MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij - 29. kolovoza 2022.

ZADATAK 1

(10 bodova) Neka je preslikavanje $A : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ dano s

$$A(z_1, z_2) = i\ \overline{z}_1 + \mathrm{Re}(z_1 + z_2).$$

a) Provjerite je li A linearan operator između kompleksnih vektorskih prostora $\mathbb{C}^2$ i $\mathbb{C}$. Ako jest, odredite mu rang i defekt te po jednu bazu za sliku i jezgru.

b) Provjerite je li A linearan operator između realnih vektorskih prostora $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$ i $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}$. Ako jest, odredite mu rang i defekt te po jednu bazu za sliku i jezgru.

Rješenje:

a) $iA(1,0) = i(i+1) \neq 1 = A(i,0)$, pa A nije linearan operator na kompleksnom vektorskom prostoru.

b) Za $\alpha \in \mathbb{R}, z_1, z_2, w_1, w_2 \in \mathbb{C}$ imamo

$$\begin{aligned} A(\alpha(z_1, z_2)) &= A(\alpha z_1, \alpha z_2) = i\ \overline{\alpha z_1} + \mathrm{Re}(\alpha z_1 + \alpha z_2) = i\ \overline{\alpha}\ \overline{z_1} + \mathrm{Re}(\alpha(z_1 + z_2)) \\ &= i\ \alpha \overline{z_1} + \alpha \mathrm{Re}(z_1 + z_2) = \alpha(i\ \overline{z}_1 + \mathrm{Re}(z_1 + z_2)) \\ &= \alpha A(z_1, z_2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A((z_1, z_{,2}) + (w_1, w_2)) &= A(z_1 + w_1, z_2 + w_2) = i\ \overline{z_1 + w_1} + \mathrm{Re}(z_1 + w_1 + z_2 + w_2) \\ &= i\ (\overline{z}_1 + \overline{w}_1) + \mathrm{Re}(z_1 + z_2 + w_1 + w_2) \\ &= i\ \overline{z}_1 + i\ \overline{w}_1 + \mathrm{Re}(z_1 + z_2) + \mathrm{Re}(w_1 + w_2) \\ &= A(z_1, z_2) + A(w_1, w_2). \end{aligned}$$

Dakle A je linearan operator na $\mathbb{C}^2_{\mathbb{R}}$.

Za sliku od A uočimo da je $A(1,0) = i+1$ te $A(i,0) = 1$, pa je $2 \leq \dim \mathrm{Im}A \leq \dim \mathbb{C}^2_{\mathbb{R}} = 2$, odnosno $\mathrm{Im}A = \mathbb{C}$, te $r(A) = \dim \mathrm{Im}A = 2$, a jedna baza slike je $\{1, i\}$.

Odredimo jezgru. Ako je $(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) \in \mathrm{Ker}A$, gdje su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ tada je

$$0 = A(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = ix_1 + (y_1 + x_1 + x_2).$$

Slijedi $x_1 = 0,\ y_1 + x_1 + x_2 = 0$ te $y_2 \in \mathbb{R}$, odnosno $x_1 = 0,\ x_2 = -y_1$ te $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Dakle

$$(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (iy_1, -y_1 + iy_2) = y_1(i, -1) + y_2(0, i).$$

Imamo da je $d(A) = \dim \mathrm{Ker}A = 2$, a jedna baza jezgre je $\{(i, -1), (0, i)\}$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij - 29. kolovoza 2022.

ZADATAK 2

(10 bodova) Odredite ONB u kojoj se linearni operator $A \in L(\mathbb{F}^3)$, čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi dan s $A(e) = \begin{bmatrix} 9 & -1 & -2 \\ -1 & 9 & -2 \\ -2 & -2 & 6 \end{bmatrix}$, dijagonalizira.

Rješenje: Iz činjenice da vrijedi $A(e)^* = A(e)^T = A(e)$ te da je (e) ONB slijedi da se A može dijagonalizirati u nekoj (drugoj) ONB.

