

Linearna algebra 1
vježbe
2026/2027

1. listopada 2026.

Sadržaj

1	Rješavanje sustava linearnih jednažbi	1
1.1	Sustavi linearnih jednažbi s dvije i tri nepoznanice	1
1.2	Sustavi linearnih jednažbi s n nepoznanica	4
2	Prostor radijvektora	11
2.1	Radijvektori u ravnini	11
2.2	Radijvektori u prostoru	15
3	Vektorski prostori	23
3.1	Definicija i primjeri	23
3.2	Linearna ljuska i skup (sustav) izvodnica	27
3.3	Linearna (ne)zavisnost skupa	31
3.4	Baza i dimenzija	35
4	Potprostori	41
4.1	Definicija i primjeri	41
4.2	Suma i presjek potprostora	47
4.3	Direktni komplement	50
4.4	Linearne mnogostrukosti	53

Poglavlje 1

Rješavanje sustava linearnih jednačbi

1.1 Sustavi linearnih jednačbi s dvije i tri nepoznanice

Linearna jednačba s dvije nepoznanice (s realnim koeficijentima) je jednačba oblika

$$ax + by = c$$

za neke $a, b, c \in \mathbb{R}$, pri čemu barem jedan od brojeva a i b nije jednak 0. Svaki uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koji zadovoljava ovu jednačbu nazivamo njenim **rješenjem**. Geometrijski, to su točke koje leže na pravcu čija je jednačba $ax + by = c$.

Više linearnih jednačbi s dvije nepoznanice daju sustav. Opći oblik **sustava** m linearnih jednačbi (gdje je $m \in \mathbb{N}$) s dvije nepoznanice je

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \\ \vdots \\ a_mx + b_my = c_m \end{cases} \quad (1.1)$$

gdje su $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \dots, m$. **Rješenje sustava** (1.1) je svaki uređeni par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ koji zadovoljava svaku jednačbu sustava. Riješiti sustav znači naći sva njegova rješenja.

Promatrajući jednačbe ovog sustava kao jednačbe pravca u ravnini, rješenje sustava je skup svih točaka koje se nalaze u presjeku *svih* m pravaca.

Uzmimo $m = 2$. Tada često kažemo da imamo 2×2 sustav. Broj rješenja sustava ovisi o međusobnom položaju dva pravca u ravnini:

- (a) pravci se sijeku u jednoj točki $\Leftrightarrow$ postoji jedinstveno rješenje sustava
- (b) pravci su paralelni (ne sijeku se) $\Leftrightarrow$ sustav nema rješenja
- (c) pravci se podudaraju $\Leftrightarrow$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Slična interpretacija je kada imamo više od dvije jednačbe - opet promatramo sjecišta pravaca, rješenje su točke koje leže na *svim* pravcima.

Primjer 1.1. (1) Sustav $\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases}$ ima jedinstveno rješenje $(1, 1)$ (to jest, $x = y = 1$).

(2) Sustav $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2y = 1 \end{cases}$ nema rješenja.

(3) Sustav $\begin{cases} x + y = 2 \\ -x - y = -2 \end{cases}$ ima beskonačno mnogo rješenja.

Prijedimo na sustave m linearnih jednadžbi (gdje je $m \in \mathbb{N}$) s tri nepoznanice. Oni su oblika

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ \vdots \\ a_mx + b_my + c_mz = d_m \end{cases} \quad (1.2)$$

gdje su $a_i, b_i, c_i, d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$.

Jedna metoda za rješavanje je **metoda supstitucije**: iz neke jednadžbe jednu nepoznanicu izrazimo pomoću ostalih nepoznanica, uvrstimo u sve preostale jednadžbe. Time smanjujemo broj nepoznanica, dakle rješavamo sustav s dvije nepoznanice.

Primjer 1.2. (a) Riješimo sustav

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2x_1 + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{cases}$$

Iz prve jednadžbe dobijemo $x_1 = 9 - 2x_2 - 3x_3$, to uvrstimo u drugu i treću jednadžbu i dobijemo:

$$\begin{cases} 4(9 - 2x_2 - 3x_3) + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 2(9 - 2x_2 - 3x_3) + 7x_2 + 12x_3 = 40 \end{cases}$$

odnosno

$$\begin{cases} -3x_2 - 6x_3 = -12 \\ 3x_2 + 6x_3 = 22 \end{cases}$$

Ovaj 2×2 sustav nema rješenja, pa onda nema rješenja ni početni sustav.

(b) Riješimo sustav

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$$

Množenjem druge jednadžbe s $\frac{1}{2}$, a treće s (-1) , dobijemo tri iste jednadžbe, pa se sustav svodi na jednu jednadžbu

$$x_1 + x_2 - x_3 = 0.$$

Odavde $x_1 = -x_2 + x_3$. To znači da x_2 i x_3 biramo proizvoljno, a onda x_1 računamo po ovoj formuli. Slijedi da su rješenja sustava oblika

$$(x_1, x_2, x_3) = (-t + s, t, s), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Analitičko-geometrijska interpretacija: Svaku linearnu jednadžbu s tri nepoznanice shvatimo kao jednadžbu ravnine u prostoru (**položaji tri ravnine u prostoru**). Kao i u slučaju dvije nepoznanice, i ovdje imamo sljedeće mogućnosti za skup rješenja sustava:

- (a) ne postoje točke koje pripadaju svim ravninama $\Leftrightarrow$ sustav nema rješenja
- (b) ravnine se sijeku u jednoj točki $\Leftrightarrow$ postoji jedinstveno rješenje sustava
- (c) ravnine se sijeku u pravcu $\Leftrightarrow$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja
- (d) ravnine se podudaraju $\Leftrightarrow$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja.

Domaća zadaća

DZ 1.1. Odredite $h, k \in \mathbb{R}$ tako da sustav $\begin{cases} x + 2y = k \\ 4x + hy = 5 \end{cases}$ ima

(a) jedinstveno rješenje (b) beskonačno mnogo rješenja (c) nema rješenja.

Ukoliko sustav ima rješenja, odredite ih.

RJEŠENJE Ako je $h = 8$, tada ove dvije jednačbe predstavljaju jednačbe paralelnih pravaca:

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2} \quad \text{i} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}.$$

Ako je $\frac{k}{2} = \frac{5}{8}$, odnosno $k = \frac{5}{4}$, onda se radi o jednom te istom pravcu i svaka točka na pravcu daje rješenje: za proizvoljni $x \in \mathbb{R}$ izračunamo $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}$.

Prema tome, ako je $h = 8$ i $k = \frac{5}{4}$, tada sustav ima beskonačno mnogo rješenja i to su

$$(t, -\frac{1}{2}t + \frac{5}{8}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Ako je $h = 8$ i $k \neq \frac{5}{4}$ tada su

$$y = -\frac{1}{2}x + \frac{k}{2} \quad \text{i} \quad y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{8}.$$

jednačbe različitih paralelnih pravaca, pa sustav nema rješenja.

Preostaje slučaj $h \neq 8$. Tada pravci nisu paralelni, dakle sijeku se i zato sustav ima jedinstveno rješenje. Iz prve jednačbe je $x = k - 2y$, što uvrštavanjem u drugu daje $4(k - 2y) + hy = 5$, odnosno (s obzirom na to da je $h - 8 \neq 0$)

$$y = \frac{5 - 4k}{h - 8}.$$

Sada je

$$x = k - 2y = k - \frac{10 - 8k}{h - 8}.$$

Prema tome, ako je $h \neq 8$ tada (za svaki $k \in \mathbb{R}$) sustav ima jedinstveno rješenje

$$(k - \frac{10 - 8k}{h - 8}, \frac{5 - 4k}{h - 8}).$$

□

DZ 1.2. Riješite sustav

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

RJEŠENJE Iz prve jednačbe je $x_1 = 9 - 2x_2 - 3x_3$, to uvrstimo u drugu i treću jednačbu:

$$\begin{cases} 4(9 - 2x_2 - 3x_3) + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3(9 - 2x_2 - 3x_3) + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases} \quad \text{odnosno} \quad \begin{cases} -3x_2 - 6x_3 = -12 \\ -5x_2 - 11x_3 = -23 \end{cases}$$

Sada iz prve dobijemo $x_2 = 4 - 2x_3$, to uvrstimo u drugu jednačbu:

$$-5(4 - 2x_3) - 11x_3 = -23$$

što daje $x_3 = 3$. Sada je $x_2 = 4 - 2x_3 = 4 - 2 \cdot 3 = -2$, a onda $x_1 = 9 - 2x_2 - 3x_3 = 9 - 2(-2) - 3 \cdot 3 = 4$.

Dobili smo točno jedno rješenje $(x_1, x_2, x_3) = (4, -2, 3)$.

□

DZ 1.3. Riješite sustav

$$\begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 3 \\ x_1 - 16x_2 + 14x_3 = -3 \end{cases}$$

RJEŠENJE Iz treće jednadžbe je $x_1 = -3 + 16x_2 - 14x_3$, to uvrstimo u prvu i drugu jednadžbu:

$$\begin{cases} 3(-3 + 16x_2 - 14x_3) + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2(-3 + 16x_2 - 14x_3) - 5x_2 + 4x_3 = 3 \end{cases} \quad \text{odnosno} \quad \begin{cases} 54x_2 - 48x_3 = 18 \\ 27x_2 - 24x_3 = 9 \end{cases}$$

Dijeljenjem prve jednadžbe sa 6, a druge s 3 dobijemo u oba slučaja istu jednadžbu, dakle ovaj 2×2 sustav se svodi na jednu jednadžbu

$$9x_2 - 8x_3 = 3.$$

Ova jednadžba ima beskonačno mnogo rješenja. Označimo $x_3 = t$. Tada je

$$x_2 = \frac{1}{3} + \frac{8}{9}t, \quad x_1 = -3 + 16x_2 - 14x_3 = -3 + 16\left(\frac{1}{3} + \frac{8}{9}t\right) - 14t = \frac{7}{3} + \frac{2}{9}t.$$

Prema tome, sva rješenja su

$$(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{7}{3} + \frac{2}{9}t, \frac{1}{3} + \frac{8}{9}t, t\right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(Rješenje možemo napisati i u drugom obliku: na primjer, ako označimo $x_3 = 3s$ za neki $s \in \mathbb{R}$, tada su sva rješenja početnog sustava oblika $\left(\frac{7}{3} + \frac{2}{3}s, \frac{1}{3} + \frac{8}{3}s, 3s\right)$, $s \in \mathbb{R}$.)

1.2 Sustavi linearnih jednadžbi s n nepoznanica

Možemo promatrati sustave s proizvoljnim (konačnim) brojem nepoznanica. Neka je $n \in \mathbb{N}$.

Linearna jednadžba s n nepoznanica $x_1, \dots, x_n$ je jednadžba oblika

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b, \quad (1.3)$$

gdje su $a_1, a_2, \dots, a_n, b \in \mathbb{R}$. **Rješenje linearne jednadžbe** je svaka uređena n -torka $(\gamma_1, \dots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ takva da vrijedi

$$a_1\gamma_1 + a_2\gamma_2 + \dots + a_n\gamma_n = b.$$

(Naglasimo da je $(\gamma_1, \dots, \gamma_n)$ jedno, a ne n rješenja jednadžbe.)

Sustav linearnih jednadžbi je konačan skup linearnih jednadžbi s istim nepoznanicama. Sustav m linearnih jednadžbi s n nepoznanica $x_1, \dots, x_n$ možemo zapisati u obliku

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad (1.4)$$

pri čemu su $a_{ij}, b_i \in \mathbb{R}$ za $i = 1, \dots, m$ i $j = 1, \dots, n$. Brojevi a_{ij} , $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ nazivaju se **koeficijenti** sustava, a $b_1, \dots, b_m$ **slobodni članovi** ili **slobodni koeficijenti** sustava.

Rješenje sustava (1.4) je svaka uređena n -torka $(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n)$ koja je rješenje svake jednadžbe koja se pojavljuje u sustavu.

Naglasimo da je *jednadžba riješena* samo onda kada smo odredili sva njena rješenja.

Primjer 1.3. Za sve $t, s \in \mathbb{R}$, uređena četvorka $(s + t + 2, 2s - t + 1, t, s)$ je rješenje sustava

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 = 5 \end{cases}$$

Zaista, direktnim uvrštavanjem u jednadžbe sustava dobijemo:

$$\begin{cases} (s + t + 2) - 2(2s - t + 1) - 3t + 3s = 0 \\ 2(s + t + 2) + (2s - t + 1) - t - 4s = 5 \end{cases}$$

i u oba slučaja dobijemo točne numeričke identitete $0 = 0$ i $5 = 5$.

U slučaju $n \geq 4$ nemamo geometrijsku interpretaciju sustava kao u slučaju $n = 2$ i $n = 3$. Što se tiče načina rješavanja ovih "većih" sustava, i ovdje možemo koristiti metodu supstitucije, međutim, to može biti računski zahtjevno te zato koristimo efikasnije metode rješavanja. (Sustave linearnih jednadžbi detaljno ćemo proučiti krajem semestra kada ćemo imati potrebno znanje o vektorskim prostorima i matricama, a za sada samo opisujemo jednu metodu koja će nam omogućiti lakše rješavanje sustava linearnih jednadžbi u raznim zadacima koje ćemo rješavati prije toga.)

Ideja je sljedeća: zadani sustav transformirati u novi (jednostavniji) sustav *koji ima isti skup rješenja kao polazni sustav*, riješiti taj novi sustav, a time ujedno i polazni sustav. Sustavi koji imaju isti skup rješenja nazivaju se **ekvivalentni sustavi**.

Kako transformirati sustave, a da pritom ne mijenjamo skup rješenja? Koristit ćemo sljedeće **elementarne transformacije**:

- I. zamjena poretka dviju jednadžbi
- II. množenje jednadžbe brojem različitim od nule
- III. dodavanje neke jednadžbe, pomnožene nekim brojem, nekoj drugoj jednadžbi sustava.

Dokazat ćemo (kasnije, na predavanjima) da ove transformacije ne mijenjaju skup rješenja sustava.

Primjer 1.4. Ponovo riješimo sustav, ovaj put primjenom elementarnih transformacija

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Prvu jednadžbu podijelimo s 2:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Sada prvu jednadžbu, pomnoženu s (-4) dodajemo drugoj, te pomnoženu s (-3) dodajemo trećoj jednadžbi. Dobijemo

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ (4x_1 + 5x_2 + 6x_3) - 4(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = 24 - 4 \cdot 9 \\ (3x_1 + x_2 - 2x_3) - 3(x_1 + 2x_2 + 3x_3) = 4 - 3 \cdot 9 \end{cases}$$

odnosno

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -3x_2 - 6x_3 = -12 \\ -5x_2 - 11x_3 = -23 \end{cases}$$

Drugu jednadžbu podijelimo s (-3) :

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ -5x_2 - 11x_3 = -23 \end{cases}$$

Sada drugu jednadžbu, pomnoženu s 5, dodajemo trećoj jednadžbi:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ (-5x_2 - 11x_3) + 5(x_2 + 2x_3) = -23 + 5 \cdot 4 \end{cases}$$

odnosno

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ x_2 + 2x_3 = 4 \\ -x_3 = -3 \end{cases}$$

Za ovakav sustav linearnih jednadžbi kažemo da ima **trokutastu formu** i njegovo rješenje dobijemo postupkom **povratne supstitucije**: iz treće jednadžbe dobijemo $x_3 = 3$, to uvrstimo u drugu jednadžbu i dobijemo $x_2 = -2$. Sada iz prve jednadžbe dobijemo $x_1 = 4$. Time smo dobili da je $(4, -2, 3)$ jedino rješenje sustava.

Kako bismo smanjili pisanje, uvodimo kraći zapis sustava: koeficijente sustava

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

zapisujemo u **proširenu matricu sustava** na sljedeći način

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & 18 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & -2 & 4 \end{array} \right]$$

(Matrice ćemo detaljno proučavati u jednom od sljedećih poglavlja, a u ovom trenu nije potrebno nikakvo znanje o njima – ovdje proširenu matricu shvaćamo samo kao tablicu u koju su, zbog kraćeg zapisa, smješteni koeficijenti sustava).

Elementarne transformacije sustava redom odgovaraju sljedećim **elementarnim transformacijama redaka** proširene matrice:

I. zamjena dva retka

II. množenje nekog retka brojem različitim od nule

III. dodavanje nekog retka, pomnoženog nekim brojem, nekom drugom retku.

Primjer 1.5. Zapišimo sada transformacije iz prethodnog primjera pomoću proširene matrice. Sustav je

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 18 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 4 \end{cases}$$

Imamo

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & | & 18 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 3 & 1 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 4 & 5 & 6 & | & 24 \\ 3 & 1 & -2 & | & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & -3 & -6 & | & -12 \\ 0 & -5 & -11 & | & -23 \end{bmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & -5 & -11 & | & -23 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{bmatrix}$$

Napravili smo redom sljedeće transformacije:

- prvi redak podijelili s 2 (kraće pišemo: $\frac{1}{2}R_1 \rightarrow R_1$)
- prvi redak, pomnožen s (-4) dodali drugom, te pomnožen s (-3) dodali trećem retku (pišemo: $R_2 - 4R_1 \rightarrow R_2$, $R_3 - 3R_1 \rightarrow R_3$)
- drugi redak podijelili s (-3) (pišemo: $-\frac{1}{3}R_2 \rightarrow R_2$)
- drugi redak, pomnožen s 5, dodali trećem retku (pišemo: $R_3 + 5R_2 \rightarrow R_3$).

Sada napišemo (trokutasti sustav) kojemu odgovara posljednja matrica i riješimo ga povratnom supstitucijom. (Znak $\sim$ označava da je nova matrica nastala iz prethodne primjenom elementarne transformacije.)

Povratnu supstituciju smo mogli također provesti kroz elementarne transformacije matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 9 \\ 0 & 1 & 2 & | & 4 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & -1 & | & -3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & | & 3 \end{bmatrix}.$$

Ovdje smo prvo napravili $R_1 + 3R_3 \rightarrow R_1$, $R_2 + 2R_3 \rightarrow R_2$, a nakon toga $R_1 - 2R_2 \rightarrow R_1$, $(-1)R_3 \rightarrow R_3$. Sada odavde direktno iščitamo rješenje sustava: $x_1 = 4$, $x_2 = -2$, $x_3 = 3$.

Zadatak 1.1. Riješimo sustav

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ 3x_1 + 5x_2 - 2x_3 + x_4 = 1 \\ -3x_1 - 7x_2 + 7x_3 - 5x_4 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -5 \end{cases}$$

Proširena matrica je

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & | & 1 \\ -3 & -7 & 7 & -5 & | & 7 \\ 1 & 3 & -4 & 3 & | & -5 \end{bmatrix}$$

Sada napravimo sljedeće transformacije: $R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2$, $R_3 + 3R_1 \rightarrow R_3$, $R_4 - R_1 \rightarrow R_4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & | & -8 \\ 0 & -4 & 10 & -8 & | & 16 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & | & -8 \end{bmatrix}$$

Sljedeće su $R_3 + 2R_2 \rightarrow R_3$ i $R_4 - R_2 \rightarrow R_4$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & | & 3 \\ 0 & 2 & -5 & 4 & | & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$$

Sada provedemo $\frac{1}{2}R_2 \rightarrow R_2$. Jasno je da posljednja dva retka više ne moramo pisati, jer predstavljaju identitete $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 = 0$ koji vrijede za sve x_1, x_2, x_3, x_4 . Dakle,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -4 \end{array} \right]$$

Sada još provedemo $R_1 - R_2 \rightarrow R_1$:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \frac{7}{2} & -3 & 7 \\ 0 & 1 & -\frac{5}{2} & 2 & -4 \end{array} \right]$$

Vratimo u oblik sustava:

$$\begin{cases} x_1 & + \frac{7}{2}x_3 - 3x_4 = 7 \\ & x_2 - \frac{5}{2}x_3 + 2x_4 = -4 \end{cases}$$

Ako označimo $x_3 = s$ i $x_4 = t$, dobijemo

$$x_1 = 7 - \frac{7}{2}s + 3t, \quad x_2 = -4 + \frac{5}{2}s - 2t$$

pa su rješenja sustava

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (7 - \frac{7}{2}s + 3t, -4 + \frac{5}{2}s - 2t, s, t), \quad s, t \in \mathbb{R}.$$

Zadatak 1.2. Riješimo sustav

$$\begin{cases} 3x + y - 4z = -1 \\ x & + 10z = 5 \\ 4x + y + 6z = 1 \end{cases}$$

Proširena matrica je

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & 0 & 10 & 5 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array} \right]$$

Prvo napravimo $R_1 \leftrightarrow R_2$,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 3 & 1 & -4 & -1 \\ 4 & 1 & 6 & 1 \end{array} \right]$$

a onda $R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2$ i $R_3 - 4R_1 \rightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 1 & -34 & -19 \end{array} \right]$$

Sada $R_3 - R_2 \rightarrow R_3$ daje

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 1 & -34 & -16 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{array} \right]$$

Posljednji redak predstavlja jednadžbu $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -3$, koja očito nema rješenja, pa onda ni promatrani sustav nema rješenja.

