

LINEARNA ALGEBRA 1

Četvrti ispitni rok - 9. rujna 2026.

1. (20 bodova) U prostoru $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ zadani su skupovi

$$M = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = 1, p(1) = 0\}$$

i

$$N = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(-1) = p(1) = 0\}.$$

- (a) Odredite po jednu bazu i dimenziju prostora $[M]$ i N .
- (b) Odredite po jednu bazu prostora $[M] \cap N$ i $[M] + N$.
- (c) Odredite jedan direktni komplement prostora N u $[M] + N$.

Rješenje:

- (a) Neka je $p(t) = at^3 + bt^2 + ct + d \in M$. Iz $p(0) = 1$ slijedi $d = 1$, a iz $p(1) = 0$ onda slijedi $a + b + c + 1 = 0$, odnosno $c = -a - b - 1$. Polinomi u M su oblika

$$p(t) = a(t^3 - t) + b(t^2 - t) + (-t + 1).$$

Linearna ljuska $[M]$ sastoji se od svih linearnih kombinacija elemenata iz M , pa je baza za $[M]$ stoga $\{t^3 - t, t^2 - t, -t + 1\}$, a $\dim[M] = 3$.

Za skup N , uvjeti su $p(-1) = p(1) = 0$. Zbrajanjem i oduzimanjem jednadžbi $p(1) = a + b + c + d = 0$ i $p(-1) = -a + b - c + d = 0$ dobivamo $d = -b$ i $c = -a$. Polinomi iz N su oblika

$$p(t) = a(t^3 - t) + b(t^2 - 1).$$

Baza za N je $\{t^3 - t, t^2 - 1\}$, pa je $\dim N = 2$.

- (b) Uočimo da su elementi dobivene baze od N linearne kombinacije elemenata dobivene baze od $[M]$. Dakle $N \subseteq [M]$. Iz ovoga slijedi da je

$$[M] \cap N = N, [M] + N = [M].$$

Baza za presjek je dakle baza za N , a baza za sumu je baza za $[M]$.

- (c) Tražimo direktni komplement prostora N u $[M] + N = [M]$. Označimo taj komplement s L . Mora vrijediti $N \oplus L = [M]$. Budući da je $\dim N = 2$ i $\dim[M] = 3$, L mora biti jednodimenzionalan potprostor generiran jednim vektorom iz $[M]$ koji nije u N . Možemo uzeti $L = \{-t + 1\}$.

2. (20 bodova) U ovisnosti o $\lambda \in \mathbb{R}$ odredite rang i determinantu matrice

$$\begin{bmatrix} 3 & \lambda & 3 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & \lambda + 1 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & \lambda - 5 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Označimo matricu s A . Ako od trećeg i četvrtog stupca oduzmemo prvi stupac dobivamo:

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & \lambda - 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & \lambda - 6 \end{vmatrix}$$

Razvojem po četvrtom stupcu, a potom po trećem, determinanta se svodi na:

$$\det A = (\lambda - 6)(\lambda - 3) \begin{vmatrix} 3 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 3)(3 - \lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 6).$$

Rang ovisno o λ :

- $\lambda \notin \{3, 6\}$
 $\det A \neq 0$, pa je matrica regularna, a onda $r(A) = 4$.
- $\lambda = 3$
Vrijedi

$$A \sim \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Prva tri retka su proporcionalna i nezavisna sa zadnji retkom, pa je $r(A) = 2$.

- $\lambda = 6$
Vrijedi

$$A \sim \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

Prva tri stupca su linearno nezavisna, a zadnji stupac je nul-stupac, pa je $r(A) = 3$.

3. (20 bodova) U ovisnosti o parametrima $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ odredite kada sustav

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_2 + 2x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + (\lambda + 1)x_3 + x_4 = \mu \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \lambda x_4 = 3. \end{cases}$$

ima jedinstveno rješenje, beskonačno mnogo rješenja ili nema rješenja. U slučajevima kada je sustav rješiv odredite sva njegova rješenja.

