LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok - 15. lipnja 2026.

ZADATAK 1

Neka je operator $T \in L(M_2(\mathbb{R}))$ zadan formulom

$$T(X) := X + X^t + (\operatorname{Tr} X)I_2, \qquad X \in M_2(\mathbb{R}).$$

(a) (8 bodova) Odredite po jednu bazu za sliku i jezgru operatora T.

(b) (4 boda) Odredite matrični prikaz od T u kanonskoj bazi za $M_2(\mathbb{R})$.

(c) (8 bodova) Može li se T dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi za $M_2(\mathbb{R})$? Ako da, odredite neku takvu bazu.

Rješenje:

(a) Dobijemo

$$T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3a+d & b+c \\ b+c & a+3d \end{bmatrix}.$$

Odavde se dobije da je $\ker T$ prostor antisimetričnih matrica, s bazom $\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$, a $\operatorname{Im} T$ prostor simetričnih matrica, s bazom $\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$.

(b) Imamo

$$T(E_{11}) = 3E_{11} + E_{22}, \qquad T(E_{12}) = T(E_{21}) = E_{12} + E_{21}, \qquad T(E_{22}) = E_{11} + 3E_{22}$$

pa je matrični prikaz od T u kanonskoj bazi $(e) = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ dan s

$$T(e) = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(c) Matrica $T(e)$ je hermitska, a baza (e) je ortonormirana pa zaključujemo da je T hermitski operator. Stoga se dijagonalizira u nekoj ortonormiranoj bazi. Imamo

$$\begin{aligned} k_T(\lambda) &= \det(T(e) - \lambda I_4) \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} \\ &= ((\lambda-3)^2 - 1)((\lambda-1)^2 - 1) \\ &= \lambda(\lambda-2)^2(\lambda-4) \end{aligned}$$

pa slijedi $\sigma(T) = \{0, 2, 4\}$. Za svojstvene potprostore dobivamo

$$V_T(4) = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right], \qquad V_T(2) = \left[\left\{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right], \qquad V_T(0) = \left[\left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}\right].$$

Stoga slijedi da je

$$(f) = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\right\}$$

ortonormirana baza za $M_2(\mathbb{R})$ takva da je matrični prikaz operatora T u toj bazi

$$T(f) = \operatorname{diag}(4, 2, 2, 0).$$

ZADATAK 2

(a) (7 bodova) Na realnom vektorskom prostoru $\mathcal{P}_2$ promotrimo bazu $(f) = \{f_1, f_2, f_3\}$ zadanu s

$$f_1(t) = 1, \qquad f_2(t) = 1 + t, \qquad f_3(t) = 1 + t + t^2.$$

Odredite dualnu bazu $(f^*) = \{f_1^*, f_2^*, f_3^*\}$ baze (f).

(b) (13 bodova) Za linearan funkcional $g \in \mathcal{P}_2^*$ dan s $g(p) = 2p(0) - 3p(1)$ odredite njegov zapis u bazi (f^*) iz (a) dijela zadatka te njegovog reprezentanta ako je skalarni produkt na $\mathcal{P}_2$ dan s

$$\langle p, q\rangle = p(-1)q(-1) + p(0)q(0) + p(1)q(1), \qquad p, q \in \mathcal{P}_2.$$

Rješenje:

(a) Označimo s $(e) = \{e_1, e_2, e_3\} = \{1, t, t^2\}$ kanonsku bazu za $\mathcal{P}_2$. Imamo

$$I(e,f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies I(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle očitavamo

$$f_1^*(a + bt + c^2) = a - b, \qquad f_2^*(a + bt + c^2) = b - c, \qquad f_3^*(a + bt + c^2) = c.$$