Zadatak 1.3. Riješimo sljedeći sustav u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x + 2y - 4z = 4 \\ 3x - y + 13z = 2 \\ 4x + y + a^2z = a + 3 \end{cases}$$

Proširena matrica sustava je

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 3 & -1 & 13 & 2 \\ 4 & 1 & a^2 & a+3 \end{array} \right].$$

Primjenjujemo elementarne transformacije redaka: $R_2 - 3R_1 \rightarrow R_2$ i $R_3 - 4R_1 \rightarrow R_3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 25 & -10 \\ 0 & -7 & a^2 + 16 & a - 13 \end{array} \right].$$

Zatim $R_3 - R_2 \rightarrow R_3$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & a^2 - 9 & a - 3 \end{array} \right].$$

(1) Ako je $a^2 - 9 \neq 0$, to jest $a \neq 3, -3$, tada iz trećeg retka slijedi

$$z = \frac{1}{a+3}$$

a zatim iz drugog $-7y + 25z = -10$ dobijemo

$$y = \frac{10 + 25z}{7} = \frac{10a + 55}{7(a+3)}.$$

Iz prvog retka dobijemo

$$x = \frac{8a + 2}{7(a+3)}.$$

Prema tome, ako je $a \neq \pm 3$ sustav ima jedinstveno rješenje

$$(x, y, z) = \left(\frac{8a + 2}{7(a+3)}, \frac{10a + 55}{7(a+3)}, \frac{1}{a+3} \right)$$

(2) Ako je $a = 3$, tada proširena matrica postaje

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right].$$

Tada iz drugog retka dobijemo $-7y + 25z = -10$, odnosno

$$y = \frac{10 + 25z}{7},$$

a iz prvog retka $x + 2y - 4z = 4$ slijedi

$$x = \frac{8 - 22z}{7}.$$

Još označimo $z = t$. Prema tome, sustav ima beskonačno mnogo rješenja i to su

$$(x, y, z) = \left(\frac{8 - 22t}{7}, \frac{10 + 25t}{7}, t \right), \quad t \in \mathbb{R}.$$

(3) Ako je $a = -3$ tada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -4 & 4 \\ 0 & -7 & 25 & -10 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{array} \right].$$

Treći red predstavlja jednadžbu koja nema rješenja, dakle sustav nema rješenja.

Domaća zadaća

DZ 1.4. Odredite a, b, c tako da graf funkcije $y = ax^2 + bx + c$ prolazi točkama $(-1, 6)$, $(2, 0)$ i $(3, 2)$.

DZ 1.5. Navedite, ako postoje, primjere sustava linearnih jednadžbi, čiji su svi koeficijenti različiti od 0, sa sljedećim svojstvima:

- (a) sustav s tri nepoznanice koji ima točno jedno rješenje
- (b) sustav s tri nepoznanice koji ima točno dva rješenja
- (c) sustav s četiri nepoznanice koji nema rješenja
- (d) sustav s četiri nepoznanice koji ima beskonačno mnogo rješenja.

Poglavlje 2

Prostor radijvektora

2.1 Radijvektori u ravnini

Na predavanjima smo obradili:

- Dana je ravnina E^2 koju shvaćamo kao skup točaka. Fiksiramo jednu točku O . Za svaku točku $A \in E^2$ promatramo uređeni par (O, A) koji nazivamo **radijvektor** i označavamo s $\overrightarrow{OA}$. Geometrijski, radijvektor je "strelica" s početkom u O i završetkom u točki A . Skup svih radijvektora u ravnini označavamo s $V^2(O)$. Radijvektor $\overrightarrow{OO}$ zovemo **nulvektor** i označavamo s $\vec{0}$.
- **Modul** od $\overrightarrow{OA}$ označavamo s $|\overrightarrow{OA}|$ i definiramo kao duljinu dužine $\overline{OA}$. Radijvektor $\vec{0}$ je jedini vektor čiji modul je 0. **Smjer** od $\overrightarrow{OA} \neq \vec{0}$ definira se kao pravac OA (smjer nulvektora se ne definira). Kažemo da su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ **kolinearni** ako O, A i B leže na istom pravcu. Nulvektor je kolinearan sa svakim radijvektorom.
- Neka su $\overrightarrow{OA}$ i $\overrightarrow{OB}$ kolinearni i različiti od $\vec{0}$. Kažemo da su **jednako orijentirani** ako A i B leže s iste strane točke O na pravcu OAB , te da su **suprotno orijentirani** ako O leži između A i B . Orijentacija je relativan pojam, nijedan radijvektor sam za sebe nema orijentaciju.
- Svaki netrivialni radijvektor je jednoznačno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom.
- Za radijvektor $\vec{a} \neq \vec{0}$ definiramo **suprotan radijvektor** $-\vec{a}$ kao radijvektor koji ima jednak modul i smjer kao $\vec{a}$, te su $\vec{a}$ i $-\vec{a}$ suprotno orijentirani. Za nulvektor definiramo $-\vec{0} = \vec{0}$.
- **Zbrajanje radijvektora.** Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ i $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ nekolinearni. Tada $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ definiramo kao radijvektor $\overrightarrow{OC}$, pri čemu je C jedinstvena točka ravnine sa svojstvom da je četverokut $OACB$ paralelogram.

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, onda ćemo $\vec{a} + \vec{b}$ definirati na sljedeći način:

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}, \quad \forall \vec{a} \in V^2(O), \quad (2.1)$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}, \quad \forall \vec{a} \neq \vec{0}. \quad (2.2)$$

Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ kolinearni, netrivialni i nisu jedan drugome suprotni, zbroj $\vec{a} + \vec{b}$ definiramo kao radijvektor koji ima isti smjer kao $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jednako orijentirani, $\vec{a} + \vec{b}$ definiramo tako da ima modul $|\vec{a}| + |\vec{b}|$ i orijentaciju istu kao $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Ako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ suprotne orijentacije te ako je

$|\vec{a}| > |\vec{b}|$, onda $\vec{a} + \vec{b}$ definiramo kao radijvektor čiji modul iznosi $|\vec{a}| - |\vec{b}|$, kolinearan je s $\vec{a}$ i $\vec{b}$, i ima istu orijentaciju kao $\vec{a}$. Ako je $|\vec{a}| < |\vec{b}|$, definicija je analogna, samo je orijentacija zbroja ista kao $\vec{b}$.

- **Množenje radijvektora skalarom.** Neka je $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\vec{v} \in V^2(O)$. Ako je $\alpha \neq 0$ i $\vec{v} \neq \vec{0}$, tada radijvektor $\alpha\vec{v}$ definiramo kao (jedinstveni) radijvektor čiji je

- (1) modul jednak $|\alpha| \cdot |\vec{v}|$,
- (2) smjer isti kao i smjer od $\vec{v}$,
- (3) $\vec{v}$ i $\alpha\vec{v}$ su iste (suprotne) orijentacije ako je $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$).

Ako je $\alpha = 0$ ili $\vec{v} = \vec{0}$, tada je $\alpha\vec{v} = \vec{0}$ (u tom slučaju ne govorimo o smjeru i orijentaciji).

- **Linearna kombinacija radijvektora** $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n \in V^2(O)$ je radijvektor oblika

$$\alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \dots + \alpha_n\vec{a}_n,$$

pri čemu je $n \geq 1$ i $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Propozicija 2.1. *Vrijedi sljedeće:*

- (1) Ako su $\vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$ tada je $\vec{a} + \vec{b} \in V^2(O)$.
- (2) Ako su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\vec{a} \in V^2(O)$ tada je $\alpha\vec{a} \in V^2(O)$.
- (3) $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$, $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^2(O)$.
- (4) vrijedi $\vec{a} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a} \in V^2(O)$.
- (5) za svaki $\vec{a} \in V^2(O)$ vrijedi $\vec{a} + (-\vec{a}) = -\vec{a} + \vec{a} = \vec{0}$.
- (6) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$.
- (7) $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\vec{a} \in V^2(O)$.
- (8) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$, $\forall \vec{a} \in V^2(O)$.
- (9) $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) = \alpha\vec{a} + \alpha\vec{b}$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$.
- (10) $(\alpha + \beta)\vec{a} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{a}$, $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\forall \vec{a} \in V^2(O)$.

Računanje s radijvektorima u $V^2(O)$ pojednostavljujemo uvođenjem pravokutnog koordinatnog sustava s ishodištem u točki O . Tako svakoj točki $A \in E^2$ pridružujemo jedinstven par koordinata, koje ujedno određuju i radijvektor $\overrightarrow{OA}$.

Neka je $I = (1, 0)$ i $J = (0, 1)$, te $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ i $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$. Ako je $A = (x, y)$ tada iz definicije zbrajanja radijvektora slijedi

$$\overrightarrow{OA} = x\vec{i} + y\vec{j}.$$

Koristeći svojstva operacija s radijvektorima dobijemo:

- Neka su $A = (x_1, y_1)$ i $B = (x_2, y_2)$. Tada je

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = (x_1\vec{i} + y_1\vec{j}) + (x_2\vec{i} + y_2\vec{j}) = (x_1 + x_2)\vec{i} + (y_1 + y_2)\vec{j},$$

dakle $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$, gdje je $C = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.

- Neka su $\alpha \in \mathbb{R}$ i $T = (x, y)$. Tada je

$$\alpha \cdot \overrightarrow{OT} = \alpha(x\vec{i} + y\vec{j}) = \alpha x\vec{i} + \alpha y\vec{j},$$

dakle $\alpha \cdot \overrightarrow{OT} = \overrightarrow{OT'}$, gdje je $T' = (\alpha x, \alpha y)$.

Iz gornjih definicija očito je da su radijevktori $\vec{a}$ i $\alpha\vec{a}$ kolinearni za sve $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\vec{a} \in V^2(O)$.

Propozicija 2.2. Neka je $\vec{a} \in V^2(O)$, $\vec{a} \neq \vec{0}$. Za svaki $\vec{b} \in V^2(O)$ kolinearan s $\vec{a}$ postoji jedinstveni $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$.

NAPOMENA 2.3. Kolinearnost dva radijevktora $\vec{a}$ i $\vec{b}$ možemo provjeriti na nekoliko (ekvivalentnih) načina:

- $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni ako i samo ako postoji netrivialan izbor koeficijenata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. (Za ovo posljednje koristimo i izraz **linearno zavisni**).
- $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni ako i samo ako je jednakost $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$ ispunjena samo na trivialan način, tj. samo ako je $\alpha = \beta = 0$. (Za ovo posljednje koristimo i izraz **linearno nezavisni**).

Na predavanjima je dokazana sljedeća tvrdnja.

Propozicija 2.4. Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^2(O)$ nekolinearni radijevktori. Za svaki $\vec{c} \in V^2(O)$ postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$.

Ovo znači da se svaki radijevktor $\vec{c} \in V^2(O)$ može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija nekolinearnih radijevktora $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Kažemo da je skup $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ **baza** za $V^2(O)$. Dakle, bilo koja dva nekolinearna radijevktora čine bazu za $V^2(O)$. Posebno, skup $\{\vec{i}, \vec{j}\}$ nazivamo **standardnom ili kanonskom bazom** za $V^2(O)$.

Prelazimo na rješavanje zadataka.

Zadatak 2.1. Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, pri čemu je $A = (1, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -3)$. Pokažite da su radijevktori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni te prikažite $\vec{c}$ kao njihovu linearnu kombinaciju.

RJEŠENJE Nekolinearnost ćemo provjeriti na nekoliko načina:

- (1) Računamo koeficijente smjera pravaca OA i OB : $k_{OA} = \frac{2-0}{1-0} = 2$, $k_{OB} = \frac{4-0}{1-0} = 4$. Kako koeficijenti smjera nisu jednaki, slijedi da $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni.
- (2) Pokušajmo radijevktor $\vec{b}$ zapisati kao $\vec{b} = \lambda\vec{a}$. Iz koordinata točaka slijedi da je $(1, 4) = (\lambda, 2\lambda)$. Dobili smo sustav jednačbi

$$\begin{cases} \lambda = 1 \\ 2\lambda = 4 \end{cases}$$

koji očito nema rješenja. Dakle, ne postoji $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $\vec{b} = \lambda\vec{a}$, pa $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nisu kolinearni.

- (3) Radijvektori $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni akko postoji netrivialan izbor koeficijenata $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvih da vrijedi $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} = \vec{0}$. Slijedi da je $(\alpha + \beta, 2\alpha + 4\beta) = (0, 0)$, što daje sustav

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\alpha + 4\beta = 0 \end{cases}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = 0$. Dakle, $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su nekolinearni.

Izrazimo sada radijvektor $\vec{c}$ kao njihovu linearnu kombinaciju. Propozicija 2.4 nam garantira da postoje jedinstveni $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da je $\vec{c} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$. Izjednačavanjem krajnjih točaka dobijemo $(\alpha + \beta, 2\alpha + 4\beta) = (-1, -3)$ odnosno sustav

$$\begin{cases} \alpha + \beta = -1 \\ 2\alpha + 4\beta = -3 \end{cases}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$. Dakle, $\vec{c} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{b}$.

Zadatak 2.2. Prikažite radijvektor $2\vec{i} + 4\vec{j} \in V^2(O)$ kao linearnu kombinaciju radijvektora $\vec{i} + \vec{j}$, $\vec{i} + 2\vec{j}$ te $\vec{j}$.

RJEŠENJE Tražimo skalare α, β i γ takve da vrijedi

$$\alpha(\vec{i} + \vec{j}) + \beta(\vec{i} + 2\vec{j}) + \gamma\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j},$$

odnosno

$$(\alpha + \beta)\vec{i} + (\alpha + 2\beta + \gamma)\vec{j} = 2\vec{i} + 4\vec{j}.$$

Kako su $\vec{i}$ i $\vec{j}$ nekolinearni imamo sustav

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 4 \end{cases}$$

Prvu jednadžbu pomnoženu s -1 dodajemo drugoj.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

Drugu jednadžbu pomnoženu s -1 dodajemo prvoj.

$$\begin{cases} \alpha - \gamma = 0 \\ \beta + \gamma = 2 \end{cases}$$

Sada je $\gamma = t, \beta = 2 - t, \alpha = t$, gdje je $t \in \mathbb{R}$.

Zadatak 2.3. Neka su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni vektori u $V^2(O)$. Odredite $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, za koje su radijvektori $\vec{a} + \mu\vec{b}$ i $\mu\vec{a} + \lambda\vec{b}$ također nekolinearni.

RJEŠENJE Navedeni radijvektori su nekolinearni ako i samo ako za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ iz jednadžbe

$$\alpha(\vec{a} + \mu\vec{b}) + \beta(\mu\vec{a} + \lambda\vec{b}) = \vec{0}$$

slijedi $\alpha = \beta = 0$. Pretpostavimo da vrijedi gornja jednakost. Imamo

$$(\alpha + \mu\beta)\vec{a} + (\mu\alpha + \lambda\beta)\vec{b} = \vec{0}.$$

Kako su $\vec{a}$ i $\vec{b}$ nekolinearni radijvektori, ovo vrijedi ako i samo ako je

$$\begin{cases} \alpha + \mu\beta = 0 \\ \mu\alpha + \lambda\beta = 0. \end{cases}$$

Prvu jednadžbu pomnoženu s $-\mu$ dodamo drugoj.

$$\begin{cases} \alpha + \mu\beta = 0 \\ (\lambda - \mu^2)\beta = 0. \end{cases}$$

Imamo slučajeve:

- Ako je $\lambda - \mu^2 \neq 0$, zadnju jednadžbu možemo podijeliti s tim brojem, pa imamo sustav

$$\begin{cases} \alpha + \mu\beta = 0 \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Drugu jednadžbu pomnoženu s $-\mu$ dodamo prvoj. Imamo

$$\begin{cases} \alpha = 0 \\ \beta = 0. \end{cases}$$

Dakle, $\alpha = \beta = 0$.

- Ako je $\lambda - \mu^2 = 0$, naš sustav je

$$\begin{cases} \alpha + \mu\beta = 0 \\ 0 = 0. \end{cases}$$

Njegovo rješenje je $\beta = t, \alpha = -\mu t$ gdje je $t \in \mathbb{R}$.

Zaključujemo da su radijvektori $\vec{a} + \mu\vec{b}$ i $\mu\vec{a} + \lambda\vec{b}$ nekolinearni ako i samo ako je $\lambda - \mu^2 \neq 0$. □

Domaća zadaća

DZ 2.1. Neka su $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$, $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, pri čemu je $A = (1, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-1, -3)$, $D = (0, 1)$.

- (1) Prikažite $\vec{d}$ kao linearnu kombinaciju radijvektora $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, to jest, odredite $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takve da vrijedi

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

- (2) Ako je moguće, odredite onu linearnu kombinaciju čiji koeficijenti $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ zadovoljavaju $\alpha + \beta + \gamma = 0$.

2.2 Radijvektori u prostoru

Definicije su analogne onima za radijvektore u ravnini pa uglavnom izostavljamo detalje.

- E^3 je trodimenzionalni prostor s točkovnom strukturom. Skup svih radijvektora u prostoru označavamo s $V^3(O)$.

- Sljedeće su definicije iste kao i za $V^2(O)$: modul, smjer, orijentacija radijvektora u $V^3(O)$, nulvektor i suprotni radijvektor.

Svaki nenul radijvektor je jedinstveno određen svojim modulom, smjerom i orijentacijom. Nulvektor je jedini radijvektor modula 0 (za njega ne definiramo smjer i orijentaciju).

- Operacije zbrajanje radijvektora i množenje radijvektora skalarom definirane su istim pravilima, vrijede ista svojstva kao i u $V^2(O)$.
- Ovdje imamo pojam komplanarnosti koji nismo imali u $V^2(O)$.

Neka je $n \geq 2$ te neka su $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ radijvektori u $V^3(O)$ takvi da je $\vec{v}_i = \overrightarrow{OT_i}$, $i = 1, \dots, n$. Kažemo da su radijvektori $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ **komplanarni** ako postoji ravnina koja sadrži (sve) točke $O, T_1, T_2, \dots, T_n$. U protivnom kažemo da su ti radijvektori **nekomplanarni**.

Dva su radijvektora uvijek komplanarna. (Ako su nekolinearni, onda postoji *jedinstvena* ravnina kroz točke O, T_1, T_2 , a ako su kolinearni, onda ima beskonačno mnogo takvih ravnina).

Tri radijvektora mogu i ne moraju biti komplanarni. Na primjer, radijvektori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ nisu komplanarni, dok $\vec{i}, \vec{j}, \vec{i} + \vec{j}$ jesu. (Skicirajte.)

- Tri radijvektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su nekomplanarni ako i samo ako iz jednakosti $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$ slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 0$.
- Prethodno možemo izreći i na sljedeći (ekvivalentan) način: radijvektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako postoje $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, od kojih barem jedan nije 0, takvi da je $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$.
- Uvedimo koordinatni sustav s ishodištem u točki O . Označimo s $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$, $I = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = \overrightarrow{OJ}$, $J = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = \overrightarrow{OK}$, $K = (0, 0, 1)$. Tada za svaki $T = (x, y, z) \in E^3$ imamo

$$\overrightarrow{OT} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}. \quad (2.3)$$

Vektore $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ nazivamo **standardnom ili kanonskom bazom** za $V^3(O)$.

Propozicija 2.5. Neka su $\vec{a}, \vec{b} \in V^3(O)$ proizvoljni nekolinearni radijvektori. Za svaki radijvektor $\vec{v} \in V^3(O)$ komplanaran s $\vec{a}, \vec{b}$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}.$$

Propozicija 2.6. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in V^3(O)$ proizvoljni nekomplanarni radijvektori. Za svaki radijvektor $\vec{v} \in V^3(O)$ postoje jedinstveni skalari $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da vrijedi

$$\vec{v} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

U $V^3(O)$ svaka tri nekomplanarna radijvektora čine **bazu** za $V^3(O)$ (u smislu da se svaki radijvektor može na jedinstven način prikazati kao linearna kombinacija tih radijvektora).