Rješenje: Za proširenu matricu sustava A_p vrijedi:

$$A_p = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & \lambda + 1 & 1 & \mu \\ 2 & 3 & 4 & \lambda & 3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda - 2 & 0 & \mu - 3 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda - 1 & -2 \end{array} \right]$$

Drugu matricu dobivamo tako da prvo oduzmemo prvi redak od trećeg i dvostruki prvi redak od četvrtog, a onda drugi redak oduzmemo od trećeg i četvrtog. Imamo slučajeve:

- $\lambda \notin \{1, 2\}$
Sustav ima jedinstveno rješenje za svaki μ . Supstitucijom unatrag dobijemo: $x_4 = \frac{-2}{\lambda-1}$, $x_3 = \frac{\mu-3}{\lambda-2}$, $x_2 = 1 - 2x_3 - x_4$, te $x_1 = 2 - x_2 - x_3$.
- $\lambda = 1$
Posljednji redak postaje $0 = -2$, što je kontradikcija. Sustav nema rješenja (neovisno o μ).
- $\lambda = 2$
Treći redak postaje $0 = \mu - 3$. Ako je $\mu \neq 3$, sustav nema rješenja. Ako je $\mu = 3$, treći redak je nul-redak, a sustav ima beskonačno mnogo rješenja. Stavljamo $x_3 = t$. Dobivamo $x_4 = -2$, $x_2 = 3 - 2t$, $x_1 = -1 + t$, pa su rješenja $(t-1, 3-2t, t, -2)$, $t \in \mathbb{R}$.

4. (20 bodova) Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (a) Odredite A^{-1} .
- (b) Matrica B nastala je iz matrice A tako da je najprije prvom retku dodan dvostruki treći redak, zatim su zamijenjeni prvi i treći stupac, a potom je drugi stupac pomnožen s -2 . Izrazite B^{-1} pomoću A^{-1} i elementarnih matrica te navedite kojim se elementarnim transformacijama i kojim redoslijedom B^{-1} može dobiti iz A^{-1} .

Rješenje:

- (a) Pomoću Gaussovih eliminacija $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$, dobije se:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Elementarne transformacije odgovaraju množenju elementarnim matricama.

- Dodavanje dvostrukog trećeg retka prvom: $F_{13}^2 A$
- Zamjena 1. i 3. stupca: $(F_{13}^2 A) F_{13}$.
- Množenje 2. stupca s -2 : $(F_{13}^2 A F_{13}) F_2^{-2}$.

Dakle $B = F_{13}^2 A F_{13} F_2^{-2}$. Inverzna matrica je:

$$B^{-1} = (F_2^{-2})^{-1} (F_{13})^{-1} A^{-1} (F_{13}^2)^{-1} = F_2^{-\frac{1}{2}} F_{13} A^{-1} F_{13}^{-2}.$$

Redoslijed operacija kojima iz A^{-1} dobivamo B^{-1} :

- Množenje zdesna s F_{13}^{-2} : Od trećeg stupca matrice A^{-1} oduzmemo dvostruki prvi stupac.
- Množenje slijeva s F_{13} : Zamjena prvog i trećeg retka matrice.
- Množenje slijeva s $F_2^{-\frac{1}{2}}$: Množenje drugog retka matrice s $-1/2$.

5. Neka je $A \in M_3(\mathbb{R})$ matrica ranga 1, za čije stupce vrijedi $S_1 = S_2 = S_3$.

(a) (10 bodova) Odredite dimenziju i jednu bazu prostora stupaca

$$\Omega = \{X \in M_{3,1}(\mathbb{R}) \mid AX = 0\}.$$

(b) (10 bodova) Odredite dimenziju i jednu bazu prostora matrica

$$\Psi = \{Y \in M_{3,2}(\mathbb{R}) \mid AY = 0\}.$$

Rješenje:

a) Učimo $r(A) = 1 \Rightarrow A \neq 0 \Rightarrow S_1 \neq 0$, te dimenzija od Ω je $3 - r(A) = 2$.

Dalje

$$0 = AX = [S_1 S_1 S_1] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = S_1 x_1 + S_1 x_2 + S_1 x_3 = S_1(x_1 + x_2 + x_3).$$

Slijedi $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Uzmimo $x_2 = s, x_3 = t$ za $s, t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle baza za Ω je $\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b)

$$0 = AX = [S_1 S_1 S_1] \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{bmatrix} = [S_1(y_{11} + y_{21} + y_{31}), S_1(y_{12} + y_{22} + y_{32})].$$

Slijedi

$$y_{11} + y_{21} + y_{31} = 0$$

$$y_{12} + y_{22} + y_{32} = 0.$$

Uzmemo $y_{21} = s, y_{31} = t, y_{22} = u, y_{32} = v$ za $s, t, u, v \in \mathbb{R}$.

$$\begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} \\ y_{21} & y_{22} \\ y_{31} & y_{32} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + u \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Dakle dimenzija od Ψ je 4, a baza

$$\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$