LINEARNA ALGEBRA 1

Treći ispitni rok - 27. kolovoza 2025.

ZADATAK 1

(20 bodova) Za sljedeće skupove provjerite čine li sustav izvodnica za $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$. Ako skup predstavlja sustav izvodnica, reducirajte ga do neke baze za $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$, a ako ne, odredite jedan direktan komplement njegove linearne ljuske:

(a) $S = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = p(1) = p(-1)\}$

(b) $S = \{p \in \mathcal{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = 2\}$

Rješenje:

(a) Standardnim načinom možemo vidjeti da je $S \leq \mathcal{P}_3$, pa je i $[S] = S$. Nadalje, jedna njegova baza je skup $\{1, (t+1)t(t-1)\}$. Posebno, kako je $[S] = S \neq \mathcal{P}_3$, on nije sustav izvodnica za $\mathcal{P}_3$. Jedan njegov direktni komplement je primjerice $L = [\{t, t^2\}]$.

(b) Kako je $\{2, t+2, t^2+2, t^3+2\} \subseteq S$, vidimo da je S sustav izvodnica za $\mathcal{P}_3$ kao nadskup sustava izvodnica za $\mathcal{P}_3$; štoviše, navedeni skup je i baza za $\mathcal{P}_3$ (standardni argument s polinomima strogo rastućeg stupnja), te je to onda i jedna tražena redukcija.

ZADATAK 2

(20 bodova) U vektorskom prostoru $\mathbb{R}^4$ zadani su potprostori

$$M = [\{(2,3,0,-1), (0,3,1,1), (2,0,-1,-2)\}], \quad N_\lambda = [\{(2,2,-1,0), (2,\lambda,1,0)\}],$$

gdje je $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Odredite dimenziju sume i presjeka ovih potprostora u ovisnosti o parametru λ.

(b) Odredite sve vrijednosti parametra λ za koje je ta suma direktna.

Rješenje:

(a) S obzirom da je treći vektor iz skupa koji generira M jednak razlici prva dva (koji su linearno nezavisni), vidimo da je $\dim M = 2$. S druge strane je očito $\dim N_\lambda = 2$ za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$. Kako je potrebno pronaći samo dimenzije, koristit ćemo zapis vektora generatora u matričnom obliku te računanje odgovarajućeg ranga; tako dobijemo da je

$$\dim(M + N_\lambda) = r\left(\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 & \lambda \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 3, & \lambda = 6, \\ 4, & \lambda \neq 6. \end{cases}$$

Posebno je onda koristeći formulu koja veže sve tražene dimenzije

$$\dim(M \cap N_\lambda) = \dim M + \dim N_\lambda - \dim(M + N_\lambda) = \begin{cases} 1, & \lambda = 6, \\ 0, & \lambda \neq 6. \end{cases}$$

(b) Iz (a) dijela odmah vidimo da je za sve $\lambda \neq 6$ suma potprostora direktna.

ZADATAK 3

(20 bodova) Odredite vrijednost parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ ako je poznato da matrica

$$\begin{bmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}^{2025} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}$$

ima isti rang kao i matrica

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: S obzirom da je matrica $\begin{bmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}$ regularna (trokutasta s netrivijalnim dijagonalnim elementima), slijedi da je

$$r\left(\begin{bmatrix} 7 & 13 & 5 \\ 0 & 17 & 9 \\ 0 & 0 & 27 \end{bmatrix}^{2025} \begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}\right) = r\left(\begin{bmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{cases} 2, & \lambda = 3, \\ 3, & \lambda \neq 3. \end{cases}.$$

S druge strane je $r(B) = 2$, pa je jedini traženi λ jednak 3.

ZADATAK 4

(20 bodova) Neka je $A \in M_3(\mathbb{R})$ matrica takva da vrijedi sljedeće:

- Zbroj njenih stupaca je jednak $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$
- Razlika njenog prvog i trećeg stupca je jednaka $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$
- Jedno rješenje sustava $AX = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$ je $X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$.

Pokažite da je A regularna te odredite A^{-1}.

Rješenje: Dana tri uvjeta možemo redom zapisati na sljedeći način:

- $A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T = E_1$
- $A \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T = E_3$,
- $A \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T = E_2$,

gdje su $E_1, E_2, E_3 \in M_{3,1}$ vektori kanonske baze. Drugim riječima, imamo

$$A \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & E_2 & E_3 \end{bmatrix} = I,$$

pa zaključujemo da je A regularna te da je

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ZADATAK 5

(20 bodova) Neka je $A \in M_{4,3}$ matrica ranga 3. Dokažite sljedeće tvrdnje:

(a) Ako za $C_1, C_2 \in M_{3,1}$ vrijedi $AC_1 = AC_2$, tada je $C_1 = C_2$.

(b) Postoji $B \in M_{4,1}$ takav da sustav $AX = B$ nema rješenja.

(c) Za svaki $B \in M_{3,1}$ sustav $A^T X = B$ ima rješenje.

Rješenje:

(a) Iz $AC_1 = AC_2$ slijedi $A(C_1 - C_2) = 0$, što znači da je $C_1 - C_2$ rješenje homogenog sustava $AX = 0$, to jest, $C_1 - C_2 \in \Omega$. S obzirom da je $\dim \Omega = n - r(A) = 0$, slijedi $C_1 = C_2$.

(b) Iz pretpostavke $r(A) = 3$ zaključujemo da je prostor razapet stupcima matrice A trodimenzionalan potprostor od $M_{4,1}$. Zato postoji $B \in M_{4,1}$ koji se ne može zapisati kao linearna kombinacija stupaca od A. Za takav B je rang proširene matrice sustava $AX = B$ jednak 4, pa po Kronecker-Capellijevom teoremu slijedi da taj sustav nema rješenja.

(c) Imamo $r(A^T) = r(A) = 3$. Proširena matrica sustava $A^T X = B$ je tipa $(3, 5)$, pa je i njen rang nužno 3 za svaki $B \in M_{3,1}$. Prema Kronecker-Capellijevom teoremu slijedi da ovaj sustav ima rješenje za svaki $B \in M_{3,1}$.