Zadatak 2.4. Provjerite čine li radijvektori $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ bazu za $V^3(O)$, gdje su

- $A = (1, 0, -1)$, $B = (1, 2, 3)$, $C = (0, 1, 1)$,
- $A = (1, 1, 1)$, $B = (1, 2, 2)$, $C = (0, 1, 1)$,
- $A = (1, 0, 0)$, $B = (0, 1, 0)$, $C = (0, 0, 1)$.

RJEŠENJE U sva tri podzadatka krećemo od (vektorske) jednadžbe

$$\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c} = \vec{0},$$

koja se svede na (homogeni) sustav linearnih jednadžbi. Ako je $\alpha = \beta = \gamma = 0$ jedino njegovo rješenje, tada zadani radijvektori čine bazu za $V^3(O)$. Ako osim ovog postoje i neka druga rješenja, onda ne čine bazu za $V^3(O)$.

(a) Usporedbom krajnjih točaka radijvektora $\alpha \vec{a} + \beta \vec{b} + \gamma \vec{c}$ i $\vec{0}$ dobijemo

$$(\alpha + \beta, 2\beta + \gamma, -\alpha + 3\beta + \gamma) = (0, 0, 0),$$

što daje sustav

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ -\alpha + 3\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Rješavamo sustav elementarnim transformacijama. Dodajemo najprije prvu jednadžbu trećoj

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ 4\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

Zatim množimo drugu jednadžbu s (-2) i dodajemo trećoj.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ 2\beta + \gamma = 0 \\ -\gamma = 0 \end{cases}$$

Povratnom supstitucijom dobijemo jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$, dakle, dani radijvektori čine bazu.

(b) Na isti način dobijemo $(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma) = (0, 0, 0)$, što daje sustav

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = 0 \end{cases}$$

S obzirom na to da imamo dvije jednake jednadžbe, zapravo se radi o sustavu od 2 jednadžbe s 3 nepoznanice koji ne može imati jedinstveno rješenje (presjek dvije ravnine ne može biti jedna točka). To znači da su radijvektori komplanarni, pa ne čine bazu za $V^3(O)$.

Mogli smo i riješiti sustav: dobijemo da je rješenje $\alpha = t$, $\beta = -t$, $\gamma = t$, $t \in \mathbb{R}$. Jedno rješenje dobijemo za $t = 1$: to je $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$. Tada vrijedi $\vec{a} - \vec{b} + \vec{c} = \vec{0}$, tj. $\vec{b} = \vec{a} + \vec{c}$ pa su radijvektori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ komplanarni, dakle ne čine bazu za $V^3(O)$.

(c) U ovom slučaju vrijedi $\overrightarrow{OA} = \vec{i}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{j}$ i $\overrightarrow{OC} = \vec{k}$, a za ove radijvektore smo već spomenuli da čine (kanonsku) bazu za $V^3(O)$. Mogli smo to i računski: kao i ranije dobijemo $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$, odakle je $\alpha = \beta = \gamma = 0$. □

Zadatak 2.5. Prikažite, ako je to moguće, radijvektor $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, $D = (1, -1, -4)$ kao linearnu kombinaciju radijvektora iz prethodnog zadatka.

RJEŠENJE U a) i c) znamo da je takav prikaz moguć jer zadani radijvektori čine bazu za $V^3(O)$ pa se svaki radijvektor iz $V^3(O)$ može prikazati kao njihova linearna kombinacija. U b) dijelu znamo da

$\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ne čine bazu za $V^3(O)$, nego razapinju jednu ravninu kroz ishodište. Tada se $\vec{d}$ može prikazati kao njihova linearna kombinacija ako i samo ako $\vec{d}$ leži u toj ravnini. To ćemo provjeriti računom.

U sva tri podzadatka tražimo, ako postoje, skalare (tj. brojeve) $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takve da je

$$\vec{d} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}.$$

Izjednačavajući koordinate krajnjih točaka od $\vec{d}$ i $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}$ dobijemo sustav linearnih jednadžbi.

(a) U ovom slučaju dobijemo $(\alpha + \beta, 2\beta + \gamma, -\alpha + 3\beta + \gamma) = (1, -1, -4)$ što je ekvivalentno sustavu

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ 2\beta + \gamma = -1 \\ -\alpha + 3\beta + \gamma = -4 \end{cases}$$

Ovaj sustav zapišimo pomoću proširene matrice i napravimo elementarne transformacije:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 & -4 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 4 & 1 & -3 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right].$$

U prvom koraku smo napravili $R_3 + R_1 \rightarrow R_3$, u drugom $R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3$, u trećem $R_2 + R_3 \rightarrow R_2$.

Sada ćemo još provesti $(-1) \cdot R_3 \rightarrow R_3$ i $\frac{1}{2} \cdot R_2 \rightarrow R_2$, te konačno $R_1 - R_2 \rightarrow R_1$:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Ako sada napišemo sustav koji odgovara posljednjoj matrici, dobijemo jedinstveno rješenje $\alpha = 2$, $\beta = -1$, $\gamma = 1$. Dakle,

$$\vec{d} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}.$$

(b) Ovdje imamo $(\alpha + \beta, \alpha + 2\beta + \gamma, \alpha + 2\beta + \gamma) = (1, -1, -4)$, tj.

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = -1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = -4 \end{cases}$$

Izjednačavanjem dvije zadnje jednadžbe dobivamo $-1 = -4$ što je kontradikcija. Dakle, sustav nema rješenja i $\vec{d}$ se ne može prikazati kao linearna kombinacija $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$ (tj. $\vec{d}$ ne leži u ravnini koju razapinju $\vec{a}, \vec{b}$ i $\vec{c}$).

(c) Ovdje nemamo što računati jer iz $(\alpha, \beta, \gamma) = (1, -1, -4)$ odmah dobijemo jedinstveno rješenje $\alpha = 1$, $\beta = -1$, $\gamma = -4$, dakle $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} - 4\vec{c}$.

Zadatak 2.6. Prikažite, ako je to moguće, radijvektor $\vec{d} = \overrightarrow{OD}$, $D = (1, -1, -1)$ kao linearnu kombinaciju radijvektora iz zadatka 2.4 (b).

RJEŠENJE Rješavamo na isti način kao prethodni zadatak. Dobijemo sustav

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = -1 \\ \alpha + 2\beta + \gamma = -1 \end{cases}$$

čije je rješenje $\alpha = t$, $\beta = 1 - t$, $\gamma = -3 + t$, $t \in \mathbb{R}$. Dakle, za svaki $t \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\vec{d} = t\vec{a} + (1 - t)\vec{b} + (-3 + t)\vec{c},$$

pa se $\vec{d}$ može prikazati kao linearna kombinacija radijvektora $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, ali ne na jedinstven način.

Zadatak 2.7. Neka su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni radijevktori u $V^3(O)$. Odredite za koje su $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ nekomplanarni i radijevktori

$$\vec{a} + \alpha\vec{b}, \quad \vec{b} + \beta\vec{c}, \quad \vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\vec{c}.$$

RJEŠENJE Pogledajmo linearnu kombinaciju

$$A(\vec{a} + \alpha\vec{b}) + B(\vec{b} + \beta\vec{c}) + C(\vec{a} + \beta\vec{b} + \alpha\vec{c}) = \vec{0}.$$

Želimo pronaći α, β za koje će iz ovog slijediti $A = B = C = 0$. Napišimo prethodni izraz u obliku

$$(A + C)\vec{a} + (A\alpha + B + C\beta)\vec{b} + (B\beta + \alpha C)\vec{c} = \vec{0}.$$

Kako su $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ nekomplanarni, odavde slijedi

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ \alpha A + B + \beta C = 0 \\ \beta B + \alpha C = 0 \end{cases}$$

Prethodne jednadžbe shvatimo kao sustav s nepoznanicama A, B, C . Rješavamo sustav. Pomnožimo prvu jednadžbu s $(-\alpha)$ i dodamo drugoj:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + (\beta - \alpha)C = 0 \\ \beta B + \alpha C = 0 \end{cases}$$

Sada pomnožimo drugu jednadžbu s $(-\beta)$ i dodamo trećoj:

$$\begin{cases} A + C = 0 \\ B + (\beta - \alpha)C = 0 \\ (\alpha - \beta^2 + \alpha\beta)C = 0 \end{cases}$$

Vidimo da je $A = B = C = 0$ jedino rješenje ako i samo ako za α i β vrijedi $\alpha - \beta^2 + \alpha\beta \neq 0$. $\square$

Zadatak 2.8. (a) Za koje vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$ su radijevktori $\vec{a} = \vec{i} + \lambda\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + \lambda\vec{j}$ i $\vec{c} = -\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$ komplanarni?

(b) Postoji li radijevktor $\vec{d} \in V^3(O)$ (koji ne ovisi o λ) takav da radijevktori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ nisu komplanarni niti za jedan $\lambda \in \mathbb{R}$.

RJEŠENJE

(a) Radijevktori $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ su komplanarni ako i samo ako postoje α, β, γ , od kojih barem jedan nije 0, takvi da vrijedi $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c} = \vec{0}$. Uvrstimo $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ i dobijemo

$$\begin{aligned} \alpha(\vec{i} + \lambda\vec{k}) + \beta(2\vec{i} + \lambda\vec{j}) + \gamma(-\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}) &= \vec{0}, \\ (\alpha + 2\beta - \gamma)\vec{i} + (\lambda\beta - 2\gamma)\vec{j} + (\lambda\alpha + \gamma)\vec{k} &= \vec{0}. \end{aligned}$$

Kako su radijevktori $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ nekomplanarni, slijedi da je

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \lambda\beta - 2\gamma = 0 \\ \lambda\alpha + \gamma = 0 \end{cases}$$

Množimo prvu jednadžbu s $(-\lambda)$ i dodajemo trećoj:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \lambda\beta - 2\gamma = 0 \\ -2\lambda\beta + (\lambda+1)\gamma = 0 \end{cases}$$

Množimo drugu jednadžbu s 2 i dodajemo trećoj:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \lambda\beta - 2\gamma = 0 \\ (\lambda-3)\gamma = 0 \end{cases}$$

Treća jednadžba nas vodi na dva slučaja: $\lambda = 3$ i $\lambda \neq 3$.

(1) Ako je $\lambda = 3$, tada treća jednadžba postaje $0 = 0$, pa sustav ima oblik

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ 3\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Rješenje je $\alpha = -\frac{1}{3}t$, $\beta = \frac{2}{3}t$, $\gamma = t$, $t \in \mathbb{R}$. Dakle, postoji i netrivialno rješenje, pa su za $\lambda = 3$ radijvektori komplanarni.

(2) Ako je $\lambda \neq 3$, tada treću jednadžbu možemo podijeliti s $\lambda - 3$. Dobijemo

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = 0 \\ \lambda\beta - 2\gamma = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ako pomnožimo treću jednadžbu s 2 i dodamo drugoj, te treću jednadžbu dodamo prvoj (odnosno, ako uvrstimo $\gamma = 0$ u prve dvije jednadžbe), dobijemo

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \lambda\beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Sada opet imamo dva podslučaja:

Ako je $\lambda = 0$ tada druga jednadžba postaje trivijalna, pa se sustav svodi na

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Rješenje je $\alpha = -2t$, $\beta = t$, $\gamma = 0$, $t \in \mathbb{R}$. Dakle, opet imamo i netrivialnih rješenja, pa su i za $\lambda = 0$ radijvektori komplanarni.

Ako je $\lambda \neq 0$ tada imamo sustav

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

koji ima jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$, pa su u tom slučaju radijvektori nekomplanarni.

Prema tome, za $\lambda \neq 0, 3$ radijvektori su nekomplanarni, a za $\lambda = 0$ i $\lambda = 3$ su komplanarni.

- (b) Neka je traženi radijvektor $\vec{d} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$. Trebamo vidjeti postoje li $x, y, z \in \mathbb{R}$ takvi da vektorska jednadžba $\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{d} = \vec{0}$ ima samo trivijalno rješenje za svaki $\lambda \in \mathbb{R}$. Računamo

$$\begin{aligned}\alpha(\vec{i} + \lambda\vec{k}) + \beta(2\vec{i} + \lambda\vec{j}) + \gamma(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) &= \vec{0}, \\ (\alpha + 2\beta + x\gamma)\vec{i} + (\lambda\beta + y\gamma)\vec{j} + (\lambda\alpha + z\gamma)\vec{k} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Slijedi da je

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + x\gamma = 0 \\ \lambda\beta + y\gamma = 0 \\ \lambda\alpha + z\gamma = 0 \end{cases}$$

Pomnožimo prvu jednadžbu s $(-\lambda)$ i dodamo je trećoj:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + x\gamma = 0 \\ \lambda\beta + y\gamma = 0 \\ -2\lambda\beta + (z - x\lambda)\gamma = 0 \end{cases}$$

Pomnožimo drugu jednadžbu s 2 i dodamo trećoj:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + x\gamma = 0 \\ \lambda\beta + y\gamma = 0 \\ (z - x\lambda + 2y)\gamma = 0 \end{cases}$$

Ako je $\lambda \neq 0$, tada možemo izabrati $x, y, z \in \mathbb{R}$ tako da ovaj sustav ima jedinstveno rješenje. Jedan (ali ne i jedini mogući) izbor je $x = y = 0, z = 1$, odnosno $\vec{d} = \vec{k}$, i tada imamo sustav:

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 0 \\ \lambda\beta = 0 \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Ako je $\lambda = 0$, tada imamo sustav

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta + x\gamma = 0 \\ y\gamma = 0 \\ (z + 2y)\gamma = 0 \end{cases}$$

odakle ne možemo dobiti jedinstveno rješenje.

Zašto se slučaj $\lambda = 0$ razlikuje od ostalih? Jer za $\lambda = 0$ imamo $\vec{a} = \vec{i}$ i $\vec{b} = 2\vec{i}$, dakle $\vec{a}$ i $\vec{b}$ su kolinearni, pa će svaki treći radijvektor $\vec{d}$ ležati u istoj ravnini s njima.

□

Domaća zadaća

DZ 2.2. Odredite za koje su $t \in \mathbb{R}$ radijvektori $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = \vec{i} + t\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ nekomplanarni. (Rješenje: $t \neq 1$)

DZ 2.3. Odredite za koje su $p \in \mathbb{R}$ radijvektori $\vec{a} = (p-1)\vec{i} + 2\vec{j}$ i $\vec{b} = (p+4)\vec{i} + (p-2)\vec{j}$ kolinearni. (Rješenje: $p = -1, 6$)

DZ 2.4. Jesu li radijvektori $\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{i} + 2\vec{k}$, $\vec{i} - \vec{j} - \vec{k}$ komplanarni? (Rješenje: Ne)

Poglavlje 3

Vektorski prostori

3.1 Definicija i primjeri

Najprije navodimo definicije, osnovna svojstva i primjere s predavanja.

DEFINICIJA 3.1. Neka je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, te $V \neq \emptyset$. Kažemo da je V **vektorski prostor nad $\mathbb{F}$** ako su definirane operacije $+: V \times V \rightarrow V$ i $\cdot: \mathbb{F} \times V \rightarrow V$ za koje vrijede sljedeća svojstva:

- (1) $(a + b) + c = a + (b + c), \forall a, b, c \in V,$
- (2) $\exists 0 \in V$ t.d. $a + 0 = 0 + a = a, \forall a \in V,$
- (3) $\forall a \in V \exists (-a) \in V$ t.d. $a + (-a) = -a + a = 0,$
- (4) $a + b = b + a, \forall a, b \in V,$
- (5) $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V,$
- (6) $(\alpha + \beta)a = \alpha a + \beta a, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall a \in V,$
- (7) $\alpha(a + b) = \alpha a + \alpha b, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall a, b \in V,$
- (8) $1 \cdot a = a, \forall a \in V.$

Ovisno je li $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ ili $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, govorimo o **realnom** odnosno **kompleksnom** vektorskom prostoru. Elemente iz V zovemo **vektori**, a elemente iz $\mathbb{F}$ **skalari**.

Kodomena preslikavanja $+$ je V , što znači da, ako su $a, b \in V$, tada je $a + b \in V$ (kažemo da je V **zatvoren s obzirom na zbrajanje**). Slično, kodomena preslikavanja $\cdot$ je V , što znači da, ako su $\alpha \in \mathbb{F}$ i $a \in V$, tada je $\alpha a \in V$ (kažemo da je V **zatvoren s obzirom na množenje skalarima**).

U svakom vektorskom prostoru, za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i sve $x, y \in V$, vrijedi:

- (a) $\alpha x = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0$ ili $x = 0$
- (b) $(-\alpha)x = \alpha(-x) = -(\alpha x)$
- (c) $(\alpha - \beta)x = \alpha x - \beta x$
- (d) $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ (pritom je $x - y = x + (-y)$)

Primjer 3.1. Standardni primjeri.

- (a) $V^2(O)$ i $V^3(O)$ su vektorski prostori nad $\mathbb{R}$ s obzirom na zbrajanje radijvektora i množenje radijvektora skalarom kako smo prethodno definirali.
- (b) Skup $\mathbb{R}$, uz uobičajeno zbrajanje brojeva i množenje skalarom, je vektorski prostor nad $\mathbb{R}$. Skup $\mathbb{C}$, uz uobičajeno zbrajanje brojeva i množenje skalarom, je vektorski prostor nad $\mathbb{C}$. Ovo objedinjeno zapisujemo: $\mathbb{F}$ je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.
- (c) $\mathbb{F}^n$ uz koordinatno zbrajanje i množenje skalarima (to jest, standardne operacije zbrajanja i množenja skalarima) je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.
- (d) $M_{mn}(\mathbb{F})$ uz zbrajanje matrica i množenje matrica skalarima po elementima (standardne operacije zbrajanja i množenje skalarima) je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.
- (e) Svaki kompleksni vektorski prostor se, uz restrikciju operacije množenja skalarom, može promatrati kao realni vektorski prostor. Tako ćemo s $(\mathbb{C}^n)_{\mathbb{R}}$ i $(M_{mn}(\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$ označavati redom $\mathbb{C}^n$ i $M_{mn}(\mathbb{C})$ promatrane kao realne vektorske prostore.
- (f) $\mathcal{P}_n$ prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog od n uz standardne operacije zbrajanja polinoma i množenja polinoma skalarima je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.
- (g) $\mathcal{P} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{P}_n$ prostor svih polinoma uz standardne operacije zbrajanja polinoma i množenja polinoma skalarima je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.
- (h) Ako je $S \neq \emptyset$, tada je skup funkcija $\mathbb{F}^S = \{f : S \rightarrow \mathbb{F}\}$, uz operacije “po točkama”:

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (\alpha f)(x) = \alpha \cdot f(x).$$

je vektorski prostor nad $\mathbb{F}$.

Zadatak 3.1. Za svaki od sljedećih skupova provjerite je li on realni vektorski prostor uz koordinatno zbrajanje i množenje skalarima.

- (a) $M = \mathbb{Q}^2$
- (b) $M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0\}$
- (c) skup M svih točaka ravnine na pravcu $y = 2x$
- (d) skup M svih točaka ravnine na pravcu $y = 2x + 1$

(U zadacima (b)-(d) skicirati skupove u ravnini, te ih zapisati kao podskup od $\mathbb{R}^2$.)

