + c \in \mathcal{P}_2([-1,1]) : b = a + 2c\} \leq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$.

b) $B = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right] \leq M_2(\mathbb{R})$.

5. Neka je V n–dimenzionalni vektorski prostor i neka je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ jedna njegova baza. Pronađite skalarni produkt $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ na V takav da je $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ortonormirana baza u unitarnom prostoru $(V, \langle \cdot \,|\, \cdot \rangle)$.

2.6 Ortogonalni komplement

***Zadatak* 2.19.** U prostoru $\mathbb{R}^5$ potprostor M razapet je vektorima $a = (1, 2, 3, -1, 2)$ i $b = (2, 4, 7, 2, -1)$. Odredite $M^\perp$.

Rješenje: Prvi način: Skup $\{a, b\}$ je sustav izvodnica za M. Zato je $M = [\{a, b\}]$. Slijedi da je $x \in M^\perp$ ako i samo ako je $\langle x \,|\, a \rangle = 0$ i $\langle x \,|\, b \rangle = 0$. Dakle, $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in M^\perp$ ako i samo ako je

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 0 \\ 2x_1 + 4x_2 + 7x_3 + 2x_4 - x_5 = 0 \end{cases}.$$

Ovo je homogen sustav i skup svih njegovih rješenja je $M^\perp$. Rješenja su

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = r\,\underbrace{(-2, 1, 0, 0, 0)}_{=:u} + s\,\underbrace{(13, 0, -4, 1, 0)}_{=:v} + t\,\underbrace{(-17, 0, 5, 0, 1)}_{=:w}, \quad r, s, t \in \mathbb{R}.$$

Prema tome je $M^\perp = [\{u, v, w\}]$ i baza za $M^\perp$ je $\{u, v, w\}$.
Drugi način: Nadopunimo linearno nezavisni skup $\{a, b\}$ do baze za $\mathbb{R}^5$. Uzmemo li npr.

$$c = (1, 0, 0, 0, 0),\ d = (0, 1, 0, 0, 0),\ e = (0, 0, 1, 0, 0)$$

tada će skup $\{a, b, c, d, e\}$ biti baza za $\mathbb{R}^5$. Ortonormiramo li tu bazu po GS postupku, dobit ćemo ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ za $\mathbb{R}^5$ za koju vrijedi $[\{a, b\}] = [\{e_1, e_2\}]$. Stoga je $M = [\{e_1, e_2\}]$ pa je $M^\perp = \{e_3, e_4, e_5\}$. Postupak ortogonalizacije baze $\{a, b, c, d, e\}$ ostavljamo za zadaću.

***Zadatak* 2.20.** U unitarnom prostoru $M_3(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim produktom dan je potprostor $M = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : XA = X\}$, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite $M^\perp$.

Rješenje: Odredimo najprije bazu za potprostor M. Uočimo da je $X \in M$ ako i samo ako je $X(A - I) = 0$. Neka je

$$X = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \in M.$$

Tada mora vrijediti

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odnosno $b+c=0$, $e+f=0$, $h+i=0$. Stoga je $X \in M$ ako i samo ako vrijedi $c=-b, f=-e, i=-h$, odnosno ako i samo ako je X oblika

$$\begin{bmatrix} a & b & -b \\ d & e & -e \\ g & h & -h \end{bmatrix}.$$

Stoga je jedna baza za M dana sa

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Označimo te matrice redom s $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$. Vrijedi $Y \in M^\perp$ ako i samo ako je vektor Y okomit ne sve vektore baze za M. Dakle,

$$Y = \begin{bmatrix} x & y & z \\ u & v & w \\ o & p & q \end{bmatrix} \in M^\perp$$

ako i samo ako je $\langle Y \mid B_i \rangle = 0$ za sve $i \in \{1,2,3,4,5,6\}$, odnosno ako i samo ako je

$$x=0,\ y-z=0,\ u=0,\ v-w=0,\ o=0,\ p-q=0.$$

Dakle, $M^\perp = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & y & y \\ 0 & v & v \\ 0 & p & p \end{bmatrix} \ : \ y,v,p \in \mathbb{R} \right\}$ □

***Zadatak* 2.21.** Neka je $P = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(x) = p(-x)\}$ i $N = \{p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R}) : p(x) = -p(-x)\}$. Pokažite da su P i N jedan drugome ortogonalni komplementi, pri čemu prostor $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ promatramo s obzirom na skalarni produkt $\langle p \mid q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

Rješenje: Ako su $p \in P$ i $q \in N$ proizvoljno odabrani, tada je p parna i q neparna funkcija pa je pq neparna funkcija i zato je $\langle p \mid q \rangle = 0$. Time smo dokazali da je $P \perp N$. Nadalje, za svaki polinom $p \in \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ vrijedi $p(x) = p_1(x) + p_2(x)$, gdje je

$$p_1(x) = \frac{p(x)+p(-x)}{2},\ p_2(x) = \frac{p(x)-p(-x)}{2}.$$

Uočimo da je $p_1 \in P,\ p_2 \in N$. Stoga je $P \dot{+} N = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$, odnosno $P \oplus N = \mathcal{P}_n(\mathbb{R})$. Zbog jedinstvenosti ortogonalnog komplementa zaključujemo da je $P^\perp = N$ i $N^\perp = P$. □

***Zadatak* 2.22.** U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ (sa standardnim skalarnim produktom) zadan je vektor $x = (1,1,2,2)$ i potprostor M svojom bazom $a = (1,1,1,0)$ i $b = (1,0,1,1)$. Prikažite vektor x u obliku $x = y + z$, gdje je $y \in M$ i $z \in M^\perp$.

Rješenje: Naivno rješenje bi bilo da odredimo bazu $\{u,v\}$ za $M^\perp$ pa x prikažemo kao $x = \alpha a + \beta b + \gamma u + \delta v$. Koeficijenti u tom prikazu su jedinstveni, a vektori koji nama trebaju su $y = \alpha a + \beta b$ i $z = \gamma u + \delta v$.

No, postoji puno jednostavniji i brži način. Ako ortonormiramo $\{a,b\}$, dobit ćemo $\{e_1, e_2\}$. Nadopunimo taj skup do ONB $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ za $\mathbb{R}^4$. Tada se x može prikazati kao

$$x = \underbrace{\langle x \mid e_1 \rangle e_1 + \langle x \mid e_2 \rangle e_2}_{=y} + \underbrace{\langle x \mid e_3 \rangle e_3 + \langle x \mid e_4 \rangle e_4}_{=z}.$$

Da bismo odredili y i z, dovoljno je odrediti samo y (jer je $z = x - y$) pa nam ne trebaju vektori e_3, e_4, već samo e_1, e_2. Ortonormirajmo $\{a, b\}$.

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0) \\
b_2 &= b - \langle b \mid e_1 \rangle e_1 = (1,0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) \\
e_2 &= \frac{b_2}{\|b_2\|} = \frac{3}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,1,3).
\end{aligned}$$

Sada je

$$y = \langle x \mid e_1 \rangle e_1 + \langle x \mid e_2 \rangle e_2 = \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0) + \frac{7}{\sqrt{15}} \cdot \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,1,3) = \frac{1}{5}(9,2,9,7)$$

pa je

$$z = x - y = \frac{1}{5}(-4,3,1,3).$$

***Zadatak* 2.23.** Neka su L, M potprostori od U. Dokažite da je:

(a) $(L+M)^{\perp} = L^{\perp} \cap M^{\perp}$,

(b) $(L \cap M)^{\perp} = L^{\perp} + M^{\perp}$.

Rješenje:

(a) Dokazujemo dvije inkluzije.

$\boxed{\subseteq}$ Neka je $x \in (L+M)^{\perp}$. Tada je $x \perp L + M \supseteq L, M$ pa je i $x \in L^{\perp}$ i $x \in M^{\perp}$. Dakle, $x \in L^{\perp} \cap M^{\perp}$.

$\boxed{\supseteq}$ Ako je $x \in L^{\perp} \cap M^{\perp}$, onda je $x \perp L$ i $x \perp M$. Za proizvoljan $y = a + b \in L + M$ je

$$\langle x \mid y \rangle = \langle x \mid a + b \rangle = \langle x \mid a \rangle + \langle x \mid b \rangle = 0 + 0 = 0.$$

Dakle, $x \in (L+M)^{\perp}$

(b) Stavimo u (a) $L^{\perp}$ umjesto L i $M^{\perp}$ umjesto M. Imamo:

$$\left(L^{\perp} + M^{\perp}\right)^{\perp} = \left(L^{\perp}\right)^{\perp} \cap \left(M^{\perp}\right)^{\perp} = L \cap M.$$

Uzimanjem ortogonalnog komplementa lijeve i desne strane, dobivamo

$$(L \cap M)^{\perp} = \left(\left(L^{\perp} + M^{\perp}\right)^{\perp}\right)^{\perp} = L^{\perp} + M^{\perp}.$$

Domaća zadaća

1. Provjerite da su sljedeći skupovi ortogonalni i nadopunite ih do ortogonalne baze:
   a) $\{(5,2,0,11),(-2,5,1,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4$,
   b) $\{(6,-3,-2),(1+i,2i,3)\} \subseteq \mathbb{C}^3$,
   c) $\left\{\begin{bmatrix} 1 & i \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 2+i & 1 \end{bmatrix}\right\} \subseteq M_2(\mathbb{C})$,
   d) $\{2t, t^2+1\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, sa skalarnim produktom $\langle p \,|\, q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$
2. Nađite ortogonalne komplemente sljedećih potprostora i za njih odredite neku ortogonalnu bazu.
   a) $M = \left\{A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) : b+c=0, a+2b+3c+4d=0\right\}$,
   b) $M = \{A \in M_2(\mathbb{R}) : A + A^T = \operatorname{tr}(A) \cdot I\}$,
   c) $M = [\{t^2, t^2-t\}] \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ sa skalarnim produktom $\langle p \mid q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt$,
   d) $M = [\{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p'(t) = 6t-1\}]$ sa skalarnim produktom
   $$\langle p \mid q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt,$$
   e) $M = [\{(1,0,1,-2),(-1,1,-1,1),(-1,2,-1,0)\}] \subseteq \mathbb{R}^4$.

2.7 Ortogonalna projekcija

***Zadatak* 2.24.** Neka je $M = [\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}]$ potprostor unitarnog prostora $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom. Odredite ortogonalnu projekciju vektora $x = (2,0,0,7)$ na potprostor M. Kolika je udaljenost vektora x od potprostora M?

Rješenje: Stavimo $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (0,1,1,0)$ i ortonormirajmo skup $\{a_1, a_2\}$. Dobivamo vektore
$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0).$$
Odredimo a, gdje je $x = a+b$, $a \in M$, $b \in M^\perp$:
$$a = \langle x \,|\, u_1\rangle u_1 + \langle x \,|\, u_2\rangle u_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right).$$
Također je
$$\|x-a\| = \|b\| = \left\|(2,0,0,7) - \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 7^2} = \frac{\sqrt{453}}{3}.$$
$\square$

***Zadatak* 2.25.** Odredite $p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ takav da je $p(0) = p'(0) = 0$ i da je vrijednost
$$\int_0^1 (x^2+1-p(x))^2 dx$$
najmanja moguća.

Rješenje: Neka je $M = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = p'(0) = 0\}$. Tada je $M \leq \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Označimo $p_0(x) = x^2 + 1$. Prostor $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ promatramo uz skalarni produkt $\langle p \,|\, q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.
Sada zadatak možemo reformulirati: odredite $p \in M$ takav da je

$$\|p_0 - p\| \leq \|p_0 - q\|, \quad \forall q \in M.$$

Dakle, tražimo ortogonalnu projekciju vektora p_0 na potprostor M. Uočimo da je $M = \{p(x) = ax^3 + bx^2 \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$, odnosno $M = [\{x^3, x^2\}]$. Stavimo $p_1(x) = x^3$, $p_2(x) = x^2$. Primjenom G-S postupka na vektore p_1 i p_2 dobijemo vektore

$$e_1(x) = \sqrt{7}x^3,\ e_2(x) = 6\sqrt{5}\left(x^2 - \frac{7}{6}x^3\right).$$

Ortogonalna projekcija je dana s $p_M = \langle p_0 \,|\, e_1\rangle e_1 + \langle p_0 \,|\, e_2\rangle e_2$ (dovršite za DZ).