Računamo:

$$0 = k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 9-\lambda & -1 & -2 \\ -1 & 9-\lambda & -2 \\ -2 & -2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -(\lambda-10)^2(\lambda-4).$$

iz čega slijedi da je $\lambda_1 = 10$ te $\lambda_2 = 4$.

Sada za $\lambda_1 = 10$ imamo:

$$V_A(\lambda_1)\ldots \begin{bmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -1 & -1 & -2 \\ -2 & -2 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(\lambda_1) = [\{v_1, v_2\}], \quad v_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $a(\lambda_1) = g(\lambda_1) = 2$.

Za $\lambda_2 = 4$ imamo:

$$V_A(\lambda_2)\ldots \begin{bmatrix} 5 & -1 & -2 \\ -1 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(\lambda_2) = [\{v_3\}], \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, $a(\lambda_2) = g(\lambda_2) = 1$.

Operator A se dijagonalizira u bazi $(f) = \{v_1, v_2, v_3\}$, ali to nije ONB. Uočimo da je $\langle v_1, v_3\rangle = 0$, $\langle v_2, v_3\rangle = 0$, ali $\langle v_1, v_2\rangle \neq 0$. Stoga moramo Gram–Schmidtovim postupkom ortonormirati bazu (f):

$$\hat{v}_1 = \frac{v_1}{||v_1||} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$b_2 = v_2 - \langle v_2, \hat{v}_1\rangle \hat{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{5} \\ 1 \\ -\frac{2}{5} \end{bmatrix},$$

$$\hat{v}_2 = \frac{b_2}{||b_2||} = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{bmatrix} -1 \\ 5 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Na kraju normiramo v_3 jer je okomit na $\hat{v}_1$ i $\hat{v}_2$ pa je:

$$\hat{v}_3 = \frac{v_3}{||v_3||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dakle, A se dijagonalizira u ONB $\hat{f} = \{\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3\}$, tj. za matrice

$$D = A(\hat{f}) = \begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} \hat{v}_1 & \hat{v}_2 & \hat{v}_3 \end{bmatrix}$$

vrijedi $A(e) = VDV^*$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij - 29. kolovoza 2022.

ZADATAK 3

Neka je L vektorski potprostor od $M_2(\mathbb{R})$ zadan s

$$L = \left\{ A \in M_2(\mathbb{R}) : A + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A^T = 0 \right\}.$$

a) (8 bodova) Odredite $L^\perp$ s obzirom na standardni skalarni produkt na $M_2(\mathbb{R})$ i ortogonalnu projekciju matrice $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ na $L^\perp$.

b) (2 boda) Neka je $P : M_2(\mathbb{R}) \to L^\perp$ ortogonalni projektor. Odredite svojstvene vrijednosti linearnog operatora P, njihove algebarske i geometrijske kratnosti te pripadne svojstvene potprostore.

Rješenje:

a) Za $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ iz $A + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} A^T = 0$ dobijemo $a = c = -b = d$. Neka je $F_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.
Tada je $L = [\{F_1\}]$.
Za $X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{bmatrix}$, iz $\langle X, F_1 \rangle = 0$ imamo $x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0$.
Dakle $L^\perp = [\{F_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, F_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, F_4 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\}]$. Označimo $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$. Tražena projekcija je (lakše je matrici B oduzeti ortogonalnu projekciju na L)

$$B - \langle B, F_1 \rangle \frac{1}{||F_1||^2} F_1 = B - \frac{1}{2} F_1.$$

b) $\dim L^\perp = \dim(M_2(\mathbb{R})) - \dim(L) = 4 - 1 = 3$.
Neka su $0 \neq f_1 \in L$, $f_2, f_3, f_4 \in L^\perp$ linearno nezavisni, te $(f) = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ baza za $M_2(\mathbb{R})$.
Vrijedi

$$P_{(f)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\sigma(P) = \{0, 1\}$,
$V_P(0) = L$, $a(0) = g(0) = 1$,
$V_P(1) = L^\perp$, $a(1) = g(1) = 3$.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij - 29. kolovoza 2022.