RJEŠENJE

- (a) Za $\alpha = \sqrt{2} \in \mathbb{R}$ i $(x, y) = (1, 0) \in M$ vrijedi $\alpha x = \sqrt{2} \cdot (1, 0) = (\sqrt{2}, 0) \notin M$, pa M nije zatvoren na operaciju množenja skalarima, dakle M nije vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.
- (b) Za $\alpha = -1 \in \mathbb{R}$ i $(x, y) = (1, 0) \in M$ vrijedi $\alpha(x, y) = -1 \cdot (1, 0) = (-1, 0) \notin M$, pa M nije vektorski prostor nad $\mathbb{R}$.
- (c) Zapišimo $M = \{(x, 2x) : x \in \mathbb{R}\}$. Neka su $(x, 2x), (y, 2y) \in M$ proizvoljni, te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Vrijedi

$$(x, 2x) + (y, 2y) = (x + y, 2x + 2y) = (x + y, 2(x + y)) \in M,$$

$$\alpha(x, 2x) = (\alpha x, \alpha 2x) = (\alpha x, 2(\alpha x)) \in M.$$

Dakle, definirane su operacije $+: M \times M \rightarrow M$ i $\cdot: \mathbb{R} \times M \rightarrow M$. Provjerimo svojstva (1) – (8) vektorskih prostora:

- (1) $((x, 2x) + (y, 2y)) + (z, 2z) = (x + y, 2(x + y)) + (z, 2z) = ((x + y) + z, 2((x + y) + z)) = (x + (y + z), 2(x + (y + z))) = (x, 2x) + (y + z, 2(y + z)) = (x, 2x) + ((y, 2y) + (z, 2z))$
- (2) za $(0, 0) \in M$ vrijedi $(x, 2x) + (0, 0) = (x + 0, 2(x + 0)) = (x, 2x) = (0 + x, 2(0 + x)) = (0, 0) + (x, 2x)$.
- (3) $(-x, 2(-x)) + (x, 2x) = (0, 0) = (x, 2x) + (-x, 2(-x))$.
- (4) $(x, 2x) + (y, 2y) = (x + y, 2(x + y)) = (y + x, 2(y + x)) = (y, 2y) + (x, 2x)$.
- (5) $\alpha(\beta(x, 2x)) = \alpha(\beta x, 2\beta x) = (\alpha(\beta x), 2\alpha(\beta x)) = ((\alpha\beta)x, 2(\alpha\beta)x) = (\alpha\beta)(x, 2x)$.
- (6) $(\alpha + \beta)(x, 2x) = ((\alpha + \beta)x, 2(\alpha + \beta)x) = (\alpha x + \beta x, 2(\alpha x + \beta x)) = (\alpha x + \beta x, 2\alpha x + 2\beta x) = (\alpha x, 2\alpha x) + (\beta x, 2\beta x) = \alpha(x, 2x) + \beta(x, 2x)$.
- (7) $\alpha(x + y, 2(x + y)) = (\alpha x + \alpha y, 2(\alpha x + \alpha y)) = (\alpha x, 2\alpha x) + (\alpha y, 2\alpha y) = \alpha(x, 2x) + \alpha(y, 2y)$.
- (8) $1 \cdot (x, 2x) = (1 \cdot x, 1 \cdot 2x) = (x, 2x)$.

(d) Imamo $M = \{(x, 2x + 1) : x \in \mathbb{R}\}$. Tada je $(0, 1), (1, 3) \in M$ (za x smo uzeli 0 i 1). Tada je $(0, 1) + (1, 3) = (1, 4) \notin (x, 2x + 1), \forall x \in \mathbb{R}$. Prema tome, M nije zatvoren na zbrajanje i zato nije vektorski prostor. □

Zadatak 3.2. Za svaki od sljedećih skupova navedite po tri njegova elementa, a zatim provjerite je li on realni vektorski prostor uz standardno definirane operacije zbrajanja i množenja skalarima.

- (a) skup svih polinoma s realnim koeficijentima stupnja barem 5 zajedno s nulpolinomom
- (b) skup svih polinoma s realnim koeficijentima neparnog stupnja zajedno s nulpolinomom

RJEŠENJE Neka je S opisani skup. Imamo:

- (a) $0, t^5, -t^5 + t^4 \in S$. Vrijedi $t^5 + (-t^5 + t^4) = t^4 \notin S$, pa S nije vektorski prostor.
- (b) $0, t^3 + t^2, -t^3 \in S$. Vrijedi $(t^3 + t^2) + (-t^3) = t^2 \notin S$, pa S nije vektorski prostor. □

Zadatak 3.3. Neka je V skup svih (beskonačnih) nizova realnih brojeva. Definiramo operacije

$$(a_1, a_2, a_3, \dots) + (b_1, b_2, b_3, \dots) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots), \quad (3.1)$$

$$\alpha(a_1, a_2, a_3, \dots) = (\alpha a_1, \alpha a_2, \alpha a_3, \dots), \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (3.2)$$

- (a) Provjerite je li V realan vektorski prostor uz ovako definirane operacije.
- (b) Neka je $A \subset V$ skup svih aritmetičkih nizova. Je li A realan vektorski prostor uz iste operacije?
- (c) Neka je $G \subset V$ skup svih geometrijskih nizova. Je li G realan vektorski prostor uz iste operacije?

RJEŠENJE

- (a) Niz realnih brojeva je funkcija s $\mathbb{N}$ u $\mathbb{R}$, a navedene operacije $+$ i $\cdot$ s nizovima predstavljaju operacije po točkama kao u primjeru 3.1. Dakle, $V = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, pa je V realan vektorski prostor (po navedenom primjeru).

Drugi način je da raspišemo. Skratimo oznake: neka su $(a_1, \dots)$ i $(b_1, \dots)$ nizovi i $\alpha \in \mathbb{R}$. Imamo

$$(a_1, \dots) + (b_1, \dots) = (a_1 + b_1, \dots) \in V,$$

$$\alpha(a_1, \dots) = (\alpha a_1, \dots) \in V.$$

Provjerimo svojstva (1)–(8), vektorskih prostora. Neka su $(a_1, \dots)$, $(b_1, \dots)$ i $(c_1, \dots)$ proizvoljni elementi od V , te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Imamo

- (1) $[(a_1, \dots) + (b_1, \dots)] + (c_1, \dots) = (a_1 + b_1, \dots) + (c_1, \dots) = ((a_1 + b_1) + c_1, \dots) = (a_1 + (b_1 + c_1), \dots) = (a_1, \dots) + (b_1 + c_1, \dots) = (a_1, \dots) + [(b_1, \dots) + (c_1, \dots)]$
- (2) za $(0, \dots) \in V$ vrijedi $(a_1, \dots) + (0, \dots) = (a_1 + 0, \dots) = (a_1, \dots) = (0 + a_1, \dots) = (0, \dots) + (a_1, \dots)$.
- (3) za $(-a_1, \dots) \in V$ vrijedi $(-a_1, \dots) + (a_1, \dots) = (0, \dots) = (a_1, \dots) + (-a_1, \dots)$.
- (4) $(a_1, \dots) + (b_1, \dots) = (a_1 + b_1, \dots) = (b_1 + a_1, \dots) = (b_1, \dots) + (a_1, \dots)$
- (5) $\alpha(\beta(a_1, \dots)) = \alpha(\beta a_1, \dots) = (\alpha(\beta a_1), \dots) = ((\alpha\beta)a_1, \dots) = (\alpha\beta)(a_1, \dots)$
- (6) $(\alpha + \beta)(a_1, \dots) = ((\alpha + \beta)a_1, \dots) = (\alpha a_1 + \beta a_1, \dots) = (\alpha a_1, \dots) + (\beta a_1, \dots) = \alpha(a_1, \dots) + \beta(a_1, \dots)$
- (7) $\alpha(a_1 + b_1, \dots) = (\alpha(a_1 + b_1), \dots) = (\alpha a_1 + \alpha b_1, \dots) = (\alpha a_1, \dots) + (\alpha b_1, \dots) = \alpha(a_1, \dots) + \alpha(b_1, \dots)$.
- (8) $1 \cdot (a_1, \dots) = (1 \cdot a_1, \dots) = (a_1, \dots)$.
- (b) Aritmetički niz $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ je niz za koji postoji $d \in \mathbb{R}$ takav da vrijedi $a_n = a_1 + (n - 1)d$ za sve $n \in \mathbb{N}$. Neka su dani aritmetički nizovi $a_n = a_1 + (n - 1)d$, $b_n = b_1 + (n - 1)t$ i $\alpha \in \mathbb{R}$. Tada za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$a_n + b_n = a_1 + b_1 + (n - 1)(d + t) \quad \text{i} \quad \alpha a_n = \alpha a_1 + (n - 1)\alpha d$$

što znači da je zbroj aritmetičkih nizova aritmetički niz, te umnožak aritmetičkog niza pomnožen skalarom je novi aritmetički niz. Kraće zapisano, vrijedi

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} + (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A \quad \text{i} \quad \alpha \cdot (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A.$$

Dakle, definirane su operacije $+: A \times A \rightarrow A$ i $\cdot: \mathbb{R} \times A \rightarrow A$.

Uočimo $(0, \dots) = 0 \cdot (a_1, a_1 + d, \dots)$ i

$$(-a_1, \dots, -a_1 + (n - 1)(-d), \dots) = (-1) \cdot (a_1, \dots, a_1 + (n - 1)d, \dots)$$

jesu aritmetički nizovi. Prvi je neutralan za zbrajanje svih, pa i aritmetičkih nizova, a drugi je inverz od $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. I ostala svojstva vektorskih prostora vrijede, jer po (a) vrijede za sve nizove, pa onda i za aritmetičke nizove.

- (c) Geometrijski niz je niz oblika $(a_1, a_1 q, a_1 q^2, \dots)$ za neki q .

Nizovi $(1, 1, 1, \dots)$ i $(1, 3, 9, \dots)$ jesu geometrijski, ali njihov zbroj $(2, 4, 10, \dots)$ nije geometrijski jer $4/2 \neq 10/4$. Prema tome, geometrijski nizovi ne čine vektorski prostor.

Zadatak 3.4. Provjerite je li $\mathbb{R}^2$, uz standardno zbrajanje i množenje skalarom definirano kao

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y), \quad \alpha \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

vektorski prostor?

RJEŠENJE Ne. Prvi od aksioma koji ovdje nije zadovoljen je distributivnost u odnosu na skalarni faktor. Moralo bi za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i sve $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ vrijediti $(\alpha + \beta)(x, y) = \alpha(x, y) + \beta(x, y)$, ali zbog

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(x, y) &= ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y), \\ \alpha(x, y) + \beta(x, y) &= (\alpha x, \alpha y) + (\beta x, \beta y) = (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y) \end{aligned}$$

to ne vrijedi za $y \neq 0$.

Od sada pa nadalje: ukoliko spominjemo prostore $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$, $\mathcal{P}_n$, M_{mn} bez navođenja operacija, tada podrazumijevamo standardne operacije.

Domaća zadaća

DZ 3.1. Za svaki od sljedećih skupova navedite po tri njegova elementa, a zatim provjerite je li on realni vektorski prostor.

(a) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$

(b) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 0\}$

(c) $\left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} : a \in \mathbb{R} \right\}$

(d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & a \\ b & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\}.$

DZ 3.2. Dokažite da svaki (realni ili kompleksni) vektorski prostor $V \neq \{0\}$ sadrži beskonačno mnogo vektora.

RJEŠENJE Uzmimo $x \neq 0$. Ako je $\alpha \neq \beta$ tada je $\alpha - \beta \neq 0$ pa je $(\alpha - \beta)x \neq 0$, dakle $\alpha x \neq \beta x$. $\square$

DZ 3.3. U $\mathbb{R}^2$ promatramo standardno zbrajanje i uvedemo novo množenje skalarom formulom

$$\alpha(x, y) = (\alpha x, 0), \quad \alpha \in \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Provjerite je li $\mathbb{R}^2$ realni vektorski prostor uz ove operacije?

3.2 Linearna ljuska i skup (sustav) izvodnica

DEFINICIJA 3.2. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, te $S \subseteq V$, $S \neq \emptyset$. **Linearna ljuska od S** definira se kao

$$[S] = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{F}, a_i \in S, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Za $S = \emptyset$ definiramo $[S] = \{0\}$. Skup $S \subseteq V$ je **skup izvodnica (generatora)** za V ako vrijedi $[S] = V$, to jest, ako se svaki vektor iz V može zapisati kao linearna kombinacija vektora iz S . Prostor V je **konačnodimenzijski** ili **konačno generiran** ako postoji bar jedan konačan skup izvodnica za V .

Na predavanjima je dokazano sljedeće:

- Za konačan skup u vektorskom prostoru V vrijedi

$$[\{a_1, \dots, a_k\}] = \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i : \alpha_i \in \mathbb{F} \right\} \quad (3.3)$$

- Ako su $S_1, S_2 \subseteq V$ takvi da je $S_1 \subseteq S_2$, tada je $[S_1] \subseteq [S_2]$.
- Nadskup skupa izvodnica za V je također skup izvodnica za V .
- Vrijedi $[V] = V$. Ideja je naći čim manji skup izvodnica za V .
- Svaka dva nekolinearna vektora u $V^2(O)$ čine skup izvodnica za $V^2(O)$, svaka tri nekomplanarna vektora u $V^3(O)$ čine skup izvodnica za $V^3(O)$.

- Skup $\{e_1, \dots, e_n\}$ je skup izvodnica za $\mathbb{F}^n$, skup $\{E_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ je skup izvodnica za M_{mn} , skup $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ je skup izvodnica za $\mathcal{P}_n$.
- Ako je S skup izvodnica za V i ako se neki vektor $x \in S$ može prikazati kao linearna kombinacija ostalih članova iz S , onda je i $S \setminus \{x\}$ skup izvodnica za V .
- Prostori $\mathbb{F}^n$, $\mathcal{P}_n$, M_{mn} su konačnodimenzionalni, dok prostori $\mathcal{P}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ nisu. Nulprostor $\{0\}$ je konačnodimenzionalan na trivijalan način.

Zadatak 3.5. U vektorskom prostoru $M_2(\mathbb{R})$ odredite, ako postoji, konačan skup S takav da je

- (a) $[S] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$
- (b) $[S] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\},$
- (c) $[S] = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$

RJEŠENJE Koristimo (3.3).

(a) Ovdje možemo uzeti $S = \{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}$ jer vrijedi

$$\left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} = [\{E_{11}, E_{12}, E_{22}\}].$$

(b) Primijetimo kako općenito za svaki vektorski prostor V i $\emptyset \neq S \subseteq V$ imamo $0 \in [S]$. Kako zadani skup ne sadrži nulvektor, slijedi da ne postoji S s traženim svojstvom.

(c) Ovdje imamo

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ a+b & a-b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} &= \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ a & a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & b \\ b & -b \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\} \\ &= [\{E_{11} + E_{21} + E_{22}, E_{12} + E_{21} - E_{22}\}], \end{aligned}$$

pa možemo uzeti $S = \{E_{11} + E_{21} + E_{22}, E_{12} + E_{21} - E_{22}\}$.

Zadatak 3.6. Neka je S podskup vektorskog prostora V . Dokažite da je

$$[[S]] = [S].$$

RJEŠENJE Očito je $[S] \subseteq [[S]]$.

Pokažimo da je $[[S]] \subseteq [S]$. Elementi iz $[[S]]$ su (konačne) linearne kombinacije elemenata iz $[S]$, dakle linearne kombinacije linearnih kombinacija elemenata iz S . Trebamo pokazati da smo na taj način dobili elemente iz $[S]$, tj. linearne kombinacije elemenata iz S . Zbog jednostavnijeg zapisa provjeru ćemo provesti za dva vektora.

Neka su $x, y \in [S]$. Tada je $x = \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i$ i $y = \sum_{j=1}^l \beta_j y_j$ za neke $k, l \in \mathbb{N}$, neke skalare $\alpha_1, \dots, \alpha_k, \beta_1, \dots, \beta_l$ i vektore $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l$ iz S . Tada je

$$\alpha x + \beta y = \sum_{i=1}^k \alpha \alpha_i x_i + \sum_{j=1}^l \beta \beta_j y_j = \text{linearna kombinacija elemenata iz } S,$$

dakle $\alpha x + \beta y \in [S]$.

Zadatak 3.7. Neka je $S = \{(x, y, z, y) : x, y, z \in \mathbb{R}\}$.

(a) Pokažite da S nije skup izvodnica za $\mathbb{R}^4$.

(b) Nađite, ako postoji, element $v \in \mathbb{R}^4$ takav da je $S \cup \{v\}$ skup izvodnica za $\mathbb{R}^4$. Je li takav v jedinstven?

RJEŠENJE (a) Treba pokazati da $[S] \neq \mathbb{R}^4$. Očito je $S \neq \mathbb{R}^4$. Imamo

$$S = \{(x, y, z, y) : x, y, z \in \mathbb{R}\} = \{xe_1 + y(e_2 + e_4) + ze_3 : x, y, z \in \mathbb{R}\} = [\{e_1, e_2 + e_4, e_3\}].$$

Po Zadatku 3.6 je

$$[S] = [[\{e_1, e_2 + e_4, e_3\}]] = [\{e_1, e_2 + e_4, e_3\}] = S \neq \mathbb{R}^4.$$

Dakle, S nije skup izvodnica za $\mathbb{R}^4$.

(b) Uzmimo $v = e_4$, tada je $e_2 = (e_2 + e_4) - v \in [S \cup \{v\}]$ i zato $\{e_1, e_2, e_3, e_4\} \subseteq [S \cup \{v\}]$, odakle slijedi

$$\mathbb{R}^4 = [\{e_1, e_2, e_3, e_4\}] \subseteq [[S \cup \{v\}]] = [S \cup \{v\}] \subseteq \mathbb{R}^4.$$

Slijedi $[S \cup \{v\}] = \mathbb{R}^4$, pa je $S \cup \{v\}$ skup izvodnica za $\mathbb{R}^4$.

Odabir $v = e_4$ nije jedinstven, mogli smo uzeti $v = e_2$ i provesti sličan postupak. □

Zadatak 3.8. Neka su S_1 i S_2 podskupovi vektorskog prostora V . Dokažite da je $[S_1] = [S_2]$ ako i samo ako je $S_1 \subseteq [S_2]$ i $S_2 \subseteq [S_1]$.

RJEŠENJE Pretpostavimo $[S_1] = [S_2]$. Tada iz $S_1 \subseteq [S_1]$ slijedi $S_1 \subseteq [S_2]$, a iz $S_2 \subseteq [S_2]$ slijedi $S_2 \subseteq [S_1]$.

Obratno, po Zadatku 3.6, iz $S_1 \subseteq [S_2]$ slijedi $[S_1] \subseteq [[S_2]] = [S_2]$ i slično $[S_2] \subseteq [S_1]$. Dakle $[S_1] = [S_2]$. □

Zadatak 3.9. Dokažite da je $[S_1] = [S_2]$, ako su S_1 i S_2 podskupovi od $\mathbb{R}^3$ zadani kao

$$S_1 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (2, 4, 2)\}, \quad S_2 = \{(1, 2, 1), (1, 0, -1)\}.$$

RJEŠENJE Koristimo prethodni zadatak. Vrijedi

$$(1, 1, 0) = \frac{1}{2}(1, 2, 1) + \frac{1}{2}(1, 0, -1) \in [S_2]$$

$$(0, 1, 1) = \frac{1}{2}(1, 2, 1) - \frac{1}{2}(1, 0, -1) \in [S_2]$$

$$(2, 4, 2) = 2(1, 2, 1) \in [S_2],$$

pa vidimo da je $S_1 \subseteq [S_2]$. S druge strane, imamo

$$(1, 2, 1) = (1, 1, 0) + (0, 1, 1) \in [S_1]$$

$$(1, 0, -1) = (1, 1, 0) - (0, 1, 1) \in [S_1],$$

pa je i $S_2 \subseteq [S_1]$. Stoga, prema prethodnom zadatku, slijedi $[S_1] = [S_2]$. □

Zadatak 3.10. Odredite $[S]$, ako je

(a) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$.

(b) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$

RJEŠENJE (a) Uočimo da je $S_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, -1)\}$ podskup skupa S . Lako vidimo da je $[S_1] = \mathbb{R}^3$ odakle slijedi $\mathbb{R}^3 = [S_1] \subseteq [S] \subseteq \mathbb{R}^3$, pa zaključujemo $[S] = \mathbb{R}^3$.

(b) Imamo

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\} \\ &= \{(x, y, x + y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{(x, 0, x) + (0, y, y) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(e_1 + e_3) + y(e_2 + e_3) : x, y \in \mathbb{R}\} = [\{e_1 + e_3, e_2 + e_3\}]. \end{aligned}$$

Po Zadatku 3.6 imamo $[S] = [[\{e_1 + e_3, e_2 + e_3\}]] = [\{e_1 + e_3, e_2 + e_3\}] = S$.