***Zadatak* 2.26.** Zadane su točke $T_1 = (-6, -1)$, $T_2 = (-2, 2)$, $T_3 = (1, 1)$, $T_4 = (7, 6)$. Odredite pravac $y = kx + l$ za kojeg je izraz

$$\sum_{i=1}^{4}(y_i - (kx_i + l))^2$$

najmanji. Pri tome su (x_i, y_i) koordinate točke T_i za $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Rješenje: Želimo minimizirati izraz

$$f(k, l) = \sum_{i=1}^{4}(y_i - (kx_i + l))^2 = (-1 - (-6k + l))^2 + (2 - (-2k + l))^2 + (1 - (k + l))^2 + (6 - (7k + l))^2.$$

Uočio da je $f(k, l) = d((-1, 2, 1, 6), (-6k + l, -2k + l, k + l, 7k + l))^2$. Stavimo li

$$M = \{(-6k + l, -2k + l, k + l, 7k + l) \ : \ k, l \in \mathbb{R}\} = \{k(-6, -2, 1, 7) + l(1, 1, 1, 1) \ : \ k, l \in \mathbb{R}\},$$

vidimo da je $M = [\{(-6, -2, 1, 7), (1, 1, 1, 1)\}]$ pa je $\min_{k,l\in\mathbb{R}} f(k, l) = d((-1, 2, 1, 6), M)^2$. Znamo da je $d((-1, 2, 1, 6), M) = d(b, b_M)$, gdje je $b = (-1, 2, 1, 6)$. Stavimo $a_1 = (-6, -2, 1, 7), a_2 = (1, 1, 1, 1)$. Ortonormiranjem dobivamo vektore $e_1 = \frac{1}{\sqrt{90}}(-6, -2, 1, 7)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1, 1, 1, 1)$. Sada je

$$b_M = \langle b \,|\, e_1\rangle e_1 + \langle b \,|\, e_2\rangle e_2 = \frac{45}{90}(-6, -2, 1, 7) + \frac{8}{4}(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{2}(-6, -2, 1, 7) + 2(1, 1, 1, 1) = \frac{1}{2}a_1 + 2a_2.$$

Taj minimum se dostiže za $k = \frac{1}{2}$ i $l = 2$, odnosno, pravac koji najbolje aproksimira točke $T_1 = (-6, -1)$, $T_2 = (-2, 2)$, $T_3 = (1, 1)$, $T_4 = (7, 6)$ je pravac s jednadžbom $y = \frac{1}{2}x + 2$.

Domaća zadaća

1. Prikažite vektor v u obliku $v = a + b$, gdje je $a \in M$ i $b \in M^{\perp}$. Odredite udaljenost vektora v od potprostora M.

   a) $v = (1, 2, 1, 4), M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 = 0\}$,

   b) $v = (1 - i, i, 1 + 2i), M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{C}^3 : ix_1 + (1 - i)x_2 = 2x_2 - ix_3 = 0\}$,

   c) $v = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix}, M = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2i & i \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right\}\right] \subseteq M_2(\mathbb{C})$,

   d) $v = t^2 + 1, M = \{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p'(-1) = p''(-2) = 0\} \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$, sa skalarnim produktom $\langle p \,|\, q\rangle = \int_0^1 p(t)q(t)dt$

2. Prikažite vektor $v = \sin x$ u obliku $v = a + b$, gdje je $a \in M$ i $b \in M^{\perp}$, za $M = [\{1, \cos x\}] \subseteq C([0, \pi]; \mathbb{R})$

3. Zadane su točke $T_1 = (3, 2)$, $T_2 = (1, 0)$, $T_3 = (0, 1)$. Odredite pravac $y = kx + l$ za kojeg je izraz

$$\sum_{i=1}^{3}(y_i - (kx_i + l))^2$$

najmanji. Pri tome su (x_i, y_i) koordinate točke T_i za $i \in \{1, 2, 3\}$.

4. Odredite najbolju aproksimaciju funkcije $f(x) = \sin x$ pomoću polinoma stupnja najviše 3 u unitarnom prostoru neprekidnih funkcija na segmentu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sa skalarnim produktom

$$\langle p \,|\, q\rangle = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} p(t)q(t)dt.$$

Poglavlje 3

Linearni operatori

3.1 Definicija i osnovna svojstva linearnog operatora

Definicija 3.1. Neka su V, W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ zovemo **linearni operator** ako vrijedi

$$\begin{aligned} A(x+y) &= A(x) + A(y), \quad \forall x, y \in V \quad \text{(aditivnost)} \\ A(\alpha x) &= \alpha A(x), \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{F} \quad \text{(homogenost).} \end{aligned}$$

ili ekvivalentno

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \quad \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}. \quad \text{(svojstvo linearnosti)}$$

Posebno, ako je kodomena preslikavanja A polje $\mathbb{F}$ ($W = \mathbb{F}$), linearni operator A zovemo **linearni funkcional**.

Propozicija 3.2. *Neka su V i W vektorski prostori nad istim poljem i neka je $A : V \to W$ linearni operator. Tada vrijedi $A(0_V) = 0_W$.*

***Zadatak* 3.1.** Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori:

(a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_2)$ (tipičan linearan operator s $\mathbb{R}^m$ u $\mathbb{R}^n$),

(b) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, x_1 - 4x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_2)$.

(c) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A(x, y) = |x|$,

(d) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $A(x, y) = x \cdot y$,

(e) $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $A(z) = \overline{z}$,

(f) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $A(x, y) = (x, y + 2)$.

(g) $f : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $f(p) = p(0)$,

(h) $g : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $g(p) = \int_0^1 p(t)\mathrm{d}t$,

(i) $k : \mathcal{P} \to \mathbb{R}$, $k(p) = \int_0^1 p\left(t^2\right) \mathrm{d}t$.

Rješenje:

(a) Za $x, y \in \mathbb{R}^3$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, vrijedi

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= A(\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3) \\ &= ((\alpha x_1 + \beta y_1) + (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3), 2(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= \alpha(x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_2) + \beta(y_1 + y_2 + y_3, 2y_1 - y_2) \\ &= \alpha A(x) + \beta A(y). \end{aligned}$$

Dakle, preslikavanje A je linearni operator.

(b) Ovaj primjer je jako sličan primjeru pod a) pa ga ostavljamo za zadaću.

(c) Ispitajmo najprije vrijedi li svojstvo homogenosti. Imamo

$$A(\alpha(x, y)) = A(\alpha x, \alpha y) = |\alpha x| = |\alpha||x|.$$

Uzmemo li npr. $\alpha = -1$, $(x, y) = (1, 0)$ dobivamo da je $A(-(1, 0)) = |-1| = 1$, dok je $-A(1, 0) = -|1| = -1$ pa je $A(-(1, 0)) \neq -A(1, 0)$, odnosno A nije linearni operator. Uočimo da A ne zadovoljava niti svojstvo aditivnosti. Npr. za vektore $(1, 0)$, $(-1, 0)$ imamo

$$A(1, 0) + A(-1, 0) = |1| + |-1| = 2,$$

dok je $A\left((1, 0) + (-1, 0)\right) = A(0, 0) = |0| = 0$ pa je $A(1, 0) + A(-1, 0) \neq A\left((1, 0) + (-1, 0)\right)$.

(d) Imamo

$$A(\alpha(x, y)) = A(\alpha x, \alpha y) = \alpha x \cdot \alpha y = \alpha^2 xy.$$

Stavimo li za (x, y) bilo koji vektor čije su obje koordinate različite od 0 (npr. vektor $(1, 1)$) i za α bilo koji skalar različit od 0 i 1 (npr. $\alpha = 2$), dobivamo da je $A(\alpha(x, y)) \neq \alpha A(x, y)$. Dakle, A nije linearan operator.

(e) A je linearan operator na $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Ako su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, onda je

$$A\left(\alpha z_1 + \beta z_2\right) = \overline{\alpha z_1 + \beta z_2} = \overline{\alpha}\,\overline{z_1} + \overline{\beta}\,\overline{z_2} = \alpha\overline{z_1} + \beta\overline{z_2} = \alpha A(z_1) + \beta A(z_2).$$

S druge strane, na $\mathbb{C}_{\mathbb{C}}$ A nije linearan operator. Vrijedi

$$A(i \cdot 1) = A(i) = \overline{i} = -i, \quad iA(1) = i \cdot \overline{1} = i$$

pa je $A(i \cdot 1) \neq iA(1)$.

(f) Primijetimo da A ne preslikava nul-vektor u nul-vektor, što je nužan uvjet za svaki linearan operator. Naime, $A(0, 0) = (0, 2) \neq (0, 0)$.

(g) Neka su $p, q \in \mathcal{P}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Imamo

$$f(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = \alpha f(p) + \beta f(q).$$

Dakle, f je linearni operator.

(h) Neka su $p, q \in \mathcal{P}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Imamo

$$g(\alpha p+\beta q) = \int_0^1 (\alpha p+\beta q)(t)dt = \int_0^1 (\alpha p(t)+\beta q(t))dt = \alpha \int_0^1 p(t)dt+\beta \int_0^1 q(t)dt = \alpha g(p)+\beta g(q).$$

Dakle, g je linearni operator.

(i) Neka su $p, q \in \mathcal{P}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Imamo

$$k(\alpha p+\beta q) = \int_0^1 (\alpha p+\beta q)(t^2)dt = \int_0^1 (\alpha p(t^2)+\beta q(t^2))dt = \alpha \int_0^1 p(t^2)dt+\beta \int_0^1 q(t^2)dt = \alpha k(p)+\beta k(q).$$

Dakle, k je linearni operator.

***Zadatak* 3.2.** Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori ($\mathcal{P}_k$ je prostor polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednakog k, a $\mathcal{P}$ je prostor (svih) polinoma s realnim koeficijentima):

(a) $A : \mathcal{P}_k \to \mathcal{P}_k$, $(A(p))(t) = p(t+1)$, $t \in \mathbb{R}$,

(b) $B : \mathcal{P}_k \to \mathcal{P}_k$, $(B(p))(t) = p(t) + 1$, $t \in \mathbb{R}$,

(c) $C : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $(C(p))(t) = (p(t))^2$, $t \in \mathbb{R}$,

(d) $D : \mathcal{P} \to \mathcal{P}$, $(D(p))(t) = (p \circ p)(t)$, $t \in \mathbb{R}$.

Rješenje:

(a) Trebamo provjeriti vrijedi li

$$A(\alpha p + \beta q) = \alpha A(p) + \beta A(q)$$

za sve $p, q \in \mathcal{P}_k$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Za proizvoljni $t \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}(A(\alpha p + \beta q))(t) &= (\alpha p + \beta q)(t+1) \\ &= \alpha p(t+1) + \beta q(t+1) \\ &= \alpha(A(p))(t) + \beta(A(q))(t) \\ &= (\alpha A(p) + \beta A(q))(t).\end{aligned}$$

pa je

$$A(\alpha p + \beta q) = \alpha A(p) + \beta A(q).$$

Dakle, A je linearan operator.

(b) Ako je $p \equiv 0$ nul–polinom, onda je $(B(p))(t) = 1$ pa B nije linearan operator jer ne preslikava nul-vektor u nul-vektor.

(c) Za $p(t) = 1$, $t \in \mathbb{R}$ i $\alpha = 2$, dobivamo $(C(2p))(t) = 2^2 = 4$, $2(C(p))(t) = 2$ za sve $t \in \mathbb{R}$ pa je $C(2p) \neq 2C(p)$, odnosno ne vrijedi homogenost pa C nije linearni operator. Lako se pokaže da ne vrijedi ni aditivnost (dokažite za zadaću), mada to nije potrebno provjeravati jer čim zaključimo da ne vrijedi homogenost, možemo zaključiti da funkcija nije linearni operator.

