LINEARNA ALGEBRA 1

Četvrti ispitni rok - 9. rujna 2025.

ZADATAK 1

Neka je $S \leq M_3(\mathbb{R})$ prostor simetričnih matrica reda 3 te neka su dani skupovi:

$$L = \{B \in M_3(\mathbb{R}) : b_{12} = b_{21}, b_{13} = b_{31}\},$$
$$N = \left\{ A \in M_3(\mathbb{R}) : A - A^t = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

(a) Odredite po jednu bazu za linearne ljuske skupova L i N.

(b) Provjerite je li S potprostor od $[L]$. Ako jest, odredite mu neki direktan komplement u $[L]$.

(c) Provjerite je li S potprostor od $[N]$. Ako jest, odredite mu neki direktan komplement u $[N]$.

ZADATAK 2

(a) (12 bodova) Za koje je skalare $\lambda \in \mathbb{R}$ vektor $b = (1, 7, \lambda, 2)$ linearna kombinacija vektora $a_1 = (2, 0, 5, 1)$, $a_2 = (3, 3, 0, 2)$ i $a_3 = (7, 3, 0, 1)$?

(b) (8 bodova) Neka je $A \in M_{42}(\mathbb{R})$,

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \mu \\ 3 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

Za koje je skalare $\mu \in \mathbb{R}$ matrica $A^t A$ regularna? Dokažite.

ZADATAK 3

(a) (12 bodova) Izračunajte determinantu matrice $A = [a_{ij}] \in M_n(\mathbb{R})$ dane s

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & j = 1, \\ i - j, & \text{inače.} \end{cases}$$

(b) (8 bodova) Neka su $A, B, C \in M_n(\mathbb{R})$ regularne matrice takve da je $\det A = 2$, $C = \widetilde{A}$, $B = AC$. Izračunajte $\det B$.

OKRENITE LIST!

ZADATAK 4

(20 bodova) U ovisnosti o parametru $\lambda \in \mathbb{R}$ riješite sustav

$$\begin{cases} 2x_1 \quad + x_3 + x_4 = 2 \\ x_2 - x_3 - 3x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + \lambda x_3 + 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + x_2 \quad - \lambda x_4 = 0 \end{cases}$$

ZADATAK 5

a) (10 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, te neka su $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in V$ takvi da za potprostore $M = [\{a_1, \ldots, a_n\}]$ i $L = [\{b_1, \ldots, b_n\}]$ od V vrijedi

$$\dim (M + L) = 2n.$$

Ako je $x \in L$ dokažite da je $\{a_1 + x, \ldots, a_n + x\}$ linearno nezavisan skup.

b) (10 bodova) Neka je dan linearan sustav $AX = 0$, gdje je $A \in M_{m3}(\mathbb{R})$ matrica sustava. Ako su S_1, S_2 i S_3 stupci matrice A, pri čemu su S_1 i S_2 linearno nezavisni, te je $S_3 = S_1 - S_2$, odredite opće rješenje danog homogenog sustava.