Domaća zadaća

DZ 3.4. Neka je V vektorski prostor te $a, b, c \in V$ takvi da vrijedi $a + b + c = 0$. Dokažite da je

$$[\{a, b\}] = [\{b, c\}] = [\{a, c\}] = [\{a, b, c\}].$$

DZ 3.5. Odredite konačan skup S takav da je

(a) $[S] = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 2b-c \\ a-2b+c & 3a+5c \end{bmatrix} : a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \subseteq M_2(\mathbb{R}),$

(b) $[S] = \{(a + 2b + c, a - b) : a, b, c \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^2,$

(c) $[S] = \{(a + \bar{a} + b, b) : a, b \in \mathbb{C}\} \subseteq \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$ (uputa: $a = x + iy, b = u + iv; x, y, u, v \in \mathbb{R}$),

(d) $\{p \in \mathcal{P}_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0\} \subseteq P_2(\mathbb{R}).$

DZ 3.6. Dokažite da vrijedi:

(a) $(1, 0, 3) \in [\{(1, 0, 0), (0, 1, 2), (0, 2, 1)\}] \subseteq \mathbb{R}^3$

(b) $1 + t \notin [\{t^2 + t + 2, t^2 + 2t\}] \subseteq \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),$

(c) $(3 + i, 1 + i) \in [\{(1 + i, 2), (1 - i, i)\}] \subseteq \mathbb{C}^2,$

(d) $(3 + i, 1 + i) \notin [\{(1 + i, 2), (1 - i, i)\}] \subseteq \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2.$

DZ 3.7. Vrijede li sljedeće skupovne jednakosti:

(a) $[\{(1, 3), (2, 5)\}] = [\{(5, 13), (1, 2)\}]$ u $\mathbb{R}^2$,

(b) $[\{\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}, 2\vec{i} - \vec{j}\}] = [\{3\vec{i} + \vec{k}, 3\vec{j} + 2\vec{k}\}]$ u $V^3(O)$,

(c) $[\{1 + t, 2t^2 + t + 3\}] = [\{t^2 + 1, t^2 + t + 1\}]$ u $\mathcal{P}_2(\mathbb{R}).$

DZ 3.8. Provjerite je li S skup izvodnica za vektorski prostor V ako je

(a) $S = \{1 + i, 1 - i\}, V = \mathbb{C}_{\mathbb{R}},$

(b) $S = \{1, 1 + t, 1 + t + t^2\}, V = \mathcal{P}_2(\mathbb{R}),$

(c) $S = \{(1, 2, 3), (1, 0, 1), (1, 1, 0)\}, V = \mathbb{R}^3?$

3.3 Linearna (ne)zavisnost skupa

Na početku ponavljamo definicije i osnovne tvrdnje s predavanja.

DEFINICIJA 3.3. Skup $S = \{x_1, \dots, x_k\}$ u vektorskom prostoru V je **linearno nezavisan** ako vrijedi

$$\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}, \quad \sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \dots = \alpha_k = 0. \quad (3.4)$$

U protivnom se kaže da je skup **linearno zavisn**. Drugim riječima, S je linearno zavisn ako postoje $\alpha_i \in \mathbb{F}$, od kojih barem jedan nije jednak 0, takvi da je $\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i = 0$.

Na predavanjima smo dokazali sljedeće:

- Dva nekolinearna vektora $\{\vec{a}, \vec{b}\}$ bilo u $V^2(O)$, bilo u $V^3(O)$, čine linearno nezavisan skup. Isto vrijedi za tri nekomplanarna vektora u $V^3(O)$.
- Skup $\{e_1, \dots, e_n\}$ je linearno nezavisan i u $\mathbb{F}^n$. (Ovdje je e_i uređena n -torka koja na i -toj koordinati ima 1, a sve ostalo nule.)
- Skup $\{1, t, t^2, \dots, t^n\}$ je linearno nezavisan u $\mathcal{P}_n$.
- Skup $\{E_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ je linearno nezavisan u M_{mn} . (Ovdje je E_{ij} matrica iz M_{mn} koja na mjestu (i, j) ima 1, a na svim ostalim mjestima 0.)
- Jednočlan skup $\{x\}$ je linearno nezavisan ako i samo ako je $x \neq 0$.
- Neka su $a, b \neq 0$ proizvoljni vektori iz vektorskog prostora V . Tada je $\{a, b\}$ linearno zavisn skup ako i samo ako je $b = \alpha a$ za neki $\alpha \in \mathbb{F}$.
- Podskup linearno nezavisnog skupa je linearno nezavisan.
- Nadskup linearno zavisnog skupa je linearno zavisn. Posebno, svaki skup koji sadrži 0 je linearno zavisn.
- Skup $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ je linearno zavisn ako i samo ako postoji bar jedan element iz S koji je linearna kombinacija preostalih. Ako je S linearno zavisn i $x_1 \neq 0$ (i pritom S smatramo uređenim), onda postoji bar jedan element iz S koji je linearna kombinacija svojih prethodnika u S .

Zadatak 3.11. Neka su zadani vektori $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$, $a_3 = (1, -2, 1)$ i $a_4 = (2, 5, 3)$ u vektorskom prostoru $\mathbb{R}^3$. Ispitajte linearnu nezavisnost skupova:

- (a) $\{a_1, a_2\}$
- (b) $\{a_1, a_2, a_3\}$
- (c) $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$.

RJEŠENJE

- (a) Po definiciji linearne (ne)zavisnosti, tražimo rješenje jednadžbe

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 0.$$

Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_2 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 = 0 \end{cases}$$

Iz druge jednadžbe je $\alpha_2 = 0$, a onda iz prve (= treće) slijedi $\alpha_1 = 0$. Prema tome, skup $\{a_1, a_2\}$ je linearno nezavisan.

S obzirom na to da se radi o dvočlanom skupu, ovo smo mogli riješiti i na drugi način: tražimo postoji li $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $a_1 = \lambda a_2$, to jest $(1, 0, 1) = \lambda(1, 2, 1)$. Očito je da takav λ ne postoji, pa je skup $\{a_1, a_2\}$ linearno nezavisan.

(b) Kao i maloprije, tražimo rješenje jednadžbe

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \alpha_3 a_3 = 0.$$

Raspisivanjem dobijemo sustav

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_2 - 2\alpha_3 = 0 \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0 \end{cases}$$

Dobijemo $\alpha_2 = \alpha_3 = t \in \mathbb{R}$, $\alpha_1 = -2t$. Dakle, rješenje početne jednadžbe nije jedinstveno, odnosno, postoji i netrivialno rješenje, pa je skup linearno zavisn.

(c) Skup $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ je nadskup linearno zavisnog skupa $\{a_1, a_2, a_3\}$ pa je i on linearno zavisn.

Zadatak 3.12. Je li skup $S = \{(1, 0, 0), (i, 0, 0)\}$ linearno nezavisan u $\mathbb{C}^3$? A u $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^3$?

RJEŠENJE Skup S je linearno zavisn u (kompleksnom) vektorskom prostoru $\mathbb{C}^3$ jer za $\alpha = i \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$(i, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0).$$

Ako promatramo realni vektorski prostor $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^3$, tada provjeravamo postoji li $\alpha \in \mathbb{R}$ takav da je

$$(i, 0, 0) = \alpha(1, 0, 0).$$

Očito je da takav (realan) α ne postoji, pa je S linearno nezavisan u $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^3$.

Zadatak 3.13. Odredite nužan i dovoljan uvjet na $x, y \in \mathbb{F}$ tako da je skup $S = \{(1, x), (2, y)\}$ linearno zavisn u $\mathbb{F}^2$.

RJEŠENJE Očito su oba vektora različita od nulvektora, pa je S linearno zavisn ako i samo ako postoji $\alpha \in \mathbb{F}$ takav da je

$$(2, y) = \alpha(1, x) \Leftrightarrow (2, y) = (\alpha, \alpha x) \Leftrightarrow (\alpha = 2, y = \alpha x) \Leftrightarrow y = 2x.$$

Prema tome, S je linearno zavisn ako i samo ako je $y = 2x$.

Zadatak 3.14. Provjerite linearnu nezavisnost skupa $\{(1, x, x^2), (1, y, y^2), (1, z, z^2)\}$ u $\mathbb{F}^3$, ako su $x, y, z \in \mathbb{F}$ međusobno različiti.

RJEŠENJE Koristimo definiciju linearne nezavisnosti. Skup $\{(1, x, x^2), (1, y, y^2), (1, z, z^2)\}$ je linearno nezavisan ako iz

$$\alpha(1, x, x^2) + \beta(1, y, y^2) + \gamma(1, z, z^2) = (0, 0, 0),$$

slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Dobijemo sustav (s nepoznanicama α, β, γ)

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ x\alpha + y\beta + z\gamma = 0 \\ x^2\alpha + y^2\beta + z^2\gamma = 0 \end{cases}$$

Tada imamo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ x & y & z & 0 \\ x^2 & y^2 & z^2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 1 & 0 \\ 0 & y-x & z-x & 0 \\ 0 & y^2-x^2 & z^2-x^2 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & & 1 & 0 \\ 0 & y-x & z-x & 0 \\ 0 & 0 & (z-x)(z-y) & 0 \end{array} \right]$$

U prvom koraku napravili smo $R_2 - xR_1 \rightarrow R_2, R_3 - x^2R_1 \rightarrow R_3$, a u drugom $R_3 - (y+x)R_2 \rightarrow R_3$.

Prema pretpostavci, $(z-x)(z-y) \neq 0$ pa možemo treći redak podijeliti sa $(z-x)(z-y)$. Nakon toga $R_2 - (z-x)R_3 \rightarrow R_2$ i $R_1 - R_3 \rightarrow R_1$:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & y-x & z-x & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right]$$

Kako je $x \neq y$, drugi redak možemo podijeliti s $y-x$, nakon čega napravimo $R_1 - R_2 \rightarrow R_1$:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] \Rightarrow \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

Dakle, skup je linearno nezavisan za sve međusobno različite x, y i z . □

Zadatak 3.15. Za sljedeće podskupove od $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ provjerite njihovu linearnu (ne)zavisnost.

- (a) $\{f, g, h\}$, gdje je $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ i $h(x) = \cos(x + \frac{\pi}{4})$,
- (b) $\{f, g, h\}$, gdje je $f(x) = \sin x, g(x) = \cos x$ i $h(x) = \sin 2x$,
- (c) $\{f, g, h\}$, gdje je $f(x) = (x-1)^2, g(x) = (x+2)^2, h(x) = (x-1)(x+2)$,
- (d) $\{f, g, h\}$, gdje je $f(x) = a, g(x) = e^x, h(x) = e^{2x}$, a $a \in \mathbb{R}$ je konstanta.

RJEŠENJE

- a) Vrijedi $h(x) = \cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2}g(x) - \frac{\sqrt{2}}{2}f(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, dakle $h = \frac{\sqrt{2}}{2}g - \frac{\sqrt{2}}{2}f$.
Slijedi da je skup linearno zavisn.

- b) Pretpostavimo da postoje α, β i γ takvi da je $\alpha f + \beta g + \gamma h = 0$, tj. takvi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\alpha \sin x + \beta \cos x + \gamma \sin 2x = 0.$$

Uvrštavanjem različitih vrijednosti za x dobijemo: $x = 0 \Rightarrow \beta = 0, x = \pi/2 \Rightarrow \alpha = 0, x = \pi/4 \Rightarrow \gamma = 0$. Slijedi da je skup linearno nezavisan.

- c) Pretpostavimo da postoje α, β i γ takvi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\alpha(x-1)^2 + \beta(x+2)^2 + \gamma(x-1)(x+2) = 0.$$

Sada uvrštavamo: $x = 1 \Rightarrow \beta = 0$, $x = -2 \Rightarrow \alpha = 0$, $x = 3 \Rightarrow \gamma = 0$. Slijedi da je skup linearno nezavisan.

Alternativno, sređivanjem gornjeg izraza dobijemo

$$(\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (-2\alpha + 4\beta + \gamma)x + \alpha + 4\beta - 2\gamma = 0,$$

što je ekvivalentno sustavu

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ -2\alpha + 4\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + 4\beta - 2\gamma = 0 \end{cases}$$

Rješavanjem dobijemo jedinstveno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$, pa je skup linearno nezavisan.

- d) Ako je $a = 0$ tada je $f = 0$, pa je skup linearno zavisn. Neka je $a \neq 0$. Pretpostavimo da postoje α, β i γ takvi da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\alpha a + \beta e^x + \gamma e^{2x} = 0$. Uvrštavanjem redom $x = 0, x = \ln 2, x = \ln 3$ dobijemo sustav

$$\begin{cases} \alpha a + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha a + 2\beta + 4\gamma = 0 \\ \alpha a + 3\beta + 9\gamma = 0 \end{cases}$$

Tada je

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 0 \\ a & 2 & 4 & 0 \\ a & 3 & 9 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 8 & 0 \end{array} \right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} a & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{array} \right]$$

Napravili smo: $R_2 - R_1 \rightarrow R_2, R_3 - R_1 \rightarrow R_3$ u prvom, te $R_3 - 2R_2 \rightarrow R_3$ u drugom koraku. Odatle slijedi $\alpha = \beta = \gamma = 0$, pa je skup linearno nezavisan.

Zadatak 3.16. Neka je V vektorski prostor i $n \in \mathbb{N}$, te neka je skup $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n\}$ linearno nezavisan. Provjerite linearnu nezavisnost skupova

(a) $A = \{a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, \dots, a_{n-1} - a_n, a_n - a_1\}$

(b) $B = \{a_1 - a_2, a_2 - a_3, a_3 - a_4, \dots, a_{n-1} - a_n, a_n\}$.

RJEŠENJE (a) Treba provjeriti postoje li $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da je

$$\alpha_1(a_1 - a_2) + \alpha_2(a_2 - a_3) + \alpha_3(a_3 - a_4) + \dots + \alpha_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + \alpha_n(a_n - a_1) = 0.$$

Uočimo da ova jednakost vrijedi ako uzmemo sve iste koeficijente, na primjer, $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 1$. Dakle, A je linearno zavisn skup.

- (b) Provjeravamo postoje li $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, od kojih je barem jedan različit od nule, takvi da je

$$\alpha_1(a_1 - a_2) + \alpha_2(a_2 - a_3) + \alpha_3(a_3 - a_4) + \dots + \alpha_{n-1}(a_{n-1} - a_n) + \alpha_n a_n = 0.$$

Grupiramo koeficijente uz vektore a_i :

$$\alpha_1 a_1 + (\alpha_2 - \alpha_1) a_2 + (\alpha_3 - \alpha_2) a_3 + \dots + (\alpha_{n-1} - \alpha_{n-2}) a_{n-1} + (\alpha_n - \alpha_{n-1}) a_n = 0.$$

Zbog linearne nezavisnosti skupa $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ odatle slijedi

$$\alpha_1 = 0, \alpha_2 - \alpha_1 = 0, \alpha_3 - \alpha_2 = 0, \dots, \alpha_{n-1} - \alpha_{n-2} = 0, \alpha_n - \alpha_{n-1} = 0,$$

odakle slijedi $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \dots = \alpha_{n-1} = \alpha_n = 0$. Prema tome, skup B je linearno nezavisan.

Domaća zadaća

DZ 3.9. Provjerite jesu li sljedeći skupovi linearno nezavisni:

- (a) $\{E_{ij} + E_{ji} : 1 \leq i \leq j \leq n\}$ u M_n .
- (b) $\{(1, 9, 7), (2, 1, 1), (-1, 8, 6)\}$ u $\mathbb{R}^3$.
- (c) $\{(1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, 1)\}, \{(1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1)\}, \{(1, 2, 1, 1), (1, 0, 1, 1), (1, 1, 1, 1), (2, 3, 5, 8)\}$ u $\mathbb{C}^4$.
- (d) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ u $M_2(\mathbb{R})$.
- (e) $\{1, t-1, (t-1)^2, (t-1)^3\}$ u $\mathcal{P}_3$.
- (f) $\{f_1, f_2, f_3\}$ u $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $f_1(x) = x^2 - 2x + 2$, $f_2(x) = x^2 + 2x - 7$, $f_3(x) = 3x - 9$.

DZ 3.10. Odredite nužan i dovoljan uvjet na vektore $v \in \mathbb{R}^4$ tako da skup $\{e_1, e_2, e_3, v\}$ bude linearno nezavisan.

DZ 3.11. Je li skup $\{(1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ linearno nezavisan/skup izvodnica za $\mathbb{R}^3$? Isto pitanje za skup $\{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0), (1, -1, 1)\}$.

DZ 3.12. Neka je $\{x, y\}$ linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru V . Neka su $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{F}$. Odredite nužan i dovoljan uvjet da skup $\{\alpha x + \beta y, \gamma x + \delta y\}$ bude linearno nezavisan.

DZ 3.13. Neka je skup $\{x, y, z\}$ linearno nezavisan u V . Je li skup $\{x + y, y + z, z + x\}$ linearno nezavisan?

DZ 3.14. Neka je $\{p, q\}$ linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru $\mathcal{P}$. Dokažite da je skup $\{p, q, pq\}$ linearno nezavisan ako i samo ako vrijedi $\text{st } p \geq 1$ i $\text{st } q \geq 1$.

3.4 Baza i dimenzija

DEFINICIJA 3.4. **Baza** vektorskog prostora V je (konačan) linearno nezavisan skup izvodnica za V .

Na predavanjima smo dokazali:

- Svaki konačnodimenzionalan prostor osim $\{0\}$ ima (konačnu) bazu.
- Baze u $V^2(O)$ su skupovi od dva nekolinearna vektora, baze u $V^3(O)$ su skupovi od tri nekomplanarna vektora.
- Baza nije jedinstvena, ali sve baze za V su jednakobrojne. Njihov kardinalitet nazivamo **dimenzija prostora** V , oznaka: $\dim V$.
- $\{e_1, \dots, e_n\}$ je baza za $\mathbb{F}^n$, $\dim \mathbb{F}^n = n$.
- $\{1, t, \dots, t^n\}$ je baza za $\mathcal{P}_n$, $\dim \mathcal{P}_n = n + 1$.
- $\{E_{ij} : i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n\}$ je baza za M_{mn} , $\dim M_{mn} = mn$.
- $\{e_1, ie_1, e_2, ie_2, \dots, e_n, ie_n\}$ je baza za $(\mathbb{C}^n)_{\mathbb{R}}$, $\dim(\mathbb{C}^n)_{\mathbb{R}} = 2n$.
- Ako je $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ bilo koja baza za V , onda svaki vektor $v \in V$ ima jedinstven prikaz u obliku $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$.

- Svaki konačan skup izvodnica za V može se reducirati do baze.
- Svaki linearno nezavisan skup u V može se nadopuniti do baze.
- Neka je $n = \dim V$. Linearno nezavisni skupovi u V imaju $\leq n$ elemenata. Linearno nezavisan skup od n elemenata je nužno baza za V .
- Neka je $n = \dim V$. Skupovi izvodnica za V imaju $\geq n$ elemenata. Skup izvodnica od n elemenata je nužno baza za V .

Zadatak 3.17. Pokažite da je skup $S = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, -1, 0)\}$ baza za $\mathbb{R}^3$, te u njoj prikazite proizvoljni $v \in \mathbb{R}^3$.

RJEŠENJE Skup S sadrži točno $3 = \dim \mathbb{R}^3$ elementa, pa je dovoljno pokazati ili da je S linearno nezavisan ili da je S skup izvodnica za $\mathbb{R}^3$. S obzirom na drugi dio zadatka, pokažimo da je S skup izvodnica.

Neka je $v = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ proizvoljan vektor. Tražimo skalare $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takve da je $v = \alpha(1, 1, 1) + \beta(1, 1, 0) + \gamma(1, -1, 0)$, tj.

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = x_1 \\ \alpha + \beta - \gamma = x_2 \\ \alpha = x_3. \end{cases}$$

Rješenje ovog sustava je

$$\alpha = x_3, \quad \beta = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3, \quad \gamma = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2,$$

što daje prikaz

$$v = x_3(1, 1, 1) + \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - x_3\right)(1, 1, 0) + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2\right)(1, -1, 0).$$

Oдавde zaključujemo i da je S skup izvodnica za $\mathbb{R}^3$, a onda i baza.

Zadatak 3.18. Neka je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ jedna baza vektorskog prostora $V^3(O)$.

(a) Za koje $\lambda \in \mathbb{R}$ će i skup

$$B = \{\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}, \lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}, (\lambda^2 - \lambda)\vec{a} + (\lambda - 1)\vec{b} + (\lambda^2 - 1)\vec{c}\}$$

biti baza za $V^3(O)$?

(b) Postoji li $\eta \in \mathbb{R}$ takav da su vektori $\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}$, $\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ i $\vec{a} + \eta\vec{c}$ komplanarni za sve vrijednosti parametra $\lambda \in \mathbb{R}$? Ako postoji, nađite jedan takav η .