(d) Za $p(t) = t$, $t \in \mathbb{R}$ i $\alpha = 2$, dobivamo $(D(2p))(t) = (2p)(2t) = 2(2t) = 4t$, $2(D(p))(t) = 2t$ za sve $t \in \mathbb{R}$ pa je $D(2p) \neq 2D(p)$, odnosno ne vrijedi homogenost pa D nije linearni operator. Lako se pokaže da ne vrijedi ni aditivnost (dokažite za zadaću), mada to nije potrebno provjeravati jer čim zaključimo da ne vrijedi homogenost, možemo zaključiti da funkcija nije linearni operator. □

***Zadatak* 3.3.** Neka je p pravac kroz ishodište u $V = V^2(O)$ (ili $V = V^3(O)$) s vektorom smjera $\vec{s}$ i neka je $P : V \to V$ funkcija koja vektoru $\vec{v}$ iz V pridružuje njegovu ortogonalnu projekciju na pravac p. Dokažite da je P linearni operator.

Rješenje: Budući da je pravac kroz ishodište jednodimenzionalni potprostor od V s bazom $\{\vec{s}\}$, tj. s ortonormiranom bazom $\{\vec{s_0}\}$, gdje je $\vec{s_0} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$, prema formuli za ortogonalnu projekciju imamo

$$P(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{s_0})\vec{s_0}.$$

Stoga za vektore $\vec{v}, \vec{w} \in V$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} P(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= ((\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \cdot \vec{s_0})\vec{s_0} \\ &= (\alpha(\vec{v} \cdot \vec{s_0}) + \beta(\vec{w} \cdot \vec{s_0}))\vec{s_0} \\ &= \alpha(\vec{v} \cdot \vec{s_0})\vec{s_0} + \beta(\vec{w} \cdot \vec{s_0})\vec{s_0} \\ &= \alpha P(\vec{v}) + \beta P(\vec{w}), \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je P linearni operator.

***Zadatak* 3.4.** Neka je p pravac kroz ishodište u $V = V^2(O)$ (ili $V = V^3(O)$) s vektorom smjera $\vec{s}$ i neka je $Z : V \to V$ zrcaljenje s obzirom na pravac p. Dokažite da je Z linearni operator.

Rješenje: Znamo da za svaki vektor $\vec{v} \in V$ vrijedi $\vec{v} + Z(\vec{v}) = 2P(\vec{v})$, gdje je P linearni operator iz zadatka 3.3. Stoga je

$$Z(\vec{v}) = 2P(\vec{v}) - \vec{v} = 2(\vec{v} \cdot \vec{s_0})\vec{s_0} - \vec{v},$$

gdje je $\vec{s_0} = \frac{\vec{s}}{|\vec{s}|}$. Stoga za vektore $\vec{v}, \vec{w} \in V$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} Z(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= 2P(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) - (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \\ \text{(jer je } P \text{ linearni operator)} &= 2(\alpha P(\vec{v}) + \beta P(\vec{w})) - (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \\ &= \alpha(2P(\vec{v}) - \vec{v}) + \beta(2P(\vec{w}) - \vec{w}) \\ &= \alpha Z(\vec{v}) + \beta Z(\vec{w}), \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je Z linearni operator.

***Zadatak* 3.5.** Neka je π ravnina kroz ishodište u $V = V^3(O)$ s jediničnim vektorom normale $\vec{n}$ i neka je $P : V \to V$ funkcija koja vektoru $\vec{v}$ iz V pridružuje njegovu ortogonalnu projekciju na ravninu π. Dokažite da je P linearni operator.

Rješenje: Za vektor $\vec{v} \in V$ je vektor $P(\vec{v}) - \vec{v}$ okomit na ravninu π pa postoji skalar λ takav da je

$$P(\vec{v}) - \vec{v} = \lambda\vec{n}. \tag{3.1}$$

Nadalje, kako je $P(\vec{v}) \in \pi$, vrijedi $P(\vec{v}) \cdot \vec{n} = 0$ pa množeći (3.1) skalarno s vektorom $\vec{n}$ dobivamo

$$\underbrace{P(\vec{v}) \cdot \vec{n}}_{0} - \vec{v} \cdot \vec{n} = \lambda \underbrace{(\vec{n} \cdot \vec{n})}_{1},$$

odnosno

$$\lambda = -\vec{v} \cdot \vec{n}.$$

Iz (3.1) slijedi

$$P(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}.$$

Stoga za vektore $\vec{v}, \vec{w} \in V$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} P(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) - ((\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \cdot \vec{n})\vec{n} \\ &= (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) - (\alpha(\vec{v} \cdot \vec{n}) + \beta(\vec{w} \cdot \vec{n}))\vec{n} \\ &= (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) - \alpha(\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n} - \beta(\vec{w} \cdot \vec{n})\vec{n} \\ &= \alpha(\vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n})\vec{n}) + \beta(\vec{w} - (\vec{w} \cdot \vec{n})\vec{n}) \\ &= \alpha P(\vec{v}) + \beta P(\vec{w}), \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je P linearni operator.

***Zadatak* 3.6.** Neka je π ravnina kroz ishodište u $V = V^3(O)$ s jediničnim vektorom normale $\vec{n}$ i neka je $Z : V \to V$ zrcaljenje s obzirom na ravninu π. Dokažite da je Z linearni operator.

Rješenje: Znamo da za svaki vektor $\vec{v} \in V$ vrijedi $\vec{v} + Z(\vec{v}) = 2P(\vec{v})$, gdje je P linearni operator iz zadatka 3.3. Stoga je

$$Z(\vec{v}) = 2P(\vec{v}) - \vec{v} = 2(\vec{v} - (\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{n}) - \vec{v} = \vec{v} - 2(\vec{v}\cdot\vec{n})\vec{n}.$$

Stoga za vektore $\vec{v}, \vec{w} \in V$ i skalare $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\begin{aligned} Z(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) &= 2P(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) - (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \\ \text{(jer je } P \text{ linearni operator)} &= 2(\alpha P(\vec{v}) + \beta P(\vec{w})) - (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) \\ &= \alpha(2P(\vec{v}) - \vec{v}) + \beta(2P(\vec{w}) - \vec{w}) \\ &= \alpha Z(\vec{v}) + \beta Z(\vec{w}), \end{aligned}$$

iz čega slijedi da je Z linearni operator. □

Napomena 3.3. *Ukoliko je ravnina razapta vektorima $\vec{a}$ i $\vec{b}$, onda je njen jedinični vektor normale dan s*

$$\vec{n} = \frac{\vec{a}\times\vec{b}}{|\vec{a}\times\vec{b}|}.$$

Ukoliko je ravnina zadana jednadžbom $Ax + By + Cz + D = 0$, onda je njen jedinični vektor normale dan s

$$\vec{n} = \frac{(A, B, C)}{|(A, B, C)|}.$$

***Zadatak* 3.7.** Postoji li linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takav da vrijedi:

(a) $A(1, 2, 3) = (1, 1)$ i $A(2, 4, 6) = (2, 3)$?

(b) $A(1, 0, 0) = (1, 1)$ i $A(2, 0, 0) = (2, 2)$?

(c) $A(1, 0, 1) = (2, 1)$, $A(1, 1, 0) = (1, 2)$, $A(0, 1, -1) = (0, 1)$.

Rješenje:

(a) Ukoliko bi takav linearan operator postojao, vrijedilo bi

$$A(2, 4, 6) = A(2(1, 2, 3)) = 2A(1, 2, 3) = 2(1, 1) = (2, 2).$$

Kako je u zadatku zadano da je $A(2, 4, 6) = (2, 3)$ zaključujemo da takav linearan operator A ne postoji.

(b) Uočimo da je $(2, 0, 0) = 2(1, 0, 0)$ i da je u ovom podzadatku $A(2, 0, 0) = 2A(1, 0, 0)$ pa nemamo problem kao u (a) dijelu zadatka. Primjer linearnog operatora koji zadovoljava uvjet zadatka je

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1).$$

Za zadaću dokažite da je ovako definirana funkcija zaista linearni operator. Uočite da postoje i drugi linearni operatori koji zadovoljavaju uvjete zadatka, npr.

$$A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_1 + x_2).$$

Pokušajte smisliti još neki primjer linearnog operatora koji zadovoljava uvjete zadatka.

(c) Uočimo da vrijedi $(1,0,1)+(0,1,-1)=(1,1,0)$. Ako postoji linearni operator koji zadovoljava uvjete zadatka, onda mora vrijediti

$$A(1,0,1)+A(0,1,-1)=A(1,1,0),$$

tj. $(2,1)+(0,1)=(1,2)$. Budući da smo došli do kontradikcije, zaključujemo da ne postoji linearni operator koji zadovoljava uvjete zadatka.

***Zadatak* 3.8.** Neka je $A: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ linearni operator takav da je

$$A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix},\ A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}.$$

Odredite $A\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right)$ i $A\left(\begin{bmatrix}5 & 5\\ 2 & 5\end{bmatrix}\right)$. Za koje matrice $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ možemo iz zadanih podataka odrediti $A\left(\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\right)$.

Rješenje: Uočimo da je

$$\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}=2\cdot\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)$$

pa je

$$A\left(\begin{bmatrix}0 & 0\\ 2 & 0\end{bmatrix}\right)=2A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)-2A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}-2\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & -2\\ -2 & 0\end{bmatrix}.$$

Nadalje, vrijedi

$$\begin{bmatrix}5 & 5\\ 2 & 5\end{bmatrix}=2\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}+3\cdot\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

pa je

$$A\left(\begin{bmatrix}5 & 5\\ 2 & 5\end{bmatrix}\right)=2A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)+3A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)=2\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & 8\\ 13 & 20\end{bmatrix}.$$

Uočimo da za sve matrice oblika $\lambda\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}$, $\lambda,\mu\in\mathbb{R}$ (isključivo za takve matrice) možemo odrediti njihovu sliku iz zadanih podataka. Vrijedi

$$A\left(\lambda\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)=\lambda A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\right)+\mu A\left(\begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{bmatrix}\right)=\lambda\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda+3\mu & 2\lambda+\mu\\ 3\lambda+2\mu & 4\lambda+4\mu\end{bmatrix}.$$

***Zadatak* 3.9.** Neka je $A:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ linearni operator takav da je

$$A(1,1,1)=(2,3),\ A(1,0,1)=(1,1),\ A(0,1,1)=(0,0).$$

Možemo li iz zadanih podataka potpuno odrediti linearni operator A, tj. odrediti $A(x_1,x_2,x_3)$ za proizvoljni vektor $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$?

Rješenje: Uočimo da je skup $\{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$. Za $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ vrijedi

$$(x_1,x_2,x_3)=(x_1+x_2-x_3)(1,1,1)+(x_3-x_2)(1,0,1)+(x_3-x_1)(0,1,1)$$

pa je

$$\begin{aligned} A(x_1, x_2, x_3) &= (x_1 + x_2 - x_3)A(1,1,1) + (x_3 - x_2)A(1,0,1) + (x_3 - x_1)A(0,1,1) \\ &= (x_1 + x_2 - x_3)(2,3) + (x_3 - x_2)(1,1) + (x_3 - x_1)(0,0) \\ &= (2x_1 + x_2 - x_3, 3x_1 + 2x_2 - 2x_3). \end{aligned}$$

□

***Zadatak* 3.10.** Neka je $\{e_1, e_2\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^2$, $f_1 = (1,1)$, $f_2 = (1,2)$. Neka su $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operatori takvi da je

$$\begin{aligned} Ae_1 &= (1,-1),\ Ae_2 = (1,0) \\ Bf_1 &= (2,-1),\ Bf_2 = (3,-1). \end{aligned}$$

Obrazložite zašto su ovim podacima linearni operatori A i B jedinstveno određeni. Odredite Af_1, Af_2. Što možete zaključiti o operatorima A i B?