(b) Prvo imamo da je

$$g = g(f_1)f_1^* + g(f_2)f_2^* + g(f_3)f_3^* = -f_1^* - 4f_2^* - 7f_3^*.$$

Neka je sada $r(t) = a + bt + ct^2 \in \mathcal{P}_2$ reprezentant od g uz dani skalarni produkt. Tada r, odnosno a, b, c dobijemo rješavanjem sustava

$$\begin{aligned} \langle f_1, r\rangle &= g(f_1) \\ \langle f_2, r\rangle &= g(f_2) \\ \langle f_3, r\rangle &= g(f_3), \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$r(t) = 2 - \frac{3}{2}t - \frac{7}{2}t^2.$$

$\boxed{\text{ZADATAK 3}}$

Zadano je preslikavanje $[\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sa

$$[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = 3(x_1y_1 + x_2y_2) + 2(x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1).$$

(a) (6 bodova) Dokažite da je $[\cdot,\cdot]$ skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.

(b) (6 bodova) Ako su $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno zavisni vektori takvi da je

$$[x, x] = 1,\ [y, y] = 2,\ [x, y] = 0,\ [x, z] = 2,\ [z, z] = 5,$$

odredite $[y, z]$.

(c) (8 bodova) Ortonormirajte kanonsku bazu za $\mathbb{R}^3$ s obzirom na skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$.

Rješenje:

(a) Kako je

$$[x, x] = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2,$$

vidimo da je $[x, x] \geq 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}^3$, a $[x, x] = 0$ ako i samo ako

$$2(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 = x_2^2 = 2x_3^2 = 0,$$

što je ekvivalentno s $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ostala svojstva se lagano provjere.

(b) Kako su vektori linearno zavisni, Gramova determinanta je jednaka 0, tj.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & [y, z] \\ 2 & [y, z] & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

pa se dobije $[y, z] = \pm\sqrt{2}$.

Alternativno, kako su x i y različiti od 0 i ortogonalni, oni su linearno nezavisni. Sada iz linearne zavisnosti x, y, z slijedi da mora biti $z = \alpha x + \beta y$. Imamo:

$$2 = [x, z] = \alpha[x, x] + \beta[x, y] = \alpha$$

i

$$5 = [z, z] = \alpha^2[x, x] + \beta^2[y, y] = 4 + 2\beta^2,$$

pa je $\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Slijedi da je

$$[y, z] = \beta[y, y] = \pm\sqrt{2}.$$

(c) Prva dva vektora su

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 0),\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 3, 0),$$

a možemo lako uočiti da je $(0, 0, 1)$ ortogonalan na e_1 i e_2, pa onda i na ova dva vektora, dakle njega treba samo normirati. Slijedi da je $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1)$.

$\boxed{\text{ZADATAK 4}}$

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom dan je linearan operator A svojim djelovanjem na bazi

$$\begin{aligned}
A(1,1,1,1) &= (0,0,0,0),\\
A(1,0,0,0) &= (1,1,0,2),\\
A(0,1,0,0) &= (1,0,1,3),\\
A(0,1,1,0) &= (0,-1,1,1).
\end{aligned}$$

(a) (8 bodova) Odredite $A^*(x_1,x_2,x_3,x_4)$ za proizvoljan $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$.

(b) (6 bodova) Neka je $B \in L(\mathbb{R}^4)$ takav da je $\operatorname{Im} A^* = \operatorname{Im} B$. Odredite $\operatorname{Ker} B^*$.

(c) (6 bodova) Neka je $C \in L(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^4)$ takav da vrijedi $C(1,0) = A^*(1,0,0,0)$ i $C(0,1) = A^*(0,1,0,0)$ te $d = (1,0,0,1)$. Odredite, u smislu najmanjih kvadrata, rješenje jednadžbe $Cx = d$.