RJEŠENJE (a) S obzirom na to da B ima tri elementa i da je $\dim V^3(O) = 3$, skup B će biti baza za V ako i samo ako je linearno nezavisan. Prema tome, tražimo $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje će B biti linearno nezavisan skup. Krećemo od

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}) + \beta(\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \gamma((\lambda^2 - \lambda)\vec{a} + (\lambda - 1)\vec{b} + (\lambda^2 - 1)\vec{c}) = \vec{0},$$

te grupiramo uz $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$:

$$(\alpha + \lambda\beta + (\lambda^2 - \lambda)\gamma)\vec{a} + (\alpha + \beta + (\lambda - 1)\gamma)\vec{b} + (\lambda\alpha + \beta + (\lambda^2 - 1)\gamma)\vec{c} = \vec{0}.$$

Kako je $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ baza, dakle linearno nezavisan skup, slijedi da su svi koeficijenti uz ove vektore jednaki 0, što daje sustav (s nepoznicama α, β, γ)

$$\begin{cases} \alpha + \lambda\beta + (\lambda^2 - \lambda)\gamma = 0 \\ \alpha + \beta + (\lambda - 1)\gamma = 0 \\ \lambda\alpha + \beta + (\lambda^2 - 1)\gamma = 0, \end{cases}$$

koji se nakon nekoliko koraka svodi na sljedeći trokutasti sustav

$$\begin{cases} \alpha + \lambda\beta + (\lambda^2 - \lambda)\gamma = 0 \\ (1 - \lambda)\beta + (\lambda - 1)(1 - \lambda)\gamma = 0 \\ (\lambda - 1)\lambda\gamma = 0. \end{cases}$$

Sada razlikujemo slučajeve:

- Ako je $\lambda = 0$ ili $\lambda = 1$, tada sustav ima beskonačno mnogo rješenja, dakle postoji i netrivialno rješenje, pa tada B nije baza za $V^3(O)$.
- Ako je $\lambda \neq 0, 1$, tada sustav ima samo trivijalno rješenje $\alpha = \beta = \gamma = 0$, pa je tada B baza za $V^3(O)$.

Dakle, skup B je baza za $V^3(O)$ ako i samo ako je $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$.

(b) Tri vektora u $V^3(O)$ su komplanarni ako i samo ako su linearno zavisni. Dakle, tražimo $\eta \in \mathbb{R}$ takav da jednadžba

$$\alpha(\vec{a} + \vec{b} + \lambda\vec{c}) + \beta(\lambda\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) + \gamma(\vec{a} + \eta\vec{c}) = 0$$

ima i netrivialna rješenja. Dobivamo sustav

$$\begin{cases} \alpha + \lambda\beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ \lambda\alpha + \beta + \eta\gamma = 0, \end{cases}$$

koji svedemo na gornjotrokatasti oblik

$$\begin{cases} \alpha + \lambda\beta + \gamma = 0 \\ (1 - \lambda)\beta - \gamma = 0 \\ (\eta + 1)\gamma = 0. \end{cases}$$

Pogledajmo treću jednadžbu: ako je $\eta = -1$ tada se sustav svodi na dvije jednadžbe, a kako svaka od njih predstavlja jednadžbu ravnine kroz ishodište, u njihovom presjeku je nužno beskonačno mnogo točaka. Prema tome, za $\eta = -1$ sustav ima beskonačno mnogo rješenja, pa su dani vektori komplanarni (za svaki λ). □

Zadatak 3.19. Nadopunite skup $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ do baze za M_2 . Je li to nadopunjenje jedinstveno?

RJEŠENJE Očito je S linearno nezavisan skup. Kako je $\dim M_2 = 4$, skupu S treba dodati još dvije matrice tako da novi skup bude linearno nezavisan. Te dodatne matrice možemo tražiti, na primjer, među matricama E_{11}, E_{12}, E_{21} i E_{22} iz kanonske baze za M_2 . S obzirom na oblik matrica iz S , logično je skupu S dodati matrice koje imaju nenul elemente u drugom retku. Zato pokušajmo sa skupom

$$S \cup \{E_{21}, E_{22}\}.$$

Iz

$$\alpha \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \delta \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

lako dobijemo da je $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 0$, pa je zadani skup linearno nezavisan, dakle baza.

Ovo nadopunjenje nije jedinstveno. Na primjer, lako se vidi da je i $S \cup \{2E_{21}, 3E_{22}\}$ nadopunjenje skupa S do baze za M_2 .

Zadatak 3.20. Neka je $n \in \mathbb{N}$. Neka su $p_1, p_2, \dots, p_k \in \mathcal{P}_n$ polinomi različitih stupnjeva. Dokažite da je skup $S = \{p_1, p_2, \dots, p_k\}$ linearno nezavisan.

RJEŠENJE Označimo $n_i = \text{st } p_i$, $i = 1, 2, \dots, k$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $n_1 < n_2 < \dots < n_k$.

Promatramo S kao uređeni skup. Pretpostavimo suprotno, tj. da je S linearno zavisn. Tada se neki p_l , gdje je $l \in \{2, \dots, k\}$, može zapisati kao linearna kombinacija svojih prethodnika, tj. postoje $\alpha_1, \dots, \alpha_{l-1}$ takvi da je

$$p_l = \alpha_1 p_1 + \dots + \alpha_{l-1} p_{l-1}.$$

Međutim, stupanj polinoma zdesna je najviše n_{l-1} , a kako je $n_{l-1} < n_l$, gornja jednakost ne može vrijediti. Time smo došli do kontradikcije i tako dokazali da je S linearno nezavisan.

Zadatak 3.21. Neka je $n \in \mathbb{N}$. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_{2n}(\mathbb{R})$ definiramo polinome

$$p_k(t) = (t^2 + t + 5)^k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Dokažite da je skup $S = \{p_1, \dots, p_n\}$ linearno nezavisan, te ga nadopunite do baze za $\mathcal{P}_{2n}$.

RJEŠENJE Uočimo da je $\text{st } p_k = 2k$. Posebno, S se sastoji od polinoma međusobno različitih stupnjeva, pa linearna nezavisnost slijedi iz prethodnog zadatka.

Skup S do baze trebamo nadopuniti s

$$\dim \mathcal{P}_{2n} - n = (2n + 1) - n = n + 1$$

elemenata. Te elemente možemo, na primjer, uzeti iz kanonske baze $\{1, t, t^2, \dots, t^{2n}\}$ za $\mathcal{P}_{2n}$. Uzmimo sljedeće nadopunjenje od S :

$$B = \{1, t, p_1, t^3, p_2, \dots, t^{2n-1}, p_n\}.$$

S obzirom na to da su u B polinomi međusobno različitih stupnjeva, B je linearno nezavisan skup, a kako ima $2n + 1 = \dim \mathcal{P}_{2n}$ elemenata, B je baza za $\mathcal{P}_{2n}$.

Zadatak 3.22. Skup $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ nadopunite do baze za $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$.

RJEŠENJE Očito je S linearno nezavisan skup i sadrži dva elementa, pa nam nedostaju još dva elementa do baze za $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$. Kanonska baza za $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$ je

$$\{(1, 0), (0, 1), (i, 0), (0, i)\},$$

pa opet možemo ubacivati njezine elemente u skup S pazeći na linearnu nezavisnost. Kako su koordinate vektora iz S realne, prirodno je uzeti one elemente iz baze čije koordinate nisu realne. Dakle, probat ćemo s nadopunjenjem

$$\{(1, 2), (2, 1), (i, 0), (0, i)\}.$$

Provjerimo linearnu nezavisnost: tražimo $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ takve da je

$$\alpha(1, 2) + \beta(2, 1) + \gamma(i, 0) + \delta(0, i) = (0, 0),$$

to jest $\alpha + 2\beta + i\gamma = 0$ i $2\alpha + \beta + i\delta = 0$. Kako su $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ realni brojevi, iz prve jednadžbe slijedi $\alpha + 2\beta = 0$ i $\gamma = 0$, a iz druge $2\alpha + \beta = \delta = 0$. Odavde lako dobijemo da je još i $\alpha = \beta = 0$, dakle, promatrani skup je linearno nezavisan i ima $4 = \dim(\mathbb{C}^2)_{\mathbb{R}}$ elemenata, pa je onda i baza za $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$.

Zadatak 3.23. Može li se skup

$$S = \{1, t, t^2, t^3, 2 + 3t + 4t^2 + 5t^3\}$$

reducirati do baze za $\mathcal{P}_3$? Ako da, nađite sve mogućnosti.

RJEŠENJE Budući da je kanonska baza $\{1, t, t^2, t^3\}$ cijela sadržana u S , slijedi da je S (konačan) skup izvodnica, pa se može reducirati do baze za $\mathcal{P}_3$. Zbog $\dim \mathcal{P}_3 = 4$ slijedi da treba izbaciti jedan element p iz S tako da $S \setminus \{p\}$ bude skup izvodnica za $\mathcal{P}_3$, a to će vrijediti ako i samo ako se p može prikazati kao linearna kombinacija ostalih elemenata iz S .

Označimo polinome redom p_0, p_1, p_2, p_3, p_4 . Očito je

$$p_4 = 2p_0 + 3p_1 + 4p_2 + 5p_3,$$

odakle slijedi da je

$$p_0 = -\frac{3}{2}p_1 - 2p_2 - \frac{5}{2}p_3 + \frac{1}{2}p_4,$$

$$p_1 = -\frac{2}{3}p_0 - \frac{4}{3}p_2 - \frac{5}{3}p_3 + \frac{1}{3}p_4,$$

$$p_2 = -\frac{1}{2}p_0 - \frac{3}{4}p_1 - \frac{5}{4}p_3 + \frac{1}{4}p_4,$$

$$p_3 = -\frac{2}{5}p_0 - \frac{3}{5}p_1 - \frac{4}{5}p_2 + \frac{1}{5}p_4.$$

Prema tome, ako izbacimo bilo koji (jedan!) element iz S , preostali skup će biti (četveročlani) skup izvodnica za $\mathcal{P}_3$, zato baza za $\mathcal{P}_3$. □

Domaća zadaća

DZ 3.15. Provjerite da je skup $\{(1, 0, 0, 0), (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (1, 1, 1, 1)\}$ baza za $\mathbb{R}^4$ i prikažite u njoj proizvoljan vektor $v \in \mathbb{R}^4$.

DZ 3.16. Nađite jednu bazu i dimenziju za $(M_{mn}(\mathbb{C}))_{\mathbb{R}}$.

DZ 3.17. Neka je $n \in \mathbb{N}$. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_n(\mathbb{R})$ svih polinoma stupnja najviše n definiramo polinome $p_k(t) = (2t + 5)^k, k = 0, 1, \dots, n$. Provjerite je li skup $S = \{p_0, p_1, \dots, p_n\}$ baza za $\mathcal{P}_n$.

DZ 3.18. Nađite bazu i dimenziju za prostor aritmetičkih nizova A .

DZ 3.19. Nadopunite skup $\{(1, 1, 0)\}$ do baze prostora $\mathbb{R}^3$.

DZ 3.20. Nadopunite skup $\{(1, 1, 1, 1), (1, -1, -1, -1)\}$ do baze za $\mathbb{R}^4$.

DZ 3.21. Neka je $\{b_1, \dots, b_n\}$ baza vektorskog prostora V , te $c = \sum_{i=1}^n \alpha_i b_i$. Odredite nužne i dovoljne uvjete da skup $\{b_1, \dots, b_{n-1}, c\}$ bude baza za V .

DZ 3.22. Neka je $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ baza za V i $b_{n+1} = -b_1 - b_2 - \dots - b_n$. Dokažite da se svaki vektor $v \in V$ može, i to na jedinstven način, prikazati u obliku $v = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i b_i$, pri čemu je $\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 0$.

Poglavlje 4

Potprostori

4.1 Definicija i primjeri

Ponovimo najvažnije s predavanja:

DEFINICIJA 4.1. Neka je V vektorski prostor i $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. M je **potprostor** od V , oznaka $M \leq V$, ako je M i sam vektorski prostor s obzirom na iste operacije $+$ i $\cdot$ uz koje je V vektorski prostor.

Vrijedi sljedeće:

- Trivijalni potprostori od V su $\{0\}$ i V .
- Ako je $M \leq V$ tada je $\dim M \leq \dim V$.
- Ako je $M \leq V$ takav da je $\dim M = \dim V$, tada je $M = V$.
- Potprostori od $\mathbb{R}^2$ su: $\{(0,0)\}$, pravci kroz ishodište i $\mathbb{R}^2$.
- Potprostori od $\mathbb{R}^3$ su: $\{(0,0,0)\}$, pravci kroz ishodište, ravnine kroz ishodište i $\mathbb{R}^3$.
- Ako je $M \leq V$, tada je $0 \in M$. (Ekvivalentno: ako $0 \notin M$, tada M nije potprostor od V .)
- Neka je $M \subseteq V$, $M \neq \emptyset$. Tada je $M \leq V$ ako i samo ako vrijedi

$$\alpha x + \beta y \in M, \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \quad \forall x, y \in M, \quad (4.1)$$

odnosno, ako i samo ako je

$$x + y \in M, \alpha x \in M, \quad \forall x, y \in M, \quad \forall \alpha \in \mathbb{F}.$$

- Presjek (proizvoljno mnogo) potprostora od V je također potprostor od V .
- Unija potprostora ne mora biti potprostor.
- Za svaki $S \subseteq V$ vrijedi $[S] \leq V$. Nadalje, $[S]$ je najmanji potprostor od V koji sadrži skup S , te se može zapisati

$$[S] = \bigcap_{S \subseteq M \leq V} M.$$

Sada prelazimo na zadatke.

Zadatak 4.1. Pokažite da je skup $M = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^3$, te mu nađite (neku) bazu i dimenziju.

RJEŠENJE Za provjeru da je $M \leq \mathbb{R}^3$ koristimo (4.1). Očito je $M \subseteq \mathbb{R}^3$ i $M \neq \emptyset$. Neka su $(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \in M$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada za linearnu kombinaciju

$$\alpha(x_1, x_2, x_3) + \beta(y_1, y_2, y_3) = (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \alpha x_3 + \beta y_3)$$

vrijedi

$$(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2) + (\alpha x_3 + \beta y_3) = \alpha(x_1 - x_2 + x_3) + \beta(y_1 - y_2 + y_3) = 0,$$

dakle svaka linearna kombinacija dva elementa iz M je također element iz M . Zato je $M \leq \mathbb{R}^3$.

Odredimo sada jednu bazu i dimenziju. Za svaki $(x_1, x_2, x_3) \in M$ vrijedi

$$(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 + x_3, x_3) = (x_1, x_1, 0) + (0, x_3, x_3) = x_1(1, 1, 0) + x_3(0, 1, 1).$$

Vektori $(1, 1, 0), (0, 1, 1)$ očito pripadaju potprostoru M , razapinju ga i čine linearno nezavisan skup. Dakle, jedna baza za M je $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ i zato je $\dim M = 2$.

Zadatak 4.2. Je li skup $M = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1 - 2\overline{z_2} = 0\}$ potprostor od $\mathbb{C}^2$? A od $\mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$? U oba slučaja, ako da, nađite bazu za M .

RJEŠENJE Prvo provjeravamo je li M potprostor kompleksnog vektorskog prostora $\mathbb{C}^2$. Uzmimo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ te $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2) \in M$. Sada je $\alpha z + \beta w = (\alpha z_1 + \beta w_1, \alpha z_2 + \beta w_2) \in M$ ako i samo ako je

$$\alpha z_1 + \beta w_1 - 2\overline{\alpha z_2 + \beta w_2} = 0$$

to jest,

$$\alpha z_1 - 2\overline{\alpha z_2} + \beta w_1 - 2\overline{\beta w_2} = 0,$$

a to općenito ne vrijedi. Na primjer, $z = (2, 1) \in M$, ali $i \cdot z = (2i, i) \notin M$.

Pogledajmo sada realni slučaj. Tada za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $z = (z_1, z_2), w = (w_1, w_2) \in M$ vrijedi

$$\alpha z_1 + \beta w_1 - 2\overline{\alpha z_2 + \beta w_2} = \alpha(z_1 - 2\overline{z_2}) + \beta(w_1 - 2\overline{w_2}) = 0,$$

dakle, $M \leq \mathbb{C}_{\mathbb{R}}^2$.

Neka je $z = (z_1, z_2) = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2)$, gdje su $x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Tada je

$$z \in M \Leftrightarrow x_1 + iy_1 = 2(x_2 - iy_2) \Leftrightarrow (x_1 = 2x_2, y_1 = -2y_2).$$

Prema tome, elementi iz M su oblika

$$z = (x_1 + iy_1, x_2 + iy_2) = (2x_2 - 2iy_2, x_2 + iy_2) = x_2(2, 1) + y_2(-2i, i),$$

za neke $x_2, y_2 \in \mathbb{R}$. To znači da je skup $\{(2, 1), (-2i, i)\}$ skup izvodnica za M , a kako je očito linearno nezavisan, onda i baza za (realni) vektorski prostor M .

Zadatak 4.3. Dokažite da je $M = \{p \in \mathcal{P}_4 : p(1) = p(-1)\}$ potprostor od $\mathcal{P}_4$, te mu odredite (neku) bazu i dimenziju?

RJEŠENJE Očito je $\emptyset \neq M \subseteq \mathcal{P}_4$.

Uzmimo proizvoljne $p, q \in M$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Tada je $\alpha p + \beta q \in \mathcal{P}_4$ i vrijedi

$$(\alpha p + \beta q)(1) = \alpha p(1) + \beta q(1) = \alpha p(-1) + \beta q(-1) = (\alpha p + \beta q)(-1),$$

pa je i $\alpha p + \beta q \in M$. Stoga je $M \leq \mathcal{P}_4$.

Odredimo sada jednu bazu za M . Neka je $p \in M$. Zapišimo ga u obliku

$$p(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e$$

za neke $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$. Uvjet $p(1) = p(-1)$ sada glasi

$$a + b + d + c + e = a - b + c - d + e,$$

što se svodi na $d = -b$. Stoga se proizvoljni $p \in M$ može zapisati u obliku

$$p(t) = at^4 + b(t^3 - t) + ct^2 + e.$$

To znači da je skup $\{1, t^2, t^3 - t, t^4\}$, koji je sadržan u M , skup izvodnica za M . Kako su svi polinomi u tom skupu različitog stupnja, on je i linearno nezavisan, pa je to jedna baza za M . Slijedi da je $\dim M = 4$. □

Zadatak 4.4. Koji od navedenih skupova su potprostori od $\mathbb{R}^n$? Za one koji jesu nađite po jednu bazu i dimenziju.

(a) $A = \{(x_1, \dots, x_n) : x_i \in \mathbb{Z}, \forall i\}$

(b) $B = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 = 2x_2\}$

(c) $C = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = 0\}$

(d) $D = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0\}$

(e) $E = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n x_i = 1\}$

(f) $F = \{(x_1, \dots, x_n) : x_{2i} = 0, \forall i\}$

RJEŠENJE Prvo uočimo da su svi skupovi neprazni i sadržani u $\mathbb{R}^n$.

(a) Koordinate elemenata iz A su cijeli brojevi, što neće biti sačuvano množenjem realnim brojem. Na primjer, e_1 je u A , a $\frac{1}{2}e_1$ nije u A . Prema tome, A nije potprostor od $\mathbb{R}^n$.

(b) Neka su $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in B$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Zbog $x, y \in B$ vrijedi $x_1 = 2x_2$ i $y_1 = 2y_2$, a onda je i

$$\alpha x_1 + \beta y_1 = 2(\alpha x_2 + \beta y_2),$$

što znači da je $\alpha x + \beta y \in B$. Slijedi $B \leq \mathbb{R}^n$. Jedna baza je dana s

$$B_B = \{2e_1 + e_2, e_3, \dots, e_n\},$$

pa je $\dim B = n - 1$.

(c) Neka su $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in C$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Zbog $x, y \in C$ vrijedi $\sum_{i=1}^n x_i = 0$ i $\sum_{i=1}^n y_i = 0$. Tada imamo

$$\sum_{i=1}^n (\alpha x_i + \beta y_i) = \alpha \sum_{i=1}^n x_i + \beta \sum_{i=1}^n y_i = 0,$$

pa je $\alpha x + \beta y \in C$, te stoga $C \leq \mathbb{R}^n$. Jedna baza je dana s

$$B_C = \{e_i - e_n : i = 1, \dots, n-1\},$$

te je $\dim C = n-1$.

(d) Primijetimo da je

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in D \Leftrightarrow \sum_{i=1}^n x_i^2 = 0 \Leftrightarrow x_i = 0, \forall i = 1, \dots, n \Leftrightarrow x = (0, \dots, 0).$$

Stoga je $D = \{(0, \dots, 0)\} \leq \mathbb{R}^n$. Po definiciji, nulprostor nema bazu, te je $\dim D = 0$.