Rješenje: Linearni operatori A i B su jedinstveno određeni jer su $\{e_1, e_2\}$ i $\{f_1, f_2\}$ baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. Za proizvoljni vektor $v \in \mathbb{R}^2$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ takvi da je

$$v = \alpha e_1 + \beta e_2,\ v = \gamma f_1 + \delta f_2.$$

Tada je

$$Av = \alpha Ae_1 + \beta Ae_2 = (\alpha + \beta, -\alpha),\ Bv = \gamma Bf_1 + \delta Bf_2 = (2\gamma + 3\delta, -\gamma - \delta).$$

Vrijedi $Af_1 = A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2 = (2,-1)$, $Af_2 = A(e_1 + 2e_2) = Ae_1 + 2Ae_2 = (3,-1)$. Vidimo da je $Af_1 = Bf_1$ i $Af_2 = Bf_2$, odnosno linearni operatori A i B se podudaraju na bazi. Kako je svaki linearni operator jedinstveno zadan svojim djelovanjem na bazi, zaključujemo da je $A = B$. □

***Zadatak* 3.11.** Odredite skalare $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ za koje postoji linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ takav da vrijedi

$$A(1,2,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A(0,2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ A(1,3,0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ A(1,1,1) = \begin{bmatrix} e & f \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Uočimo da je $(1,3,0) = (1,2,-1) + \frac{1}{2}(0,2,2)$ pa mora vrijediti

$$A(1,3,0) = A(1,2,-1) + \frac{1}{2}A(0,2,2),$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Dakle, mora vrijediti $a = 2, b = 2, c = 1, d = 2$.
Sada uočimo da je skup $\{(1,2,-1), (0,2,2), (1,1,1)\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ pa će za $a = 2, b = 2, c = 1, d = 2$, te proizvoljne $e, f \in \mathbb{R}$, A biti dobro definiran i potpuno određen linearan operator.
Za domaću zadaću odredite $A(x_1, x_2, x_3)$ za proizvoljni (x_1, x_2, x_3) u ovisnosti o parametrima $e, f \in \mathbb{R}$.

□

Domaća zadaća

1. Odredite koja su od sljedećih preslikavanja linearni operatori:

   a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A\,(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 - x_2 + 2x_3, -2x_1 + x_3)$,
   b) $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, B\,(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 - x_2 + 2x_3, -2x_1 + x_3 + 1)$,
   c) $C : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, C\,(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3, x_1 - x_2 + 2x_3, -2x_1 + x_3x_2)$,
   d) $D : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, D(x, y) = \langle (x, y) \mid (2 + i, 1)\rangle$, gdje je $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{C}^2$
   e) $E : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}, E(x, y) = \langle (2 + i, 1) \mid (x, y)\rangle$, gdje je $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{C}^2$
   f) $F : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, F(p) = (p(0), p'(1), p''(2))$,
   g) $G : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^3, G(p) = (p^2(0), p'(1), p''(2))$.

2. Za $\alpha \in \mathbb{R}$ dano je preslikavanje $A_\alpha : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A_\alpha(x_1, x_2, x_3) = (x_1, 2x_2, \alpha x_3),\ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

   Dokažite da je A_α linearni operator za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$.

3. Za matricu $A \in M_2(\mathbb{R})$, definirano je preslikavanje $F_A : M_2(\mathbb{R}) \longrightarrow M_2(\mathbb{R})$ tako da je

$$F_A(X) = (\mathrm{tr}A)X^t + (\mathrm{tr}X)A.$$

   Ispitajte je li F_A linearni operator.

4. Odredite sve $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takve da je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$A(x_1, x_2, x_3) = (\alpha x_1 + \beta, \alpha\gamma + 2x_2, \gamma x_3^2 + \alpha x_3)$$

   linearni operator. Obrazložite odgovor.

5. Neka je V vektorski prostori i neka je skup $\{v_1, v_2\}$ linearno nezavisan skup u V. Postoji li linearni operator $A : V \to V$ takav da je

$$A(v_1 + v_2) = v_2,\ A(2v_1 - 3v_2) = v_1,\ A(-v_1 + 4v_2) = 0_V?$$

   Obrazložite odgovor.

6. Neka su $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operatori takvi da vrijedi

$$A(1, 0) = (2, 1),\ A(3, -1) = (7, 2),\ B(2, 3) = (1, 5),\ B(0, 1) = (-1, 1).$$

   Dokažite da je $A = B$ i odredite djelovanje tog operatora na proizvoljnom $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

7. Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ i neka je $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operator takav da vrijedi

$$A(1, 1) = (4, 1),\ A(2, 3) = (13, 1),\ A(-3, -5) = (\alpha, \beta),\ A(0, \gamma) = (\delta, -1).$$

   Odredite $\alpha, \beta, \gamma, \delta$.

3.2 Matrični prikaz linearnog operatora. Jezgra i slika.

***Zadatak* 3.12.** Neka je $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ neka ortonormirana baza za $V^3(O)$, $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$ i neka je A ortogonalna projekcija na pravac s vektorom smjera $\vec{a}$.

a) Odredite matrični prikaz linearnog operatora A u bazi (e).

b) Odredite djelovanje linearnog operatora A na proizvoljnom vektoru, tj. odredite $A(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$.

c) Odredite jezgru i sliku linearnog operatora A.

Mogu li se jezgra i slika linearnog operatora A odrediti i bez računanja? Pronađite neku drugu bazu (f) za $V^3(O)$ u kojoj A ima dijagonalni matrični prikaz sa samo jednim elementom različitim od nule. Je li takva baza (f) jedinstvena?

Rješenje:

a) Iz zadatka 3.3 znamo da je

$$A(\vec{v}) = (\vec{v} \cdot \vec{a_0})\vec{a_0},$$

gdje je $\vec{a_0} = \frac{1}{3}(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$. Stoga je

$$\begin{aligned}
A(\vec{i}) &= (\vec{i} \cdot \vec{a_0})\vec{a_0} = \frac{1}{9}(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) \\
A(\vec{j}) &= (\vec{j} \cdot \vec{a_0})\vec{a_0} = \frac{2}{9}(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) \\
A(\vec{k}) &= (\vec{k} \cdot \vec{a_0})\vec{a_0} = \frac{2}{9}(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}),
\end{aligned}$$

odnosno

$$[A]_{(e)} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

b) Imamo

$$[A(\vec{v})]_{(e)} = [A]_{(e)} \cdot [\vec{v}]_{(e)} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} x + 2y + 2z \\ 2x + 4y + 4z \\ 2x + 4y + 4z \end{bmatrix}.$$

Dakle, $A(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{1}{9}((x + 2y + 2z)\vec{i} + (2x + 4y + 4z)\vec{j} + (2x + 4y + 4z)\vec{k})$.

c) Iz b) dijela zadatka slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}A &= \left\{\frac{1}{9}((x + 2y + 2z)\vec{i} + (2x + 4y + 4z)\vec{j} + (2x + 4y + 4z)\vec{k}) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\right\} \\
&= \left\{\frac{x + 2y + 2z}{9}(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}) \,|\, x, y, z \in \mathbb{R}\right\} = [\{\vec{a}\}].
\end{aligned}$$

Uočimo da se to vidi i bez računanja jer je riječ o ortogonalnoj projekciji na pravac s vektorom smjera $\vec{a}$. Nadalje,

$$\mathrm{Ker}\, A = \{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \in V^3(O) \,|\, A(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = \vec{0}\} = \{x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k} \in V^3(O) \,|\, x+2y+2z = 0\}.$$

Dakle, jezgra linearnog operatora A je ravnina s jednadžbom $x + 2y + 2z = 0$. To smo mogli vidjeti i bez računanja jer je A ortogonalna projekcija na pravac s vektorom smjera $\vec{a}$ pa će se u $\vec{0}$ preslikati točno oni radij-vektori koji su okomiti na vektor $\vec{a}$, a to su oni koji leže u ravnini s vektorom normale $\vec{a}$, dakle, radij-vektori koji leže u ravnini s jednadžbom $x + 2y + 2z = 0$.

Ukoliko bazu (f) odaberemo tako da jedan njezin vektor bude upravo vektor $\vec{f_1} = \vec{a}$, a druga dva vektora budu okomita na $\vec{a}$, tj. za druga dva vektora baze uzmemo bilo koja dva (linearno nezavisna) radij-vektora koja leže u ravnini s jednadžbom $x + 2y + 2z = 0$ (npr. $\vec{f_2} = -2\vec{i} + \vec{j}$ i $\vec{f_3} = -2\vec{i} + \vec{k}$), onda je

$$[A]_{(f)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Takva baza (f) nije jedinstvena jer se isti matrični prikaz dobije ukoliko je $\vec{f_1} = \lambda\vec{a}$ za bilo koji $\lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, a $\vec{f_2}$ i $\vec{f_3}$ bilo koja dva linearno nezavisna radij-vektora koja leže u ravnini okomitoj na $\vec{a}$, tj. u ravnini s jednadžbom $x + 2y + 2z = 0$.

***Zadatak* 3.13.** Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ neka ortonormirana baza za $V^3(O)$. Operator $T : V^3(O) \to V^3(O)$ zrcali vektor u odnosu na pravac razapet vektorom $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$, a zatim ga projicira na xz-ravninu.

a) Odredite matrični prikaz operatora T u bazi $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

b) Odredite djelovanje linearnog operatora T na proizvoljnom vektoru, tj. odredite $T(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$.

c) Nalazi li se vektor $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$ u slici ovog operatora?

d) Nalazi li se vektor $\vec{c} = 2\vec{j}$ u jezgri ovog operatora?

Možete li na pitanje c) odgovoriti i bez računanja?

Rješenje:

a) Označimo s A linearni operator zrcaljenja u odnosu na pravac razapet vektorom $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{k}$, a s B ortogonalnu projekciju na xz–ravninu. Iz zadatka 3.4 znamo da je

$$A(\vec{v}) = 2(\vec{v} \cdot \vec{a_0})\vec{a_0} - \vec{v},$$

gdje je $\vec{a_0} = \frac{1}{\sqrt{5}}(2\vec{i} - \vec{k})$. Stoga je

$$\begin{aligned} A(\vec{i}) &= 2(\vec{i} \cdot \vec{a_0})\vec{a_0} - \vec{i} = \frac{4}{5}(2\vec{i} - \vec{k}) - \vec{i} = \frac{1}{5}(3\vec{i} - 4\vec{k}) \\ A(\vec{j}) &= 2(\vec{j} \cdot \vec{a_0})\vec{a_0} - \vec{j} = -\vec{j} \\ A(\vec{k}) &= 2(\vec{k} \cdot \vec{a_0})\vec{a_0} - \vec{k} = \frac{-2}{5}(2\vec{i} - \vec{k}) - \vec{k} = \frac{1}{5}(-4\vec{i} - 3\vec{k}), \end{aligned}$$

odnosno

$$[A]_{(e)} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, $B(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = x\vec{i} + z\vec{k}$ pa je

$$[B]_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Stoga je

$$[T]_{(e)} = [B \circ A]_{(e)} = [B]_{(e)} \cdot [A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & -5 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix}.$$

b) Imamo

$$[(T(\vec{v})]_{(e)} = [T]_{(e)} \cdot [\vec{v}]_{(e)} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 3x - 4z \\ 0 \\ -4x - 3z \end{bmatrix}.$$

Dakle, $T(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{1}{5}((3x - 4z)\vec{i} - (4x + 3z)\vec{k})$.

c) Iz b) dijela zadatka slijedi da je

$$\mathrm{Im}T = \left\{ \frac{1}{5}((3x - 4z)\vec{i} - (4x + 3z)\vec{k}) \mid x, z \in \mathbb{R} \right\} = [\{3\vec{i} - 4\vec{k}, -4\vec{i} - 3\vec{k}\}],$$

pa je vektor $\vec{b}$ u slici operatora A. Uočimo da se to vidi i bez računanja jer je $\mathrm{Im}(T) = B(A(V^3(O)) = B(V^3(O)) = xz -$ ravnina, a vektor $\vec{b}$ leži u toj ravnini.

d) Vrijedi $T(\vec{c}) = 2T(\vec{j}) = \vec{0}$ pa je vektor $\vec{c}$ u $\mathrm{Ker}\, T$.

