MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok - 17. lipnja 2024.

ZADATAK 1

(a) (12 bodova) Linearan operator $A \in L(\mathbb{R}^4)$ zadan je svojim djelovanjem na bazi

$$A(0,-1,1,0) = (1,0,0,1), \quad A(1,-1,-1,1) = (1,-1,-1,1)$$

$$A(0,1,1,0) = (1,0,0,1), \quad A(0,0,0,1) = (0,0,0,1).$$

Odredite operator A^* te udaljenost vektora $x = (1,1,1,1)$ od $\operatorname{Ker} A$ i $\operatorname{Im} A^*$.

(b) (8 bodova) Postoji li matrica $B \in M_4(\mathbb{R})$ takva da je suma elemenata po svakom retku jednaka 2024, a da je linearan operator $L_B \in L(M_{41}(\mathbb{R}))$ definiran s $L_B X = BX$ unitaran? Ako postoji, navedite primjer takve, u suprotnom pokažite da takva ne postoji.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok - 17. lipnja 2024.

ZADATAK 2

(20 bodova) Neka je dan operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi dan s

$$A(e) = \begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{bmatrix}.$$

Odredite sve vrijednosti $k \in \mathbb{R}$ za koje operator nije dijagonalizabilan. Detaljno obrazložite sve svoje odgovore.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok - 17. lipnja 2024.

ZADATAK 3

(20 bodova) Odredite kompleksne brojeve z takve da je preslikavanje

$$\left\langle \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} \right\rangle = (z-2)(a\overline{e} + b\overline{f}) + \overline{z}(c\overline{g} + d\overline{h})$$

skalarno množenje na prostoru $M_2(\mathbb{C})$.

U slučaja kada je zadano preslikavanje skalarno množenje, za matricu $A = \begin{bmatrix} 0 & i \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ i jediničnu matricu I odredite normu od A te udaljenost $d(A, I)$. Norma i metrika su inducirane tim skalarnim množenjem.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok - 17. lipnja 2024.

ZADATAK 4

(20 bodova) Svedite formu

$$q(x, y, z) = 13x^2 + 13y^2 + 10z^2 + 8xy - 4xz - 4yz$$

na kanonski oblik, odredite joj definitnost te zapišite nove koordinate pomoću starih.

MATIČNI BROJ STUDENTA | IME I PREZIME | BROJ BODOVA

LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi ispitni rok - 17. lipnja 2024.

ZADATAK 5

(20 bodova) Neka je V unitaran prostor dimenzije $n < \infty$, neka je $A \in L(V)$ hermitski operator s n međusobno različitih svojstvenih vrijednosti te neka je $B \in L(V)$ operator za koji vrijedi $AB = BA$. Dokažite da postoji ortonormirana baza za V u kojoj se oba operatora A i B dijagonaliziraju. Mora li takav operator B i sam biti hermitski?