(e) Skup E ne sadrži nulvektor, pa nije potprostor od $\mathbb{R}^n$.

(f) Neka su $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in F$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Zbog $x, y \in F$ vrijedi $x_{2i} = 0$ i $y_{2i} = 0$ za sve i takve da je $2i \leq n$ (dakle sve koordinate na parnim mjestima su 0), a onda za sve takve i vrijedi

$$\alpha x_{2i} + \beta y_{2i} = 0,$$

dakle $\alpha x + \beta y \in F$, te je stoga $F \leq \mathbb{R}^n$.

Neka je $k = \lceil \frac{n}{2} \rceil$ (ovo znači da je $k = \frac{n}{2}$ za parne n , te $k = \frac{n+1}{2}$ za neparne n). Tada je za svaki $x \in F$

$$x = (x_1, 0, x_3, 0, \dots) = \sum_{j=1}^k x_{2j-1} e_{2j-1},$$

odakle vidimo da je jedna baza za F dana s

$$B_F = \{e_{2j-1} : j = 1, \dots, k\},$$

te je $\dim F = k$.

Zadatak 4.5. Dokažite da je skup

$$M = \{(x_1, \dots, x_n) : x_1 - x_2 = x_2 - x_3 = \dots = x_{n-1} - x_n = x_n - x_1\}$$

potprostor vektorskog prostora $\mathbb{R}^n$, nađite mu neku bazu i nadopunite je do baze za $\mathbb{R}^n$.

RJEŠENJE Nulvektor $(0, 0, \dots, 0)$ pripada skupu M . (Pokušajte naći još neki element ovog skupa.)

Neka je $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in M$ proizvoljan. Označimo s $d := x_1 - x_2$. Tada iz uvjeta na vektore u M imamo sljedeći niz jednakosti

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &= d \\ x_2 - x_3 &= d \\ &\vdots \\ x_{n-1} - x_n &= d \\ x_n - x_1 &= d. \end{aligned}$$

Sumiranjem svih jednakosti slijedi $0 = nd$, odakle dobijemo $d = 0$. Stoga je

$$x = (x_1, \dots, x_n) \in M \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n \Leftrightarrow x \in [\{(1, 1, \dots, 1)\}],$$

pa zaključujemo da je $M = [\{(1, 1, \dots, 1)\}] \leq \mathbb{R}^n$, te je time dobivena i jedna baza za M .

Jedna dopuna do baze za $\mathbb{R}^n$ je dana skupom $\{e_1, \dots, e_{n-1}\}$. Skup

$$\left\{ e_1, \dots, e_{n-1}, \sum_{j=1}^n e_j \right\}$$

je linearno nezavisan: prvih $n - 1$ vektora je podskup kanonske baze, pa čine linearno nezavisan skup, dok se posljednji ne može prikazati kao linearna kombinacija jer svi vektori $e_1, \dots, e_{n-1}$, pa onda i sve njihove linearne kombinacije, na posljednjoj koordinati imaju 0.

Zadatak 4.6. Neka je V realni ili kompleksni vektorski prostor dimenzije barem 3. Dokažite da V sadrži beskonačno mnogo potprostora dimenzije 2.

Prije nego što riješimo ovaj zadatak, pogledajmo poseban slučaj $V = \mathbb{R}^3$. Dvodimenzionalni potprostori od $\mathbb{R}^3$ su ravnine kroz ishodište. Tvrdnja u ovom posebnom slučaju kaže da postoji beskonačno mnogo ravnina kroz ishodište, što je očito točno. Možemo, na primjer uzeti ravninu koja je određena točkama $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, k)$ za svaki $k \in \mathbb{N}$ (možemo zamišljati kao da smo krenuli od xy -ravnine koju smo onda rotirali oko x -osi).

RJEŠENJE Kako je $n := \dim V \geq 3$ postoji linearno nezavisan skup $\{b_1, b_2, b_3\}$ u V (podskup baze). Za svaki $k \in \mathbb{N}$ definiramo potprostore M_k s

$$M_k := [\{b_1, b_2 + kb_3\}].$$

Za svaki $k \in \mathbb{N}$ je $\dim M_k = 2$. Zaista, skup $\{b_1, b_2, b_3\}$ je linearno nezavisan, i zato

$$\alpha b_1 + \beta(b_2 + kb_3) = 0 \Rightarrow \alpha b_1 + \beta b_2 + k\beta b_3 = 0 \Rightarrow \alpha = \beta = 0,$$

dakle, $\{b_1, b_2 + kb_3\}$ je baza za M_k .

Još treba pokazati da, ako je $k \neq m$, tada je $M_k \neq M_m$. Dovoljno je pokazati da, ako je $k \neq m$, tada

$$b_2 + kb_3 \notin M_m = [\{b_1, b_2 + mb_3\}].$$

U suprotnom bi postojali α, β takvi da je

$$b_2 + kb_3 = \alpha b_1 + \beta(b_2 + mb_3),$$

odnosno

$$\alpha b_1 + (\beta - 1)b_2 + (m\beta - k)b_3 = 0.$$

Kako je $\{b_1, b_2, b_3\}$ linearno nezavisan skup, slijedi $\alpha = 0$, $\beta - 1 = 0$ i $m\beta - k = 0$, odakle je $k = m$, suprotno pretpostavci. Prema tome, za različite k dobivamo različite potprostore, pa ih ima beskonačno mnogo. □

Svaki linearno nezavisan skup u konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V može se nadopuniti do baze za V . Posebno, ako je $M \leq V$, tada se svaka baza za M može nadopuniti do baze za V . No, to ne znači da svaka baza za V u sebi sadrži bazu za M . Na primjer, ako je $V = \mathbb{R}^3$ i M neka ravnina kroz ishodište, tada postoji baza za $V^3(0)$ čiji niti jedan element ne leži u ravnini M . Vrijedi i općenito.

Zadatak 4.7. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, te $M \leq V$, $M \neq \{0\}, V$. Pokažite da postoji baza za V čiji niti jedan član ne leži u M .

RJEŠENJE Neka je $B = \{a_1, \dots, a_k\}$ jedna baza za M , pri čemu je $1 \leq k < n = \dim V$. Nadopunimo je do baze $\{a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_n\}$ za V . Sada ovu bazu modificiramo tako da prvih k vektora (koji pripadaju M), promijenimo tako da više ne budu u M , ali da se linearna nezavisnost skupa ne naruši. Pogledajmo skup

$$C = \{a_1 + a_n, \dots, a_k + a_n, a_{k+1}, \dots, a_n\}.$$

Uočimo da nijedan od vektora $a_{k+1}, \dots, a_n$ ne leži u M (tada bi skup B bio linearno zavisn). Također, nijedan od vektora $a_1 + a_n, \dots, a_k + a_n$ ne leži u M (tada bi i a_n bio u M). Nadalje, iz

$$\alpha_1(a_1 + a_n) + \alpha_2(a_2 + a_n) + \dots + \alpha_k(a_k + a_n) + \alpha_{k+1}a_{k+1} + \dots + \alpha_na_n = 0$$

slijedi

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \dots + \alpha_k a_k + \alpha_{k+1} a_{k+1} + \dots + (\alpha_1 + \dots + \alpha_k + \alpha_n) a_n = 0,$$

a kako je B linearno nezavisan skup, svi koeficijenti u ovom rastavu, a onda i svi α_i , su jednaki 0. Dakle, C je baza za V i ima traženo svojstvo.

Domaća zadaća

DZ 4.1. Dokažite da je $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 = 0, x_1 + x_2 - 2x_4 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^4$, nađite mu jednu bazu i dimenziju.

DZ 4.2. U $\mathbb{R}^4$ su dani vektori $a_1 = (1, 1, 2, 2)$, $b_1 = (1, 0, 0, 1)$, $a_2 = (2, 1, 2, 3)$, $b_2 = (0, 1, 2, 1)$. Neka je $M_1 = [\{a_1, b_1\}]$, $M_2 = [\{a_2, b_2\}]$. Dokažite da je $M_1 = M_2$.

RJEŠENJE Jasno je da zapravo imamo baze za M_1, M_2 . Zato je $\dim M_1 = \dim M_2 = 2$ pa je dovoljno vidjeti da je $M_1 \subseteq M_2$ (ili $M_2 \subseteq M_1$). Dovoljno je, dalje, vidjeti $a_2, b_2 \in M_1$ jer M_1 kao vektorski prostor tada mora sadržavati i sve njihove linearne kombinacije. Sada se izračuna da je $a_2 = a_1 + b_1$, $b_2 = a_1 - b_1$.

DZ 4.3. Neka su $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta \in \mathbb{R}$. Koje uvjete moraju zadovoljavati ovi brojevi da bi skup $M = \{(x_1, \dots, x_n) : \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i = \beta\}$ bio vektorski prostor?

DZ 4.4. Neka je

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_1 - 2x_2 - x_4 = 0\} \leq \mathbb{R}^4.$$

Odredite jednu bazu i dimenziju za M .

DZ 4.5. Neka su L, U, D redom skupovi svih donjotrokutastih, gornjotrokutastih, dijagonalnih matrica u M_n . Dokažite da su to potprostori od M_n , te im nađite po jednu bazu i odredite dimenzije.

DZ 4.6. Dokažite da su skupovi $X = \{A \in M_n : A^T = A\}$ i $Y = \{A \in M_n : A^T = -A\}$ potprostori od M_n , nađite im po jednu bazu i dimenziju.

DZ 4.7. Neka je $M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(5) = 0\} \leq \mathcal{P}_3$. Odredite neku bazu za M , te ju nadopunite do baze za $\mathcal{P}_3$.

DZ 4.8. Neka je V realni ili kompleksni vektorski prostor dimenzije $n \geq 2$. Dokažite da za svaki $1 \leq k \leq n - 1$ postoji beskonačno potprostora od V dimenzije k .

DZ 4.9. Pokažite da je skup

$$M = \{(x_1, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) : x_2 = x_4 = \dots = x_{2n}\}$$

potprostor od $\mathbb{R}^{2n}$, odredite mu neku bazu i dimenziju.

RJEŠENJE Za proizvoljne $x = (x_1, \dots, x_{2n}), y = (y_1, \dots, y_{2n}) \in M$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$\alpha x_2 + \beta y_2 = \alpha x_4 + \beta y_4 = \dots = \alpha x_{2n} + \beta y_{2n}$$

pa je $\alpha x + \beta y \in M$. Dakle, $M \leq \mathbb{R}^{2n}$.

Neka je $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{2n-1}, x_{2n}) \in M$. Označimo $\lambda := x_2 = x_4 = \dots = x_{2n}$. Tada je

$$x = (x_1, \lambda, x_3, \lambda, \dots, x_{2n-1}, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_{2i-1} e_{2i-1} + \lambda(0, 1, 0, 1, \dots, 0, 1) = \sum_{i=1}^n x_{2i-1} e_{2i-1} + \lambda \sum_{i=1}^n e_{2i}.$$

Slijedi da je skup $\{e_1, e_3, e_5, \dots, e_{2n-1}, \sum_{i=1}^n e_{2i}\}$ skup izvodnica za M . Lako se vidi da je i linearno nezavisan, dakle, baza za M . Sada je $\dim M = n + 1$.

DZ 4.10. Pokažite da je skup

$$M = \{(x_1, \dots, x_{2n}, x_{2n+1}) : x_2 = x_4 = \dots = x_{2n}\}$$

potprostor od $\mathbb{R}^{2n+1}$, odredite mu neku bazu i dimenziju.

4.2 Suma i presjek potprostora

Ponovimo najvažnije s predavanja.

DEFINICIJA 4.2. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor. Za $L, M \leq V$ definira se **suma potprostora** L i M kao najmanji potprostor od V koji sadrži i M i L , dakle,

$$L + M = [L \cup M].$$

Kažemo da je suma **direktna** ako je $L \cap M = \{0\}$ i tada pišemo $L \dot{+} M$.

Teorem 4.3. Neka su $L, M \leq V$.

(a) Svaki vektor iz $L + M$ se može zapisati kao zbroj $a + b$, gdje je $a \in L$ i $b \in M$, to jest, vrijedi

$$L + M = \{a + b : a \in L, b \in M\}.$$

(b) Rastav $x = a + b$ vektora $x \in L + M$ je jedinstven ako i samo ako je suma direktna.

(c) $\dim(L + M) = \dim L + \dim M - \dim L \cap M$.

(d) $L \cap M = \{0\} \Leftrightarrow \dim(L + M) = \dim L + \dim M$.

U zadacima ćemo često koristiti sljedeće tvrdnje (koje su dokazane na predavanjima).

Neka su $B_L = \{a_1, \dots, a_l\}$ i $B_M = \{b_1, \dots, b_m\}$ redom baze za L i M .

- $B_L \cup B_M$ je skup izvodnica za $L + M$.
- Ako je $L \cap M = \{0\}$, tada je $B_L \cup B_M$ baza za $L \dot{+} M$.
- Ako je $L \cap M \neq \{0\}$, tada je skup $B_L \cup B_M$ linearno zavisani skup izvodnica za $L + M$ i postoje $b_{i_1}, \dots, b_{i_k} \in B_M$ takvi da je $(B_L \cup B_M) \setminus \{b_{i_1}, \dots, b_{i_k}\}$ baza za $L + M$.

Ako je $k = m$ tada je $L \cap M = M$ (slučaj kada izbacimo sve b -ove).

Ako je $k < m$, tada izbačene vektore $b_{i_1}, \dots, b_{i_k}$ prikažemo kao

$$b_{i_r} = e_r + f_r, \quad r = 1, \dots, k,$$

gdje su $e_r \in L$ i $f_r \in M$, $r = 1, \dots, k$. Tada je skup $\{e_1, \dots, e_k\}$ baza za $L \cap M$.

Sada prelazimo na zadatke.

Zadatak 4.8. Neka je $\mathcal{P}_3$ prostor svih polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3, te neka su

$$M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0\}, \quad L = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(2) = 0\}$$

njegovi potprostori. Odredite po jednu bazu za M , L , $M \cap L$ i $M + L$.

RJEŠENJE Vidimo da je $p \in M$ ako i samo ako je oblika

$$p(t) = (t-1)(at^2 + bt + c) \quad \text{za neke } a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Stoga je jedna baza za M dana s

$$B_M = \{t^2(t-1), t(t-1), (t-1)\}.$$

Analogno vidimo da je jedna baza za L dana s

$$B_L = \{t^2(t-2), t(t-2), (t-2)\}.$$

Nadalje, presjek $M \cap L$ je dan s

$$M \cap L = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = p(2) = 0\},$$

pa vidimo da je

$$p \in M \cap L \Leftrightarrow p(t) = (t-1)(t-2)(at+b) \quad \text{za neke } a, b \in \mathbb{R}.$$

Stoga je jedna baza za $M \cap L$ dana s

$$B_{M \cap L} = \{t(t-1)(t-2), (t-1)(t-2)\}.$$

Kako je $\dim M = \dim L = 3$ te $\dim(L \cap M) = 2$, slijedi da je $\dim(M + L) = 3 + 3 - 2 = 4 = \dim \mathcal{P}_3$, pa zaključujemo $M + L = \mathcal{P}_3$.

Zadatak 4.9. Neka su $a_1 = (1, 0, 1)$, $a_2 = (1, 2, 1)$ i $b_1 = (1, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1)$, te $L = [\{a_1, a_2\}]$ i $M = [\{b_1, b_2\}]$ potprostori od $\mathbb{R}^3$. Odredite baze za $L + M$ i $L \cap M$.

RJEŠENJE Skup $\{(1, 0, 1), (1, 2, 1), (1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$ je linearno zavisn jer sadrži 4 vektora u trodimenzionalnom prostoru. Lako vidimo da je $\{a_1, a_2, b_1\}$ linearno nezavisan, zato i baza za $M + L$. Sad preostaje izbačeni vektor b_2 prikazati u toj bazi i uzeti mu L -komponentu. Iz $b_2 = \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \beta b_1$, odnosno

$$(0, 0, 1) = \alpha_1(1, 0, 1) + \alpha_2(1, 2, 1) + \beta(1, 0, 0)$$

dobijemo $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 0$, $\beta = -1$ pa vektor

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 = 1 \cdot (1, 0, 1) + 0 \cdot (1, 2, 1) = (1, 0, 1)$$

čini bazu za $L \cap M$.

Zadatak 4.10. Neka su L i M potprostori od $\mathbb{R}^4$ zadani svojim bazama

$$\begin{aligned} B_L &= \{(1, -1, 0, 2), (3, -1, -3, 1), (2, -1, -1, 2)\}, \\ B_M &= \{(1, 2, -1, -2), (1, -2, -3, 4), (-1, -1, 3, -1)\}. \end{aligned}$$

Odredite po jednu bazu za $L + M$ i $L \cap M$.

RJEŠENJE Skup

$$B_L \cup B_M = \{(1, -1, 0, 2), (3, -1, -3, 1), (2, -1, -1, 2), (1, 2, -1, -2), (1, -2, -3, 4), (-1, -1, 3, -1)\}$$

je skup izvodnica za $L + M$. Kako on sadrži šest elemenata u $\mathbb{R}^4$, on je linearno zavisn, te ga reduciramo do baze za $L + M$. Krećemo od prvog vektora iz B_M , dakle, provjeravamo može li se vektor $(1, 2, -1, -2)$ prikazati kao linearna kombinacija svojih prethodnika. Iz

$$(1, 2, -1, -2) = \alpha(1, -1, 0, 2) + \beta(3, -1, -3, 1) + \gamma(2, -1, -1, 2),$$

dobijemo sustav

$$\begin{cases} \alpha + 3\beta + 2\gamma = 1 \\ -\alpha - \beta - \gamma = 2 \\ -3\beta - \gamma = -1 \\ 2\alpha + \beta + 2\gamma = -2, \end{cases}$$

čije rješenje je $\alpha = -7$, $\beta = -2$, $\gamma = 7$. Stoga b_1 izbacujemo, a posebno i vidimo da je već $b_1 \in L \cap M$ (jer je linearna kombinacija vektora baze za L), dakle to je jedan element baze za $L \cap M$.

Sada provjeravamo može li se vektor $(1, 2, -3, 4)$ prikazati kao linearna kombinacija svojih prethodnika (u skupu $(B_L \cup B_M) \setminus \{(1, 2, -1, -2)\}$). Dobijemo da jednadžba

$$(1, -2, -3, 4) = \alpha(1, -1, 0, 2) + \beta(3, -1, -3, 1) + \gamma(2, -1, -1, 2)$$

nema rješenja, pa ovaj vektor ne izbacujemo. Ovime smo dobili da je četveročlani skup

$$\{(1, -1, 0, 2), (3, -1, -3, 1), (2, -1, -1, 2), (1, -2, -3, 4)\}$$

linearno nezavisan podskup skupa izvodnica za $L + M$, odakle je $L + M = \mathbb{R}^4$, te je ovo jedna baza za $L + M$ (naravno, možemo ovdje navesti i kanonsku bazu za $\mathbb{R}^4$).

Prikažimo još posljednji vektor pomoću ove baze za $L + M$: dobijemo

$$(-1, -1, 3, -1) = 9(1, -1, 0, 2) + 3(3, -1, -3, 1) - 9(2, -1, -1, 2) - (1, -2, -3, 4),$$

pa je $9(1, -1, 0, 2) + 3(3, -1, -3, 1) - 9(2, -1, -1, 2) = (0, -3, 0, 3)$ drugi element baze za $L \cap M$. Stoga je jedna baza za presjek dana s

$$B_{L \cap M} = \{(0, -3, 0, 3), (1, 2, -1, -2)\}.$$

□

Domaća zadaća

DZ 4.11. Neka su $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 1, -1, -1)$, $a_3 = (1, -1, 1, -1)$, te $b_1 = (1, -1, -1, 1)$, $b_2 = (2, -2, 0, 0)$, $b_3 = (3, -1, 1, 1)$, te $L = [\{a_1, a_2, a_3\}]$ i $M = [\{b_1, b_2, b_3\}]$ potprostori od $\mathbb{R}^4$. Odredite baze za $L + M$ i $L \cap M$.

DZ 4.12. Za svaki $a \in \mathbb{R}$ definiran je potprostor vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ kao

$$M_a = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(a) = 0\}.$$

Odredite neku bazu potprostora $(M_1 \cap M_2) + M_3$.

DZ 4.13. Neka je V vektorski prostor, te $M, L, K \leq V$. Pokažite da je

$$(M \cap L) + (M \cap K) \leq M \cap (L + K).$$

Vrijedi li jednakost?