$\square$

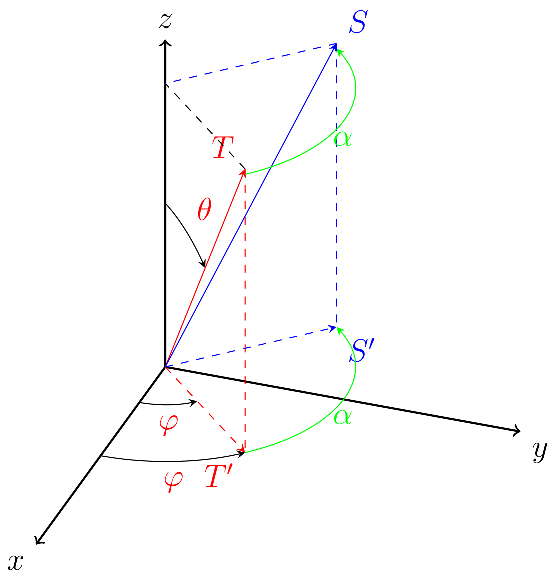
***Zadatak* 3.14.** Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ neka ortonormirana baza za $V^3(O)$ i neka je $R_{z,\alpha} : V^3(O) \to V^3(O)$ funkcija koja vektoru $\vec{v}$ pridružuje vektor nastao rotacijom vektora $\vec{v}$ za kut α oko z–osi.

a) Dokažite da je $R_{z,\alpha}$ linearni operator.

b) Odredite matrični prikaz operatora $R_{z,\alpha}$ u bazi $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ te rang i defekt linearnog operatora T.

Rješenje:

a) Neka je $\vec{v} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$.



Točka T' ima koordinate $(x, y, 0)$. Uvedimo oznaku $r' = \sqrt{x^2+y^2}$. Tada je $x = r'\cos\varphi$, $y = r'\sin\varphi$, odnosno $(x, y, z) = (r'\cos\varphi, r'\sin\varphi, z)$. (Tada je $r' = r\sin\theta$, gdje je $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ i $z = r\cos\theta$ pa su sferne koordinate dane s

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta,$$

ali zapravo nećemo koristiti θ za rješavanje ovog zadatka.) Imamo

$$\begin{aligned} R_{z,\alpha}(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) &= R_{z,\alpha}(r'\cos\varphi\vec{i} + r'\sin\varphi\vec{j} + z\vec{k}) \\ &= r'\cos(\varphi+\alpha)\vec{i} + r'\sin(\varphi+\alpha)\vec{j} + z\vec{k} \\ &= r'(\cos\varphi\cos\alpha - \sin\varphi\sin\alpha)\vec{i} + r'(\sin\varphi\cos\alpha + \cos\varphi\sin\alpha)\vec{j} + z\vec{k} \\ &= (x\cos\alpha - y\sin\alpha)\vec{i} + (y\cos\alpha + x\sin\alpha)\vec{j} + z\vec{k}. \end{aligned}$$

Dokažite za zadaću da je $R_{z,\alpha}$ linearni operator.

b) Imamo

$$[R_{z,\alpha}]_{(e)} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Znamo da je $r(R_{z,\alpha}) = r([R_{z,\alpha}]_{(e)})$. Kako je $\det[R_{z,\alpha}]_{(e)} = 1 \neq 0$, zaključujemo da je $[R_{z,\alpha}]_{(e)}$ regularna matrica pa je $r(R_{z,\alpha}) = r([R_{z,\alpha}]_{(e)}) = 3$, odnosno $\mathrm{Im} R_{z,\alpha} = V^3(O)$. Iz teorema o rangu i defektu slijedi da je $d(R_{z,\alpha}) = 3 - r(R_{z,\alpha}) = 0$, tj. $\mathrm{Ker}\, R_{z,\alpha} = \{\vec{0}\}$. Uočite da se to vidi i bez računanja.

***Zadatak* 3.15.** Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ neka ortonormirana baza za $V^3(O)$. Linearni operator $T : V^3(O) \to V^3(O)$ dani vektor rotira oko z–osi za kut od $45°$, a zatim ga projicira na ravninu razapetu vektorima $\vec{a_1} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{a_2} = \vec{i} - \vec{j}$.

a) Odredite matrični prikaz operatora T u bazi $(e) = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

b) Odredite djelovanje linearnog operatora T na proizvoljnom vektoru, tj. odredite $T(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k})$.

c) Odredite jezgru i sliku operatora T.

Rješenje:

a) Iz prethodnog zadatka slijedi

$$[R_{z,45°}]_{(e)} = \begin{bmatrix} \cos(45°) & -\sin(45°) & 0 \\ \sin(45°) & \cos(45°) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Vektor normale ravnine razapete vektorima $\vec{a_1} = 2\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{a_2} = \vec{i} - \vec{j}$ je dan s

$$\vec{a_1} \times \vec{a_2} = 3\vec{i} + 3\vec{j} - 3\vec{k}$$

pa je normirani vektor normale $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} - \vec{k})$. Iz zadatka 3.5 slijedi

$$P(\vec{v}) = \vec{v} - (\vec{v} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n},$$

iz čega slijedi

$$\begin{aligned}
P(\vec{i}) &= \vec{i} - (\vec{i}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n} = \vec{i} - \frac{1}{3}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = \frac{1}{3}(2\vec{i}-\vec{j}+\vec{k})\\
P(\vec{j}) &= \vec{j} - (\vec{j}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n} = \vec{j} - \frac{1}{3}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = \frac{1}{3}(-\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k})\\
P(\vec{k}) &= \vec{k} - (\vec{k}\cdot\vec{n})\cdot\vec{n} = \vec{k} + \frac{1}{3}(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}) = \frac{1}{3}(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})
\end{aligned}$$

pa je

$$[P]_{(e)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

Sada je

$$[T]_{(e)} = [P\circ R_{z,45^\circ}]_{(e)} = [P]_{(e)}[R_{z,45^\circ}]_{(e)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 1\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & 2\end{bmatrix}.$$

b) Imamo

$$[(T(\vec{v})]_{(e)} = [T]_{(e)}\cdot[\vec{v}]_{(e)} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{3\sqrt{2}}{2} & 1\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{3\sqrt{2}}{2} & 1\\ \sqrt{2} & 0 & 2\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x\\ y\\ z\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}y + z\\ \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}y + z\\ \sqrt{2}x + 2z\end{bmatrix}.$$

Dakle, $T(x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}) = \frac{1}{3}((\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}y + z)\vec{i} + (\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}y + z)\vec{j} + (\sqrt{2}x + 2z)\vec{k})$.

c) Iz b) dijela zadatka slijedi da je

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}T &= \left\{\frac{1}{3}\left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}y + z\right)\vec{i} + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}y + z\right)\vec{j} + \left(\sqrt{2}x + 2z\right)\vec{k}\right) \;:\; x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\\
&= \left\{\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}x(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}) - \frac{3\sqrt{2}}{2}y(\vec{i}-\vec{j}) + z(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\right) \;:\; x,y,z\in\mathbb{R}\right\}\\
&= [\{\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, \vec{i}-\vec{j}\}].
\end{aligned}$$

Vidimo da je $\mathrm{Im}T$ ravnina razapeta vektorima $\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}, \vec{i}-\vec{j}$, odnosno ravnina kroz ishodište čiji je vektor normale

$$(\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\times(\vec{i}-\vec{j}) = 2(\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}),$$

a to je ravnina s jednažbom $x+y-z=0$. To se vidi i bez računanja jer je

$$\mathrm{Im}T = T(V^3(O)) = (P\circ R_{z,45^\circ})(V^3(O)) = P(R_{z,45^\circ}(V^3(O))) = P(V^3(0)).$$

Kako je P projekcija na ravninu s vektorom normale $\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$, to znači da je $\mathrm{Im}T = P(V^3(0))$ ravnina s jednažbom $x+y-z=0$.

Nadalje, iz b) dijela zadatka vidimo da je $x\vec{i}+y\vec{j}+z\vec{k}\in\mathrm{Ker}\,T$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned}
\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{3\sqrt{2}}{2}y + z &= 0\\
\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{3\sqrt{2}}{2}y + z &= 0\\
\sqrt{2}x + 2z &= 0,
\end{aligned}$$

tj. ako i samo ako je $y = 0$, $\sqrt{2}x + 2z = 0$ pa je

$$\operatorname{Ker} T = \left\{ x\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}x\vec{k} \,:\, x \in \mathbb{R} \right\} = \left[\left\{ \vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k} \right\} \right],$$

tj. pravac s vektorom smjera $\vec{i} - \frac{\sqrt{2}}{2}\vec{k}$.

***Zadatak* 3.16.** Odredite neki linearni operator $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ za kojeg vrijedi

$$(1,1,0,0), (0,1,1,0) \in \operatorname{Ker} A, \quad (1,1,1) \in \operatorname{Im} A.$$

Rješenje: Uvedimo oznake $a_1 = (1,1,0,0), a_2 = (0,1,1,0), b_1 = (1,1,1)$. Nadopunimo linearno nezavisni skup $\{a_1, a_2\}$ do baze za $\mathbb{R}^4$, npr.

$$\{(1,1,0,0), (0,1,1,0), (1,0,0,0), (0,0,0,1)\}.$$

Budući da mora vrijediti $(1,1,0,0), (0,1,1,0) \in \operatorname{Ker} A$, stavimo

$$A(1,1,0,0) = A(0,1,1,0) = (0,0,0).$$

Imamo još jedan uvjet, da je $b_1 \in \operatorname{Im} A$ pa možemo staviti npr. $A(1,0,0,0) = (1,1,1)$. Četvrti vektor baze možemo poslati u bilo što, npr. $A(0,0,0,1) = (0,0,0)$. Zatim A proširimo po linearnosti

$$\begin{aligned} &A(x_1(1,1,0,0) + x_2(0,1,1,0) + x_3(1,0,0,0) + x_4(0,0,0,1)) \\ &= x_1A(1,1,0,0) + x_2A(0,1,1,0) + x_3A(1,0,0,0) + x_4A(0,0,0,1) = (x_3, x_3, x_3). \end{aligned}$$

Domaća zadaća

1. Za linearan operator $A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ vrijedi

$$A\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$A\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad A\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & -5 \\ -4 & -4 \end{pmatrix}$$

   Odredite djelovanje operatora A na proizvoljnu matricu $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ te njegov matrični prikaz u standardnoj bazi. Odredite jezgru i sliku operatora A.

2. Za linearan operator $B : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$ vrijedi

$$B(x) = -x + 3x^2, \quad B\left(3 + x - 8x^2\right) = 19, \quad B\left(x^2\right) = -2 + x.$$

   Odredite djelovanje operatora B na proizvoljan polinom $a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$. Odredite rang i defekt operatora. Je li operator B injekcija?

3. Nađite neki operator $C : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ takav da mu jezgra sadrži vektor $(1, -i, 0)$, a slika vektore $(0, 1, -1)$ i $(2i, 1, 0)$. Je li takav operator jedinstven? Za nađeni operator odredite njegov matrični prikaz u bazi
$$\{(1, 0, 1), (i, 1, 0), (0, -i, 1)\}.$$

4. * Neka je $D : \mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_n$ linearan operator takav da je $D(p) = p'' - p$. Odredite jezgru operatora D^2.

   U sljedećim zadacima na $V^3(O)$ je dana ortonormirana baza $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ koja određuje koordinatne osi x, y, z.

5. Dani su linearni operatori A, B, C, D na prostoru $V^3(O)$, pri čemu je

   A zrcaljenje s obzirom na ravninu razapetu vektorima $\vec{i} - \vec{k}, \vec{i} + \vec{k}$,

   B ortogonalna projekcija na pravac razapet vektorom $2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$,

   C rotacija oko z-osi za $30°$,

   D ortogonalna projekcija na ravninu razapetu vektorima $\vec{i} - 2\vec{j}, -\vec{j} + \vec{k}$.

   Za operatore $A \circ B, D \circ B, C \circ A$ i D^2 odredite njihovo djelovanje na proizvoljan vektor iz $V^3(O)$, baze za sliku i jezgru te rang i defekt. Možemo li za zadane kompozicije odrediti rang i defekt geometrijskim zaključivanjem, bez određivanja djelovanja operatora?

6. Neka je $T : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ operator koji vektor prvo rotira oko x-osi za $45°$, a potom ga projicira na pravac razapet vektorom $2\vec{k} - \vec{j}$. Pokažite da je T linearan operator te odredite njegov matrični prikaz u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.

7. Neka je $S : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ operator koji vektor prvo projicira na ravninu $x - 3y = 0$, a potom ga zrcali s obzirom na pravac $y = z$ u yz-ravnini.

   a) Operatoru S odredite matrični prikaz u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$.
   b) Odredite $\operatorname{Im} S$ i $\operatorname{Ker} S$.
   c) Je li S injekcija?
   d) Odredite nalaze li se vektori $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}, \vec{w} = 3\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ u $\operatorname{Im} S$, te ako se nalaze nađite sve vektore takve da je $\vec{v}$, odnosno $\vec{w}$ slika tog vektora.