ZADATAK 4

(10 bodova) Svedite formu

$$q(x,y,z) = x^2 + y^2 + 9z^2 - 2xy + 4xz - 4yz$$

na kanonski oblik, odredite joj definitnost te navedite vezu među koordinatama ("novim" i "starim").

Rješenje: Formi q pridružujemo matricu

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{bmatrix}$$

te ju želimo dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi. Računamo njen karakteristični polinom:

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & -2 & 9-\lambda \end{vmatrix} = \cdots = -\lambda(\lambda-1)(\lambda-10).$$

Dakle, $\sigma(A) = \{0, 1, 10\}$. Izračunajmo pripadne svojstvene vektore:

$$V_A(0)\ldots \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(0) = [\{v_1\}], \quad v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$V_A(1)\ldots \begin{bmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 2 & -2 & 8 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(1) = [\{v_2\}], \quad v_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{2}$$

$$V_A(10)\ldots \begin{bmatrix} -9 & -1 & 2 \\ -1 & -9 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(1) = [\{v_3\}], \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Kako je matrica A simetrična, njeni svojstveni potprostori su međusobno okomiti. Dakle, da pronađemo ortonormiranu bazu u kojoj se A dijagonalizira, dovoljno je normirati svaki od gore dobivenih svojstvenih vektora. Dobivamo:

$$\hat{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \ \hat{v}_2 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \ \hat{v}_3 = \frac{1}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Definiramo sada matricu

$$Q = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -2/3 & 1/(3\sqrt{2}) \\ 1/\sqrt{2} & 2/3 & -1/(3\sqrt{2}) \\ 0 & 1/3 & 4/(3\sqrt{2}) \end{bmatrix}$$

i tada vrijedi $A = QDQ^T$, pri čemu je

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}.$$

Definirajmo nove koordinate

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

u kojima forma poprima kanonski oblik:

$$q(x, y, z) = (y')^2 + 10(z')^2.$$

Forma je pozitivno semidefinitna.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Popravni kolokvij - 29. kolovoza 2022.

ZADATAK 5

(10 bodova)

a) Neka je $\mathcal{D}$ prostor dijagonalnih matrica u $M_n(\mathbb{F})$. Odredite $\mathcal{D}^\perp$, pri čemu $M_n(\mathbb{F})$ promatramo kao unitarni prostor uz standardni skalarni produkt.

b) Neka je V realni konačnodimenzionalni unitarni prostor i $A \in L(V)$. Ako se A može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi za V, dokažite da je tada A hermitski operator.

c) Vrijedi li tvrdnja b) i bez pretpostavke da je baza (u kojoj se A dijagonalizira) ortonormirana? Odgovor obrazložite.

Rješenje:
a) $\mathcal{D} = [\{E_{i,i} : i = 1, \ldots, n\}]$. Za $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{F})$ imamo

$$A \in \mathcal{D}^\perp \iff \forall i \quad a_{i,i} = \langle A, E_{i,i} \rangle = 0.$$

Slijedi $\mathcal{D}^\perp = [\{E_{i,j} : i, j = 1, \ldots, n; i \neq j\}]$.
b) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$ i A se dijagonalizira u nekoj u onb (e), pa imamo

$$(A^*)_{(e)} = (A_{(e)})^* = A_{(e)}.$$

Slijedi $A^* = A$.
c) Tvrdnja ne vrijedi, npr. za $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan s $A(e_1) = e_1$, te $A(e_1 + e_2) = 2e_1 + 2e_2$, imamo:

$$\langle Ae_1, e_2 \rangle = 0 \neq 1 = \langle e_1, Ae_2 \rangle.$$