RJEŠENJE Ako je $x \in (M \cap L) + (M \cap K)$, onda ima oblik $x = a + b$, gdje su $a \in M \cap L$, $b \in M \cap K$. Očito je $a + b \in M$ (jer su oba iz M , a M je potprostor), također je $a + b \in L + K$ (jer je $a \in L$, $b \in K$). Dakle je $a + b \in M \cap (L + K)$.

Jednakost općenito ne vrijedi. Uzmimo u $V = \mathbb{R}^2$, te $M = [(1, 1)]$, $L = [(1, 0)]$ i $K = [(0, 1)]$. Sad je $M \cap L = M \cap K = \{0\}$, dok je $M \cap (L + K) = M \cap \mathbb{R}^2 = M$. (Drugim riječima, za M, L, K smo uzeli tri različita pravca kroz ishodište. Tada je $(M \cap L) + (M \cap K) = \{(0, 0)\}$, dok je $M \cap (L + K) = M \cap \mathbb{R}^2 = M \neq \{(0, 0)\}$.

□

DZ 4.14. Neka je V vektorski prostor dimenzije n i neka su L i M njegovi potprostori dimenzije $n-1$ takvi da $L \not\subseteq M$ i $M \not\subseteq L$. Odredite $\dim(L \cap M)$.

DZ 4.15. Zadani su potprostori X, Y, Z vektorskog prostora $\mathcal{P}_3$ s

$$\begin{aligned} X &= [\{x^3 + x^2 + 3x + 2, 2x^3 - x^2 + 1, x^3 - x^2 - x\}], \\ Y &= [\{(x+1)^3, (x+1)^2\}] \\ Z &= \{p \in \mathcal{P}_3 : p(x) = -p(-x), \forall x \in \mathbb{R}\}. \end{aligned}$$

Odredite neku bazu prostora $(X + Y) \cap Z$.

4.3 Direktni komplement

DEFINICIJA 4.4. Neka je $L \leq V$. Ako je $M \leq V$ takav da je $L \dot{+} M = V$, kaže se da je M **direktni komplement od L u V** .

Ponovimo s predavanja:

- Ako je M direktni komplement od L u V , tada je i L direktni komplement od M u V .
- V i $\{0\}$ su jedan drugom direktni komplementi u V .
- Direktni komplement općenito nije jedinstven. Na primjer, ako u $\mathbb{R}^3$ uzmemo za M xy -ravninu, tada je svaki pravac kroz ishodište koji ne leži u toj ravnini njezin direktni komplement u $\mathbb{R}^3$. (Zbog nejedinstvenosti direktnog komplementa nije korektna oznaka $V \dot{+} M$.)
- Neka je V konačnodimenzijski vektorski prostor i $L \leq V$. Ako je $\{b_1, \dots, b_k\}$ baza za L , te $\{b_1, \dots, b_k, b_{k+1}, \dots, b_n\}$ neko njeno proširenje do baze za V , tada je prostor

$$[\{b_{k+1}, \dots, b_n\}]$$

jedan direktni komplement od L .

Zadatak 4.11. Pokažite da je skup

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 - x_3 - x_4 = 0, x_2 - x_3 + 2x_4 = 0\}$$

potprostor od $\mathbb{R}^4$, te mu nađite neki direktni komplement u $\mathbb{R}^4$.

RJEŠENJE Vrijedi da je $x \in M$ ako i samo ako je

$$x = (x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_3 + x_4, x_3 - 2x_4, x_3, x_4) = x_3 \underbrace{(1, 1, 1, 0)}_{=:a} + x_4 \underbrace{(1, -2, 0, 1)}_{=:b},$$

dakle $M = [a, b]$, pa je $M \leq \mathbb{R}^4$ i skup $\{a, b\}$ je jedna baza za M . Sada ćemo je dopuniti (elementima kanonske baze) do baze za $\mathbb{R}^4$. Lako provjerimo da je skup $\{a, b, e_1, e_2\}$ jedna takva baza. Prema tome, jedan direktni komplement je

$$L = [e_1, e_2] = \{(x_1, x_2, 0, 0) \in \mathbb{R}^4 : x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}.$$

Zadatak 4.12. Neka je M prostor svih dijagonalnih matrica reda 3. Odredite po jedan direktni komplement potprostora M u V , ako je

- (a) $V = M_3$
- (b) V prostor svih simetričnih matrica reda 3
- (c) V prostor svih gornjotrokutastih matrica reda 3 .

RJEŠENJE Jedna baza za M je dana s $\{E_{ii} : i = 1, 2, 3\}$. U svakom od podzadataka je tada samo potrebno pronaći dopunu do (neke) baze odgovarajućeg prostora. Redom imamo da su primjeri direktnih komplementa dani s:

- (a) $L = [\{E_{ij} : 1 \leq i, j \leq 3, i \neq j\}]$
- (b) $L = [\{E_{ij} + E_{ji} : 1 \leq i < j \leq 3\}]$
- (c) $L = [\{E_{ij} : 1 \leq i < j \leq 3\}]$.

□

Zadatak 4.13. U vektorskom prostoru $\mathcal{P}_3$ dani su potprostori

$$M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1-x) = p(x+1), \forall x \in \mathbb{R}\},$$

$$N = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(-x) = -p(x), \forall x \in \mathbb{R}\}.$$

Dokažite da je N direktni komplement od M , te odredite rastav proizvoljnog polinoma iz $\mathcal{P}_3$ s obzirom na rastav $\mathcal{P}_3 = M \dot{+} N$.

RJEŠENJE Neka je $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \in \mathcal{P}_3$. Tada je $p \in M$ ako i samo ako za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi

$$a(1-x)^3 + b(1-x)^2 + c(1-x) + d = a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz $1, x, x^2, x^3$ dobijemo $a = 0, c = -2b$. Dakle,

$$p(x) = b(x^2 - 2x) + d.$$

To znači da je $\{x^2 - 2x, 1\}$ baza za M , te je $\dim M = 2$.

Uzmimo sada da je $p \in M \cap N$. Tada je $p(x) = b(x^2 - 2x) + d$ za neke $b, d \in \mathbb{R}$, te za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $p(-x) = -p(x)$ odnosno

$$b(x^2 + 2x) + d = -b(x^2 - 2x) - d.$$

Oдавde je $b = d = 0$, dakle $p = 0$. To pokazuje da je $M \cap N = \{0\}$. Još treba vidjeti da je $\mathcal{P}_3 = M \dot{+} N$. Raspisivanjem uvjeta kojim je N određen dobijemo da je $\{x^3, x\}$ baza za N . Sada je

$$\dim(M \dot{+} N) = \dim M + \dim N = 2 + 2 = 4 = \dim \mathcal{P}_3,$$

pa kako je $M \dot{+} N \leq \mathcal{P}_3$, mora biti $M \dot{+} N = \mathcal{P}_3$.

Neka je $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Prikažimo taj polinom u bazi za $\mathcal{P}_3$ koja je dobivena kao unija baza od M i N , npr. takva je baza $\{x^2 - 2x, 1, x^3, x\}$:

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = \alpha(x^2 - 2x) + \beta + \gamma x^3 + \delta x.$$

Izjednačavanjem koeficijenata dobiva se $\alpha = b, \beta = d, \gamma = a, \delta = c + 2b$, pa za polinome

$$p_1(x) = \alpha(x^2 - 2x) + \beta = b(x^2 - 2x) + d \in M$$

$$p_2(x) = \gamma x^3 + \delta x = ax^3 + (c + 2b)x \in N$$

vrijedi $p = p_1 + p_2$.

□

Zadatak 4.14. Neka je $M = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n x_i = 0\} \leq \mathbb{R}^n$.

- (a) Dokažite da je $L = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_i = x_j, \forall i, j\}$ direktni komplement od M u $\mathbb{R}^n$.
- (b) Nađite jedinstveni rastav elementa $(1, 2, 3, \dots, n)$ s obzirom na rastav $\mathbb{R}^n = L \dot{+} M$.
- (c) Nađite jedinstveni rastav elementa $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ s obzirom na rastav $\mathbb{R}^n = L \dot{+} M$.
- (d) Nađite još neki direktni komplement od M u $\mathbb{R}^n$.

RJEŠENJE (a) Vrijedi da je $x \in M$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned} x &= (x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (x_1, \dots, x_{n-1}, -x_1 - \dots - x_{n-1}) \\ &= x_1(1, 0, \dots, 0, -1) + x_2(0, 1, 0, \dots, 0, -1) + \dots + x_{n-1}(0, 0, \dots, 1, -1). \end{aligned}$$

Baza za M je $\{(1, 0, \dots, 0, -1), (0, 1, 0, \dots, 0, -1), \dots, (0, 0, \dots, 1, -1)\}$ i $\dim M = n - 1$. Nadalje, vrijedi da je $x \in L$ ako i samo ako je

$$x = (x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_1, \dots, x_1) = x_1(1, 1, \dots, 1)$$

pa je $\{(1, 1, \dots, 1)\}$ baza za L , a $\dim L = 1$.

Dokažimo da je $L \dot{+} M = \mathbb{R}^n$. Vrijedi da je $x \in L \cap M$ ako i samo ako je $x_1 = x_2 = \dots = x_n$ i $\sum_{i=1}^n x_i = 0$. Dakle, $nx_1 = 0$ pa je $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. To znači da je $L \cap M = \{0\}$, a kako je $\dim(L + M) = \dim L + \dim M = n = \dim \mathbb{R}^n$, onda je $L \dot{+} M = \mathbb{R}^n$.

(c) Uzmimo bazu za $\mathbb{R}^n$ koja se sastoji od unije baza za M i L dobivenih u (a) dijelu:

$$B = B_M \cup B_L = \{e_1 - e_n, e_2 - e_n, \dots, e_{n-1} - e_n, \sum_{j=1}^n e_j\}.$$

Neka je $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Tražimo $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ takve da je

$$x = \underbrace{\sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j (e_j - e_n)}_{x_M} + \underbrace{\alpha_n \sum_{j=1}^n e_j}_{x_L}.$$

Tada je pripadni rastav dan upravo u obliku $x = x_M + x_L$ kao gore. Izjednačavanjem koeficijenata uz pojedini kanonski vektor dobijemo sustav

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_n &= x_1 \\ \alpha_2 + \alpha_n &= x_2 \\ \vdots & \\ \alpha_{n-1} + \alpha_n &= x_{n-1} \\ \alpha_n - \sum_{j=1}^{n-1} \alpha_j &= x_n. \end{cases}$$

Sumiranjem svih jednakosti u sustavu slijedi

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j,$$

pa uvrštavanjem u svaku prethodnu jednadžbu dobijemo i

$$\alpha_j = x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Dakle, konačno dobivamo

$$x_M = \sum_{j=1}^{n-1} \left(x_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k \right) (e_j - e_n), \quad x_L = \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n x_j \right) \sum_{j=1}^n e_j.$$

(b) je samo poseban slučaj (c) dijela.

(d) Lako se vidi da je $K = [\{e_1\}]$ jedan direktni komplement od M koji je očito različit od L . $\square$

Domaća zadaća

DZ 4.16. Neka je $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, x_2 - x_3 + x_4 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{R}^4$. Nađite direktni komplement od M u $\mathbb{R}^4$.

DZ 4.17. Neka je $M = \{(z_1, z_2, z_3) \in \mathbb{C}^3 : z_1 + z_2 + z_3 = 0\}$ potprostor od $\mathbb{C}^3$. Nađite direktni komplement od M u (a) $\mathbb{C}^3$ (b) $(\mathbb{C}^3)_{\mathbb{R}}$.

DZ 4.18. Neka je M prostor svih matrica reda 4 takvih da je $a_{ij} = 0$ za $i \geq j$. Odredite po jedan direktni komplement potprostora M u V , ako je

(a) $V = M_4$

(b) V prostor svih gornjotrokutastih matrica reda 4

(c) V prostor svih matrica reda 4 koje na dijagonali imaju sve nule.

DZ 4.19. Neka je $\dim V = n$, te neka su M i L netrivialni potprostori od V takvi da je $\dim M = \dim L$. Dokažite da postoji zajednički direktni komplement od M i L u V .

RJEŠENJE Postupimo kao kod dokaza teorema o dimenziji sume.

Neka je $\{a_1, \dots, a_k\}$ baza za $M \cap L$. Nadopunimo je do baza za M i L : $B_M = \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r\}$, $B_L = \{a_1, \dots, a_k, c_1, \dots, c_r\}$. Zbog $\dim L = \dim M$ oba skupa smo nadopunili istim brojem vektora.

Iz dokaza spomenutog teorema znamo da je $\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_r\}$ baza za $M + L$. Ovu bazu nadopunimo do baze za V : $B = \{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r, c_1, \dots, c_r, v_1, \dots, v_s\}$. Uočimo da je $\dim M = \dim L = k + r$, $\dim V = k + r + r + s$ pa traženi komplement ima dimenziju $r + s$.

Tvrdimo da za $N = [\{b_1 + c_1, b_2 + c_2, \dots, b_r + c_r, v_1, \dots, v_s\}]$ vrijedi $M \dot{+} N = V$, $L \dot{+} N = V$.

Prvo provjerimo da je $M \cap N = \{0\} = L \cap N$. Uzmimo $x \in M \cap N$. Tada je

$$x = \sum_{i=1}^k \alpha_i a_i + \sum_{i=1}^r \beta_i b_i = \sum_{i=1}^r \gamma_i (b_i + c_i) + \sum_{i=1}^s \delta_i v_i.$$

Zbog nezavisnosti elemenata baze B slijedi $\alpha_i = 0$, $\beta_i = 0$, $\gamma_i = 0$, $\delta_i = 0$, $\forall i$. Dakle, $x = 0$. Analogno se dobije $L \cap N = \{0\}$.

Slično se provjeri da je $\{a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_r, b_1 + c_1, \dots, b_r + c_r, v_1, \dots, v_s\}$ baza za V (nezavisnost dobijemo kao gore, a kardinalitet je pravi). Dakle, dobili smo direktni komplement za M . Argument za L je isti. $\square$

4.4 Linearne mnogostrukosti

DEFINICIJA 4.5. Neka je V vektorski prostor, $x_0 \in V$ i $M \leq V$. **Linearna mnogostrukost u V u smjeru potprostora M (s predstavnikom/reprezentatom x_0)** je skup

$$x_0 + M = \{x_0 + m : m \in M\}.$$

Vrijedi sljedeće:

- Predstavnik mnogostrukosti nije jedinstven. Vrijedi: $x_0 + M = y_0 + M \Leftrightarrow x_0 - y_0 \in M$.
- Posebno $x_0 + M = M \Leftrightarrow x_0 \in M$, odakle slijedi da je svaki element iz linearne mnogostrukosti njezin predstavnik.
- Linearne mnogostrukosti u ravnini $\mathbb{R}^2$ su točke (tj. jednočlani skupovi), pravci i $\mathbb{R}^2$.
- Linearne mnogostrukosti u prostoru $\mathbb{R}^3$ su točke (tj. jednočlani skupovi), pravci, ravnine i $\mathbb{R}^3$.

Zadatak 4.15. Je li skup $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\}$ linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$? Ako da, napišite ju u obliku $(x_0, y_0, z_0) + M$, gdje je M potprostor od $\mathbb{R}^3$.

RJEŠENJE Vidimo da se A može zapisati kao

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, -x - y + 1) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1) + (0, 0, 1) : x, y \in \mathbb{R}\} \\ &= (0, 0, 1) + \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}, \end{aligned}$$

pa vidimo da je $A = x_0 + M$, gdje je $M = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ i $x_0 = (0, 0, 1)$.

Alternativno, možemo ovako

$$\begin{aligned} A &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 1\} \\ &= \{(1, 0, 0) + (x, y, z) : x + y + z = 0, x, y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= (1, 0, 0) + \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}. \end{aligned}$$

Dakle, $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, što je drugi zapis za prostor $M = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$. Sada smo dobili drugog predstavnika, ali sjetimo se da on nije jedinstven (svaki element mnogostrukosti njezin predstavnik).

Zadatak 4.16. Je li skup $B = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 1, p(0) = 0\}$ linearna mnogostrukost u $\mathcal{P}_3$? Ako da, napišite ju u obliku $p_0 + M$, gdje je M potprostor od $\mathcal{P}_3$.

RJEŠENJE Neka je $q(t) = t$ i $M = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(1) = 0, p(0) = 0\}$. Tada je $q \in B$ i $M \leq \mathcal{P}_3$. Nadalje,

$$p \in B \Leftrightarrow p - q \in M \Leftrightarrow p \in q + M$$

dakle, $B = q + M$.

Zadatak 4.17. Je li skup $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$?

RJEŠENJE S obzirom na to da smo već naveli kako izgledaju linearne mnogostrukosti u $\mathbb{R}^3$, odgovor je ne. Pokažimo to i direktnim računom.

Pretpostavimo da se C može zapisati u obliku $C = v + M$ za neki $v \in \mathbb{R}^3$ i $M \leq \mathbb{R}^3$. Tada razlika proizvoljna dva elementa iz C mora pripadati potprostoru M . Iz toga slijedi

$$\begin{aligned} (2, 0, 0) &= (1, 0, 0) - (-1, 0, 0) \in M \\ (0, 2, 0) &= (0, 1, 0) - (0, -1, 0) \in M \\ (0, 0, 2) &= (0, 0, 1) - (0, 0, -1) \in M. \end{aligned}$$

Međutim, tada je $M = \mathbb{R}^3$, a onda i $C = v + M = \mathbb{R}^3$, što očito ne vrijedi. Dakle, pretpostavka je pogrešna, odnosno C nije linearna mnogostrukost.

Zadatak 4.18. Neka je V vektorski prostor, $M \leq V$ i $x_0 \in V \setminus M$. Ako je $\{b_1, \dots, b_k\}$ baza za M , tada je $\{x_0, b_1, \dots, b_k\}$ baza za linearnu ljusku $[x_0 + M]$. Posebno,

$$[x_0 + M] = \left\{ \alpha_0 x_0 + \sum_{i=1}^k \alpha_i b_i : \alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F} \right\} = [x_0] + M.$$

RJEŠENJE Neka je $x \in [x_0 + M]$. Tada je x linearna kombinacija elemenata iz $x_0 + M$, na primjer

$$x = \alpha_1(x_0 + m_1) + \alpha_2(x_0 + m_2) + \dots + \alpha_l(x_0 + m_l)$$

za neki $l \in \mathbb{N}$, $\alpha_1, \dots, \alpha_l \in \mathbb{F}$ te $m_1, \dots, m_l \in M$. Kako je $\{b_1, \dots, b_k\}$ baza za M , dobijemo da, za neke $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_k \in \mathbb{F}$, vrijedi

$$x = \beta_0 x_0 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_k b_k.$$

Stoga je $[x_0 + M] \leq [\{x_0, b_1, \dots, b_k\}]$.

S druge strane imamo prvo

$$x_0 = x_0 + 0 \in [x_0 + M],$$

a zatim i

$$b_j = \underbrace{(x_0 + b_j)}_{\in x_0 + M} - \underbrace{x_0}_{\in [x_0 + M]} \in [x_0 + M], \quad j = 1, \dots, k,$$

pa je $[x_0 + M] = [x_0] + M$.

Pokažimo još da je navedeni skup zaista i baza. Neka je

$$\beta_0 x_0 + \beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_k b_k = 0.$$

Ako je $\beta_0 \neq 0$, tada

$$x_0 = -\frac{\beta_1}{\beta_0} b_1 - \frac{\beta_2}{\beta_0} b_2 - \dots - \frac{\beta_k}{\beta_0} b_k,$$

dakle $x_0 \in M$, što nije. Zato mora biti $\beta_0 = 0$, a onda imamo $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 + \dots + \beta_k b_k = 0$, odakle slijedi $\beta_1 = \dots = \beta_k = 0$. Time smo dokazali da je skup $\{x_0, b_1, \dots, b_k\}$ baza za $[x_0 + M]$. $\square$

Zadatak 4.19. Odredite bazu za $[S]$ ako je $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 1\}$.

RJEŠENJE Ako je $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - z = 0\}$, tada je

$$S = (1, 0, 0) + M = (1, 0, 0) + [(1, 0, 1), (0, 1, 1)],$$

pa je skup $\{(1, 0, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ baza za $[S]$. $\square$

Domaća zadaća

DZ 4.20. Pokažite da je skup $C = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} : a, b \in \mathbb{F} \right\}$ linearna mnogostrukost u $M_2(\mathbb{F})$. Nadalje, odredite bazu za $[C]$.

DZ 4.21. Je li skup $C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$ linearna mnogostrukost u $\mathbb{R}^3$?