8. Odredite linearan operator $R : V^3(O) \longrightarrow V^3(O)$ takav da je $R(\vec{k}) = -\vec{i}$ i R je zrcaljenje s obzirom na neku ravninu.

3.3 Prostor linearnih operatora. Dualni prostor.

***Zadatak* 3.17.** Neka je $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ ortonormirana baza prostora $V^2(O)$. Zadani su sljedeći operatori iz prostora $L(V^2(O))$: Z je zrcaljenje s obzirom na os x, P ortogonalna projekcija na os y, a R rotacija oko ishodišta za kut od $60°$.

(a) Može li se svaki operator $A \in L(V^2(O))$ prikazati kao linearna kombinacija operatora Z, P i R?

b) Ako je odgovor u (a) negativan, može li se odabrati još neki operator S koji predstavlja rotaciju oko ishodišta za neki kut, tako da svaki $A \in L(V^2(O))$ ima prikaz pomoću Z, P, R i S?

Rješenje:

(a) Uočimo da je $\dim L(V^2(O)) = (\dim V^2(O))^2 = 4$, a $\dim[\{Z,P,R\}] < 4$, iz čega slijedi $[\{Z,P,R\}] \neq L(V^2(O))$. Dakle, ne može se svaki operator $A \in L(V^2(O))$ prikazati kao linearna kombinacija operatora Z, P i R.

(b) Prisjetimo se da je operator rotacije ravnine oko ishodišta za kut φ dan s

$$\begin{aligned} R_\varphi(x\vec{i}+y\vec{j}) &= (x\cos\varphi - y\sin\varphi)\vec{i} + (x\sin\varphi + y\cos\varphi)\vec{j} \\ &= \cos\varphi(x\vec{i}+y\vec{j}) + \sin\varphi(-y\vec{i}+x\vec{j}). \end{aligned}$$

Nadalje,

$$Z(x\vec{i}+y\vec{j}) = x\vec{i} - y\vec{j},\ P(x\vec{i}+y\vec{j}) = y\vec{j}.$$

Neka je S operator koji predstavlja rotaciju oko ishodišta za neki kut φ. Nadalje, kako je R operator rotacije za kut od $60°$, vrijedi

$$R(x\vec{i}+y\vec{j}) = \frac{1}{2}\left(x\vec{i}+y\vec{j}\right) + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(-y\vec{i}+x\vec{j}\right).$$

Uočimo da vrijedi

$$[\{Z,P,R,S\}] = [\{Z,P,Q\}],$$

gdje je Q zadan s $Q(x\vec{i}+y\vec{j}) = -y\vec{i}+x\vec{j}$. Zaista,

$$R = \frac{1}{2}(Z+2P) + \frac{\sqrt{3}}{2}Q,\ S = \cos\varphi\cdot(Z+2P) + \sin\varphi\cdot Q.$$

Dakle, koji god operator S, koji predstavlja rotaciju oko ishodišta za neki kut odabrali, dimenzija vektorskog prostora $[\{Z,P,R,S\}]$ ne može biti jednaka dimenziji vektorskog prostora $L(V^2(O))$, a to znači da ne postoji operator S koji predstavlja rotaciju oko ishodišta za neki kut, tako da svaki $A \in L(V^2(O))$ ima prikaz pomoću Z, P, R i S.

Drugi način: Ovaj dio zadatka smo mogli riješiti koristeći matrične zapise danih linearnih operatora u istom paru baza (u našem slučaju će to biti par $(e),(e)$, gdje je $(e) = \{\vec{i},\vec{j}\}$ ortonormirana baza za $V^2(O)$). Vrijedi

$$[Z]_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},\ [P]_{(e)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},\ [R]_{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix},\ [S]_{(e)} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Sada vidimo da je

$$\begin{aligned} [\{[Z]_{(e)},[P]_{(e)},[R]_{(e)},[S]_{(e)}\}] &= \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right] \\ &= \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right]. \end{aligned}$$

Dakle $\dim[\{[Z]_{(e)},[P]_{(e)},[R]_{(e)},[S]_{(e)}\}] = 3 < \dim L(M_2(\mathbb{R}))$, odnosno ne postoji linearni operator S koji zadovoljava uvjete zadatka.

***Zadatak* 3.18.** U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$ je zadana baza $\{a_1, a_2, a_3\}$, gdje je $a_1 = (1,0,0)$, $a_2 = (1,1,-1)$, $a_3 = (0,1,1)$. Nađite toj bazi dualnu bazu $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$. Odredite $a_i^*(e_j)$, $i,j = 1,2,3$, gdje su e_1, e_2, e_3 vektori kanonske baze za $\mathbb{R}^3$.

Rješenje: Baza $\{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$ određena je s $a_i^*(a_j) = \delta_{ij}$, $\forall i, j$. Neka je $x = \sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i \in \mathbb{R}^3$. Tada je

$$a_1^*(x) = a_1^* \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_i a_i \right) = \sum_{i=1}^3 \alpha_i a_1^*(a_i) = \alpha_1.$$

Analogno je $a_2^*(x) = \alpha_2$, $a_3^*(x) = \alpha_3$.
Želimo znati kako f djeluje na $x = (x_1, x_2, x_3) = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$ zapisan u kanonskoj bazi. Prikažimo $x = (x_1, x_2, x_3)$ u bazi $\{a_1, a_2, a_3\}$.

$$(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = \alpha_1(1,0,0) + \alpha_2(1,1,-1) + \alpha_3(0,1,1) = (\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, -\alpha_2 + \alpha_3).$$

Rješavanjem sustava dobijemo

$$x = (x_1, x_2, x_3) = \left(x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 \right) a_1 + \left(\frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 \right) a_2 + \left(\frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 \right) a_3.$$

Dakle,

$$\begin{aligned} a_1^*(x_1, x_2, x_3) &= x_1 - \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 \\ a_2^*(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2} x_2 - \frac{1}{2} x_3 \\ a_3^*(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{2} x_2 + \frac{1}{2} x_3 \end{aligned}$$

Posebno je

$$\begin{array}{lll} a_1^*(e_1) = 1 & a_2^*(e_1) = 0 & a_3^*(e_1) = 0 \\ a_1^*(e_2) = -\frac{1}{2} & a_2^*(e_2) = \frac{1}{2} & a_3^*(e_2) = \frac{1}{2} \\ a_1^*(e_3) = \frac{1}{2} & a_2^*(e_3) = -\frac{1}{2} & a_3^*(e_3) = \frac{1}{2} \end{array}$$

□

***Zadatak* 3.19.** Neka je $\mathcal{P}_2 = \{p : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,|\, p \text{ polinom } \operatorname{st} p \leq 2\}$. Neka je $f^* : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$, $f^*(p) = p(0)$. Dokažite da je $f^* \in \mathcal{P}_2^*$. Nadalje, neka je $B = \{1, 1-t, 1-t^2\}$ baza za $\mathcal{P}_2$. Prikažite f^* u dualnoj bazi od B.
Rješenje: Kako je

$$f^*(\alpha p + \beta q) = (\alpha p + \beta q)(0) = \alpha p(0) + \beta q(0) = \alpha f^*(p) + \beta f^*(q),$$

slijedi da je f^* linearaan funkcional. Označimo vektore dualne baze s $\{p_1^*, p_2^*, p_3^*\}$. Tada vrijedi $p_i^*(p_j) = \delta_{ij}$. Kako je $f^* \in V^*$, postoje $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, takvi da je

$$f^* = \alpha p_1^* + \beta p_2^* + \gamma p_3^*.$$

Uočimo da je

$$\begin{aligned} f^*(p_1) &= (\alpha p_1^* + \beta p_2^* + \gamma p_3^*)(p_1) = \alpha, \\ f^*(p_2) &= (\alpha p_1^* + \beta p_2^* + \gamma p_3^*)(p_2) = \beta, \\ f^*(p_3) &= (\alpha p_1^* + \beta p_2^* + \gamma p_3^*)(p_3) = \gamma. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\alpha &= f^*(p_1) = p_1(0) = 1,\\ \beta &= f^*(p_2) = p_2(0) = 1,\\ \gamma &= f^*(p_3) = p_3(0) = 1.\end{aligned}$$

Dakle,

$$f^* = p_1^* + p_2^* + p_3^*.$$

***Zadatak* 3.20.** Zadan je unitaran prostor $\mathbb{R}^3$ sa skalarnim produktom

$$\langle (x_1, x_2, x_3) \,|\, (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3.$$

Za funkcional $f(x, y, z) = x - 2y + 4z$ odredite $a \in \mathbb{R}^3$ takav da je $f(x) = \langle x \,|\, a \rangle$, za sve $x \in \mathbb{R}^3$.
Rješenje: Neka je $a = (a_1, a_2, a_3)$ i neka je $\{e_1, e_2, e_3\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Imamo

$$\begin{aligned}1 &= f(e_1) = \langle e_1 \,|\, a \rangle = 2a_1\\ -2 &= f(e_2) = \langle e_2 \,|\, a \rangle = 3a_2\\ 4 &= f(e_3) = \langle e_3 \,|\, a \rangle = a_3\end{aligned}$$

pa je $a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 4\right)$.

***Zadatak* 3.21.** U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2$ sa skalarnim produktom

$$\langle p \,|\, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\mathrm{d}t$$

zadan je funkcional $f(p) = \dfrac{p(0) + p'(0)}{2}$. Odredite $r \in \mathcal{P}_2$ takav da je $f(p) = \langle p \,|\, r \rangle$, za sve $p \in \mathcal{P}_2$.
Rješenje: Neka je $r(t) = a_0 + a_1t + a_2t^2$ i uzmimo $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$, kanonsku bazu za $\mathcal{P}_2$. Imamo

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &= f(p_0) = \langle p_0 \,|\, r \rangle = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2\\ \frac{1}{2} &= f(p_1) = \langle p_1 \,|\, r \rangle = \frac{2}{3}a_1\\ 0 &= f(p_2) = \langle p_2 \,|\, r \rangle = \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_2.\end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobijemo $r(t) = \dfrac{9}{16} + \dfrac{3}{4}t - \dfrac{15}{16}t^2$.

Domaća zadaća

1. Neka su $F, G, H \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ zadani formulama

$$\begin{aligned}F(x, y, z) &= (2x + z, x + y)\\ G(x, y, z) &= (2y, x)\\ H(x, y, z) &= (x + y + z, x + y)\end{aligned}$$

   Dokažite da su F, G, H linearno nezavisni operatori.

2. Ispitajte koja su od sljedećih preslikavanja linearni funkcionali te ona koja jesu prikažite kao linearnu kombinaciju elemenata baze dualne kanonskoj bazi pripadnog prostora:

   a) $a : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $a(x, y) = (2x, x - y)$
   b) $b : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $b(x, y, z) = x + 3y - 2z$,
   c) $c : \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $c(p) = p'(1)$,
   d) $d : \mathcal{P}_3(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$, $d(p) = 2p(i)$
   e) $e : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $e(X) = \det X$,
   f) $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(X) = \operatorname{tr} X$.

3. U prostoru $M_2(\mathbb{R})$ su zadane matrice
$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$
Dokažite da te matrice čine bazu za $M_2(\mathbb{R})$ i nađite toj bazi dualnu bazu $\{A_1^*, A_2^*, A_3^*, A_4^*\}$, tj. odredite djelovanje elemenata te dualne baze na proizvoljnoj matrici $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

4. U prostoru $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ zadani su polinomi
$$p_1(t) = 2t^2 - 1, \quad p_2(t) = t + t^2, \quad p_3(t) = 1 + 3t + 2t^2.$$
Dokažite da ti polinomi čine bazu za $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ i nađite toj bazi dualnu bazu $\{p_1^*, p_2^*, p_3^*\}$, tj. odredite djelovanje elemenata te dualne baze na proizvoljnom polinomu $a + bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Prikažite linearni funkcional $f(p) = \int_{-1}^{1} p(2t-1)dt$ kao linearnu kombinaciju elemenata dualne baze.