Rješenje:

(a) Iz danih podataka lako vidimo da je

$$\begin{aligned}
Ae_1 &= (1,1,0,2)\\
Ae_2 &= (1,0,1,3)\\
Ae_3 &= A(0,1,1,0) - Ae_2 = (-1,-1,0,2)\\
Ae_4 &= A(1,1,1,1) - Ae_1 - Ae_2 - Ae_3 = (-1,0,1,-3),
\end{aligned}$$

pa je za kanonsku bazu (e)

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Alternativno imamo prvo za par baza (e) i $(f) = \{(1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,1,1,0)$

$$A(e,f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$A(e) = A(e,f)I(e,f)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Kako je (e) ONB, slijedi da je

$$A^*(e) = A(e)^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dakle,

$$A^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1+x_2+x_4, x_1+x_3+3x_4, -x_1-x_2-2x_4, -x_1-x_3-3x_4), \qquad (x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4.$$

(b) Koristeći rezultate s predavanja, odnosno vježbi (numerirano prema trenutnoj verziji skripte za vježbe na webu), imamo

$$\operatorname{Ker} B^* \overset{\text{Prop 4.6.}}{=} (\operatorname{Im} B)^{\perp} \overset{\text{pretpostavka}}{=} (\operatorname{Im} A^*)^{\perp} \overset{\text{Prop 4.6.}}{=} \operatorname{Ker} A,$$

pa preostaje odrediti $\operatorname{Ker} A$. Vidimo odmah da za stupce matrice $A(e)$ (odnosno izračunate $Ae_1, \dots, Ae_4$ vrijedi

- $\{S_1, S_2\}$ je linearno nezavisan skup
- $S_3 = -S_1$ i $S_4 = -S_2$.

Stoga je

$$\operatorname{Ker} A = [\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}].$$

(c) Iz (a) dijela zadatka je

$$C(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix},$$

pa je $C(B) = 2$ te će jedinstveno rješenje u smislu najmanjih kvadrata biti dano s

$$x_0 = (C^*C)^{-1}C^*d,$$

odnosno, zapisano matrično,

$$x_0(e) = (C(e)^T C(e))^{-1} C(e)^T d(e) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Dakle, traženo rješenje je $x_0 = \frac{1}{2}(-1, 2)$.

$\boxed{\text{ZADATAK 5}}$

(a) (10 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni kompleksni unitarni prostor i $U \in L(V)$ unitaran operator. Dokažite da je operator $(U + U^* - iI)(U - (1 + i)I)$ izomorfizam.

(b) (10 bodova) Postoji li normalan operator na $\mathbb{F}^3$ takav da je $A(0, 1, 2) = (0, 1, 2)$ i $(3, 4, 5) \in \operatorname{Ker} A$? Ako postoji, odredite jedan takav operator A. Ako ne postoji, dokažite tu tvrdnju.

U rješenju je potrebno navesti sve tvrdnje s predavanja koje koristite.

Rješenje: (a) S obzirom na to da je U unitaran operator, za $\lambda \in \sigma(U)$ vrijedi $|\lambda| = 1$. Prema tome, $1 + i \notin \sigma(U)$ i zato je $U - (1 + i)I$ izomorfizam.

Nadalje, $U + U^*$ je hermitski operator, a svojstvene vrijednosti hermitskog operatora su realne. Zato je $i \notin \sigma(U + U^*)$ pa je $U + U^* - iI$ izomorfizam.

Sada je $(U + U^* - iI)(U - (1 + i)I)$ izomorfizam kao kompozicija izomorfizama.

(b) Dokazali smo da za normalan operator vrijedi da su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni.

Pretpostavimo da postoji normalan operator A kao u zadatku. Prema pretpostavci, $(0, 1, 2)$ je svojstveni vektor od A pridružen svojstvenoj vrijednosti 1, a $(3, 4, 5)$ svojstveni vektor od A pridružen svojstvenoj vrijednosti 0. Međutim, $(0, 1, 2)$ i $(3, 4, 5)$ nisu međusobno ortogonalni, što je kontradikcija s pretpostavkom da je A normalan. Prema tome, ne postoji takav linearni operator.