5. U prostoru $(\mathbb{R}^3)^*$ dana je baza $(a^*) = \{a_1^*, a_2^*, a_3^*\}$, pri čemu je
$$a_1^*(x, y, z) = 2x, \quad a_2^*(x, y, z) = x + y + z, \quad a_3^*(x, y, z) = x - 2y - 5z.$$
Odredite bazu $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ za $\mathbb{R}^3$ kojoj je (a^*) dualna baza.

6. Za fiksne vektore $v, w \in \mathbb{R}^2$ definiramo linearni funkcional $f_{v,w}$ na prostoru $M_2(\mathbb{R})$ formulom $f_{v,w}(A) = \langle Av \mid w \rangle$. Ako je $v = (1, 2)$ i $w = (3, 1)$, nađite matricu $B \in M_2(\mathbb{R})$ takvu da vrijedi $f_{v,w}(A) = \operatorname{tr}(AB^\tau)$.

7. U unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2$ polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2, sa skalarnim produktom
$$\langle p \mid q \rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p'(0)q'(0)$$
zadan je linearni funkcional $f : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}$
$$f(p) = \langle p \mid p_1 \rangle + \langle p \mid p_2 \rangle + p(0),$$
pri čemu je $p_1(t) = 2, p_2(t) = t$. Odredite polinom $q \in \mathcal{P}_2$ za kojeg vrijedi $f(p) = \langle p \mid q \rangle$ za sve $p \in \mathcal{P}_2$.

8. Na unitarnom prostoru $\mathcal{P}_2$ realnih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 2 sa skalarnim produktom
$$\langle p \mid q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$$
zadan je linearan funkcional F formulom
$$F(p) = \int_{-1}^{1} p(|x|)dx - p'(0).$$
Nađite polinom $q \in \mathcal{P}_2$ takav da je $F(p) = \langle p \mid q \rangle$ za sve $p \in \mathcal{P}_2$.

3.4 Matrični zapis linearnog operatora u različitim bazama

***Zadatak* 3.22.** Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i neka je $(e') = \{e_1', e_2', e_3'\}$, gdje je

$$e_1' = e_1 + e_2 + e_3,\ e_2' = e_1 + e_2,\ e_3' = e_1.$$

Odredite matricu linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadanog s $Ae_i = e_i'$, $i = 1, 2, 3$, u bazi (e').
Rješenje: Imamo

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [I]_{(e,e')}$$

pa je

$$[A]_{(e')} = [I]_{(e',e)}[A]_{(e)}[I]_{(e,e')} = [I]_{(e,e')}^{-1}[A]_{(e)}[I]_{(e,e')} = [A]_{(e)}^{-1}[A]_{(e)}[A]_{(e)} = [A]_{(e)}.$$

***Zadatak* 3.23.** Zadana je matrica $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ operatora $A : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ u paru baza $(e') = \{(1,0,1), (1,0,-1), (0,1,1)\}$ i $(f') = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Odredite $A(x_1, x_2, x_3)$ za proizvoljan $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.
Rješenje: Neka su (e) i (f) kanonske baze za $\mathbb{R}^3$ i $M_2(\mathbb{R})$. Tada je

$$\begin{aligned}
[Ax]_{(f)} &= [A]_{(f,e)}[x]_{(e)} = [I_{M_2(\mathbb{R})}]_{(f,f')}[A]_{(f',e')}[I_{\mathbb{R}^3}]_{(e',e)}[x]_{(e)} \\
&= [I_{M_2(\mathbb{R})}]_{(f,f')}[A]_{(f',e')}[I_{\mathbb{R}^3}]_{(e,e')}^{-1}[x]_{(e)} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

iz čega slijedi

$$A(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}$$

***Zadatak* 3.24.** Zadan je operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ matricom $[A]_{(e')} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ u bazi $(e') = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,1,1)\}$ te operator $B : \mathbb{R}^3 \to \mathcal{P}_2$ matricom $[B]_{(f',e)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ u paru kanonske baze za $\mathbb{R}^3$ i baze $(f') = \{1, 1-t, 1+t^2\}$ za $\mathcal{P}_2$. Odredite matricu operatora BA u paru kanonskih baza.

Rješenje: Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$, a (f) kanonska baza za $\mathcal{P}_2$. Tada je

$$\begin{aligned}
[BA]_{(f,e)} &= [B]_{(f,e)}[A]_{(e)} = [I_{\mathcal{P}_2}]_{(f,f')}[B]_{(f',e)}[I_{\mathbb{R}^3}]_{(e,e')}[A]_{(e')}[I_{\mathbb{R}^3}]_{(e',e)} \\
&= [I_{\mathcal{P}_2}]_{(f,f')}[B]_{(f',e)}[I_{\mathbb{R}^3}]_{(e,e')}[A]_{(e')}[I_{\mathbb{R}^3}]^{-1}_{(e,e')} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

□

***Zadatak* 3.25.** (2. kolokvij 2021.)

(a) Neka je S matrica prijelaza iz (b) u (b'), a T matrica prijelaza iz (b') u (b), pri čemu su (b) i (b') dvije baze prostora $\mathbb{R}^3$, a matrice S i T zadane s

$$S = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & x \end{bmatrix}, T = \begin{bmatrix} 1 & y & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ z & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite x, y, z.

(b) Neka su $(e) = \{(1,0), (0,1)\}$ i $(e') = \{(2,0), (0,-1)\}$ baze prostora $\mathbb{R}^2$ te $(f) = \{1, t, t^2\}$ i $(f') = \{t^2 - 1, t+1, 2t + t^2\}$ baze prostora $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$. Linearni operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ ima sljedeći matrični prikaz u paru baza (e') i (f') :

$$[A]_{(f',e')} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 4 & -3 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Odredite matrični prikaz operatora A u paru paza (e) i (f) te odredite djelovanje operatora A na proizvoljan vektor $x \in \mathbb{R}^2$. Je li operator A epimorfizam? Obrazložite.

Rješenje:

(a) Znamo da vrijedi $[I]^{-1}_{(b,b')} = [I]_{(b',b)}$, odnosno $S^{-1} = T$. Provjeravamo za koje $x, y, z \in \mathbb{R}$ je $ST = I$:

$$ST = \begin{bmatrix} 1 & -y-2 & 0 \\ 0 & -y-1 & 0 \\ xz+2 & 3x+y-1 & x \end{bmatrix},$$

iz čega možemo zaključiti da je $x = 1$, $y = -2$, $z = -2$.

(b) Vrijedi $[A]_{(f,e)} = [I]_{(f,f')}[A]_{(f',e')}[I]_{(e',e)}$ pa najprije trebamo odrediti $[I]_{(f,f')}$ i $[I]_{(e',e)}$:

$$[I]_{(f,f')} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; I(e',e) = I(e,e')^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Tada je

$$[A]_{(f,e)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Za proizvoljan $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$[Ax]_{(f)} = [A]_{(f,e)}[x]_{(e)} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x_1 + x_2 \\ 3x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

pa je djelovanje operatora A na proizvoljan vektor dano s

$$A(x_1, x_2) = 2x_1 + x_2 + 3x_2 t + (-x_1 + 2x_2)t^2.$$

Znamo da rang operatora A može biti najviše $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$ pa kako je dimenzija kodomene $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ jednaka 3, operator nije epimorfizam.

***Zadatak* 3.26.** Postoje li $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da za neke dvije baze (e) i (e') za $\mathbb{R}^3$ i neki linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ vrijedi

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 2 & a-b & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{bmatrix}, \quad [A]_{(e')} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}?$$

Obrazložite odgovor.

Rješenje: Pretpostavimo da takvi $a, b \in \mathbb{R}$ postoje. Tada su matrice $[A]_{(e)}$ i $[A]_{(e')}$ slične matrice pa je

$$\mathrm{tr}[A]_{(e)} = \mathrm{tr}[A]_{(e')},$$

odnosno $2 + a + b = 6$, odakle slijedi $a + b = 4$. Nadalje, slične matrice imaju istu determinantu pa je $\det[A]_{(e)} = \det[A]_{(e')}$, odnosno $2ab = 8$, odakle slijedi $ab = 4$. Sada imamo $b = 4 - a$ i $a(4 - a) = 4$, odnosno $a^2 - 4a + 4 = 0$. Jedino rješenje te kvadratne jednadžbe je $a = 2$, odakle slijedi $b = 4 - a = 2$. Za $a = b = 2$ je $[A]_{(e)} = 2I$.
Iako matrice $2I$ i $[A]_{(e')}$ imaju isti trag i determinantu, one nisu slične jer je matrica $2I$ slična samo samoj sebi. Zaista, ako je $T \in M_3(\mathbb{R})$ regularna matrica, onda je $T^{-1}(2I)T = 2I$.
Dakle, matrice $[A]_{(e)}$ i $[A]_{(e')}$ nisu slične ni za koje $a, b \in \mathbb{R}$.

***Zadatak* 3.27.** (2. kolokvij 2021.)

(a) Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ slične matrice. Dokažite da su njihovi karakteristični polinomi jednaki, tj. da je $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)$, za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$.

(b) Odredite, ako postoje, sve $x, y \in \mathbb{R}$ za koje su matrice

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & x \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & y \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

slične matrice. Ako takvi $x, y \in \mathbb{R}$ ne postoje, obrazložite zašto ne postoje.

Rješenje:

(a) Kako su A i B slične matrice, postoji regularna matrice $T \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $B = T^{-1}AT$. Nadalje, imamo

$$\begin{aligned} k_B(\lambda) &= \det(B - \lambda I) \\ &= \det(T^{-1}AT - \lambda(T^{-1}IT)) \\ &= \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) \\ &= \det(T^{-1}) \det(A - \lambda I) \det T \\ &= \det(T^{-1}) \det T \det(A - \lambda I) \\ &= \det(A - \lambda I) = k_A(\lambda), \end{aligned}$$

za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$.

(b) Ako su A i B slične matrice, onda mora vrijediti $\operatorname{tr}(A) = \operatorname{tr}(B)$, $\det A = \det B$ i, prema a) dijelu zadatka, $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)$, odnosno $-2 + y = 0$, $x = 0$ i $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)$. Dakle, ako su A i B slične matrice, onda je $x = 0$, $y = 2$. No, u tom slučaju je

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

pa je $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (-2 - \lambda)(-\lambda)(2 - \lambda)$, dok je $k_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = (-\lambda)(-1 - \lambda)(1 - \lambda)$. Prema tome, $k_A(\lambda) \neq k_B(\lambda)$ pa A i B nisu slične matrice. Dakle, ne postoje $x, y \in \mathbb{R}$ za koje su zadane matrice slične.

□

Domaća zadaća

1. Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i $(e') = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$ baza zadana s $e'_1 = (1, 1, 3)$, $e'_2 = (1, 1, 4)$, $e'_3 = (5, 2, 1)$. Odredite matricu prijelaza iz baze (e) u bazu (e') te matricu prijelaza iz baze (e') u bazu (e). Nadalje, neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, A\,(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_2 + x_3, x_3)$. Odredite matrični zapis operatora A u sve četiri moguće kombinacije baza (e) i (e').

2. Neka je $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearan operator koji u bazi $(e') = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ ima matrični zapis

$$[A]_{(e')} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

pri čemu je $e'_1 = (2, 0, 1, -1), e'_2 = (0, 0, 2, -3), e'_3 = (1, 2, -1, 0), e'_4 = (2, 1, 1, -2)$.

   a) Za $[x]_{(e)} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 & 1 \end{bmatrix}^T$ odredite $[x]_{(e')}$ i $[Ax]_{(e)}$.

   b) Za $[y]_{(e')} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$ odredite $[y]_{(e)}$ i $[Ay]_{(e)}$.

3. Zadan je linearan operator $B : \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ s

$$A\left(at^2 + bt + c\right) = (a - c)t^3 + bt^2 - 3ct + 2a + b.$$

Odredite matrični zapis operatora B u paru baza $\{1, 1 - t^2, t + t^2\}$ za $\mathcal{P}_2(\mathbb{R})$ i

$\{1+t+t^2, 2t, 1+t^3, -1-t\}$ za $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Postoji li par baza u kojem B ima matrični prikaz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$?

4. Neka su $(e), (e')$ baze za $\mathbb{R}^2$, te neka je S matrica prijelaza iz baze (e) u bazu (e') i T matrica prijelaza iz baze (e') u bazu (e). Odredite $x, y \in \mathbb{R}$ ako su S i T dane s
$$\begin{bmatrix} 6 & -5 \\ x & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & y \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$
Nadalje, operator $C : \mathbb{R}^2 \to M_2(\mathbb{R})$ je zadan svojim matričnim zapisom
$$[C]_{(f',e')} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$
Odredite $[C]_{(f,e)}$, pri čemu je $(f) = \{F_1, F_2, F_3, F_4\}$ kanonska baza za $M_2(\mathbb{R})$ te $(f') = \{F_1 + F_2, F_1 - F_3 + F_4, F_2 + F_4, F_3\}$.

5. Zadani su sljedeći operatori na $V^3(O)$: ortogonalna projekcija na ravninu razapetu vektorima $\vec{i} + \vec{j}, \vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$, zrcaljenje s obzirom na pravac zadan vektorom $\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k}$. Odredite matrične prikaze tih operatora u ortonormiranoj bazi $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ tako da
   a) izračunate slike vektora baze $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ pa napišete traženu matricu,
   b) odredite matrični prikaz zadanih operatora u prikladnoj bazi te pomoću matrica prijelaza odredite traženu matricu.

6. Postoje li skalari $x, y \in \mathbb{R}$ takvi da sljedeća matrica bude matrica prijelaza iz baze $(a) = \{(0, x, 0), (1, 0, 0), (0, 1, y)\}$ vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$ u kanonsku bazu $(e) = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$
   a) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$,
   b) $B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

   Ukoliko postoje, odredite ih, a u suprotnom dokažite da ne postoje.

7. Zadan je linearni operator $T : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_1$ s
$$T\left(ax^2 + bx + c\right) = (a + 2b + 3c)x + (a + b + 2c).$$
   a) Odredite matrični zapis operatora T u paru baza $\{p_1, p_2, p_3\}$ i $\{q_1, q_2\}$ pri čemu je
$$p_1(x) = 1,\ p_2(x) = -1 + x,\ p_3(x) = -2 + x^2,$$
$$q_1(x) = 2 - x,\ q_2(x) = 1 - x.$$
   b) Odredite matrični zapis vektora $T(p)$ u bazi $\{q_1, q_2\}$, gdje je $p(x) = -1 + 2x^2$.
   c) Nađite neki par baza tako da matrični zapis operatora T u tom paru baza bude kanonska matrica odgovarajućeg ranga.

3.5 Svojstvene vrijednosti i svojstveni vektori linearnog operatora

***Zadatak* 3.28.** Linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadan je svojom matricom u kanonskoj bazi

$$[A]_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore ovog operatora te algebarske i geometrijske kratnosti svojstvenih vrijednosti. Može li se operator A dijagonalizirati?

Rješenje:

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (2 - \lambda)(\lambda - 1)^2$$

pa je $\sigma(A) = \{1, 2\}$, algebarske kratnosti su $a(1) = 2$, $a(2) = 1$. Odredimo svojstvene potprostore:

$\boxed{V_A(1)}$ Rješavamo $(A - I)x = 0$ i dobivamo $x_1 = x_3$, $x_2 = x_3$ pa je $\{(1, 1, 1)\}$ baza za $V_A(1)$. Dakle, $g(1) = 1$.

$\boxed{V_A(2)}$ Rješavamo $(A - 2I)x = 0$ i dobivamo $x_1 = 0$, $x_2 = x_3$ pa je $\{(0, 1, 1)\}$ baza za $V_A(2)$. Dakle, $g(2) = 1$.

Kako je $g(1) \neq a(1)$, zaključujemo da se operator A ne može dijagonalizirati. □

***Zadatak* 3.29.** (popravni kolokvij 2023.) Neka su $(a) = \{a_1, a_2, a_3\}$ i $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ neke dvije baze za $\mathbb{R}^3$ pri čemu vrijedi

$$b_1 = a_1 + 2a_2 - a_3, \quad b_2 = 2a_1 + a_3, \quad b_3 = 2a_1 + a_2.$$

Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linearni operator koji u bazi (b) ima sljedeći matrični prikaz:

$$[A]_{(b)} = \begin{bmatrix} -3 & 4 & 0 \\ -6 & 7 & 0 \\ 8 & -8 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Odredite matrični prikaz operatora A u bazi (a).

b) Odredite spektar od A. Je li A monomorfizam?

c) Izrazite $[A]_{(b)}^{2023}$ preko $[A]_{(a)}^{2023}$ i matrica prijelaza $[I]_{(a,b)}, [I]_{(b,a)}$.

Rješenje:

a) Matrice prijelaza su dane s

$$[I]_{(a,b)} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad [I]_{(b,a)} = ([I]_{(a,b)})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

pa iz $[A]_{(a)} = [I]_{(a,b)}[A]_{(b)}[I]_{(b,a)}$ slijedi

$$[A]_{(a)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

b) Iz a) dijela lako vidimo da je $\sigma(A) = \{1, 3\}$. Vidimo da je $r(A) = 3$ (iz matrice) pa je $d(A) = 3 - r(A) = 0$, odakle slijedi da je A monomorfizam. Tu činjenicu možemo dokazati na još jedan način. Budući da $0 \notin \sigma(A)$, slijedi da je $\det A \neq 0$ pa je A regularan operator, a onda je i monomorfizam.

c) Vrijedi

$$[A]_{(b)}^{2023} = \underbrace{([I]_{(b,a)}[A]_{(a)}[I]_{(a,b)})([I]_{(b,a)}[A]_{(a)}[I]_{(a,b)})\ldots([I]_{(b,a)}[A]_{(a)}[I]_{(a,b)})}_{2023} = [I]_{(b,a)}[A]_{(a)}^{2023}[I]_{(a,b)}$$

jer $[I]_{(b,a)} = ([I]_{(a,b)})^{-1}$. Budući da je $[A]_{(a)}$ dijagonalna matrica, onda je $[A]_{(a)}^{2023}$ dijagonalna matrica ciji su elementi na dijagonali redom 1, 1 i 3^{2023} pa je

$$[A]_{(b)}^{2023} = \begin{bmatrix} 3 - 2 \cdot 3^{2023} & -2 + 2 \cdot 3^{2023} & 0 \\ 3 - 3^{2024} & -2 + 3^{2024} & 0 \\ -4 + 4 \cdot 3^{2023} & 4 - 4 \cdot 3^{2023} & 1 \end{bmatrix}$$

***Zadatak* 3.30.** (kolokvij 2018.) Linearni operator $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je u kanonskoj bazi matricom:

$$[B]_{(e)} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Nađite bazu prostora $\mathbb{R}^3$ u kojoj je matrica operatora B dijagonalna (ako takva baza postoji).

Rješenje: Najprije ćemo izračunati svojstvene vrijednosti operatora B kao nultočke karakterističnog polinoma, tj.

$$0 = k_B(\lambda) = \det\big([B]_{(e)} - \lambda I\big) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 3 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 3 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda-5)(\lambda+1),$$

odakle zaključujemo da je $\sigma(B) = \{-1, 2, 5\}$. Uočimo da su algebarske kratnosti svih svojstvenih vrijednosti jednake 1 pa su onda i geometrijske kratnosti svih svojstevnih vrijednosti jednake 1, odnosno, svi svojstveni potprostori su jednodimenzionalni. Za svaku od svojstvenih vrijednosti računamo pripadne svojstvene potprostore kao rješenja homogenog sustava linearnih jednadžbi s matricom sustava $B - \lambda I$, gdje je $\lambda \in \{-1, 2, 5\}$. Dobivamo:

$$V_B(-1) = [\{(-1, 0, 1)\}],\ V_B(2) = [\{(0, 1, 0)\}],\ V_B(5) = [\{(3, 4, 3)\}]$$

Baza u kojoj je matrični prikaz operatora B dijagonalna matrica (sa svojstvenim vrijednostim na dijagonali) je sastavljena od svojstvenih vektora, npr. $(b) = \{(-1, 0, 1), (0, 1, 0), (3, 4, 3)\}$ i vrijedi

$$[B]_{(b)} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Za zadaću odredite $[B]_{(e)}^{2024}$.

***Zadatak* 3.31.** Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje se linearni operator $A : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi zadan s

$$[A]_{(e)} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ 6 & 6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati.

Rješenje: Vrijedi $k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2(\lambda - x)$. Razlikujemo tri slučaja:

- $x \notin \{1, -2\}$

  U tom slučaju je $\sigma(A) = \{1, -2, x\}$, $a(1) = 1, a(-2) = 2, a(x) = 1$. Kako je geometrijska kratnost manja ili jednaka algebarskoj, vrijedi $g(1) = a(1) = 1, g(x) = a(x) = 1$. Trebamo još odrediti $g(-2)$. Vrijedi $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 = a(-2)$. Dakle, u ovom slučaju se operator može dijagonalizirati.

- $x = -2$

  U tom slučaju je $\sigma(A) = \{1, -2\}$, $a(1) = 1, a(-2) = 3$. Kako je geometrijska kratnost manja ili jednaka algebarskoj, vrijedi $g(1) = a(1) = 1$. Trebamo još odrediti $g(-2)$. Vrijedi $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 < a(-2)$. Dakle, u ovom slučaju se operator ne može dijagonalizirati.

- $x = 1$

  U tom slučaju je $\sigma(A) = \{1, -2\}$, $a(1) = 2, a(-2) = 2$. Vrijedi $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 = a(-2)$, $g(1) = d(A - I) = 4 - r(A - I) = 2 = a(1)$. Dakle, u ovom slučaju se operator može dijagonalizirati.

Operator se može dijagonalizirati ako i samo ako je $x \neq -2$. □

Domaća zadaća

1. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene potprostore sljedećih linearnih operatora. Za svaki od linearnih operatora navedite postoji li baza u kojoj mu je matrični zapis dijagonalna matrica. Ako takva baza postoji, odredite ju.

   a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\quad A(x, y, z) = (x, 4x - 3y, 4x - 4y + z)$,

   b) $B : \mathcal{P}_2(\mathbb{C}) \to \mathcal{P}_2(\mathbb{C})$, $\quad B\left(a + bt + ct^2\right) = a - 3b - c + (-a - b - 3c)t + (-2a + 2b + 2c)t^2$,

   c) $C : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$, $\quad C(x, y, z) = (2x + y + z, 2x + y - 2z, -x - 2z)$,

   d) $D : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$, $\quad D(X) = \frac{1}{2}\left(X + X^T\right)$.

2. Zadan je linearan operator $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ sa svojstvenim vrijednostima $\lambda_1 = -1$ i $\lambda_2 = 4$ i pripadnim svojstvenim potprostorima $V_{\lambda_1}(A) = [\{(1, 2)\}]$ i $V_{\lambda_2}(A) = [\{(0, 1)\}]$. Odredite djelovanje operatora A na opći vektor $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, tako da ga najprije zapišete u takvoj bazi da matrica bude dijagonalna, a zatim iskoristite matrice prijelaza.

3. Prikažite sljedeće operatora iz $L\left(V^3(O)\right)$ u takvoj bazi da matrica bude dijagonalna, a zatim odredite djelovanje na opći vektor iz $V^3(O)$ pomoću matrica prijelaza.

   a) ortogonalna projekcija na pravac s vektorom smjera $2\vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$,

b) zrcaljenje s obzirom na ravninu razapetu vektorima $\vec{i}$ i $\vec{j} - \vec{k}$.

Možemo li za ove operatore zaključiti kakav im je spektar te odrediti dimenzije svojstvenih potprostora i prije određivanja njihovih matričnog prikaza (u bilo kojoj bazi)?

4. Za sljedeće matrice A odredite matricu P takvu da je $A = PDP^{-1}$, gdje je D dijagonalna matrica (ako je to moguće):

$$a)\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}, \quad b)\begin{bmatrix} 1 & -5 & 8 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix}, \quad c)\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5. Pokažite da vrijedi $(PDP^{-1})^n = PD^nP^{-1}$. Koristeći tu tvrdnju odredite A^n za one matrice iz prethodnog zadatka za koje postoji tražena matrica P.