LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij - 20. travnja 2026.

ZADATAK 1

Za matricu $A \in M_{23}(\mathbb{R})$ definiramo preslikavanje $F_A : M_{32}(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ s

$$F_A(X) = AX - X^T A^T.$$

(a) (2 boda) Dokažite da je F_A linearni operator.

(b) (6 bodova) Ako je $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}$, odredite po jednu bazu za jezgru i sliku od F_A.

(c) (2 boda) Postoji li $A \in M_{23}(\mathbb{R})$ takva da je F_A monomorfizam ili epimorfizam? U oba slučaja ako postoji, navedite neku takvu matricu A.

Rješenje:

(a) Neka su $X, Y \in M_{32}(\mathbb{R})$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Zbog linearnosti operacije transponiranja i bilinearnosti matričnog množenja imamo

$$\begin{aligned} F_A(\alpha X + \beta Y) &= A(\alpha X + \beta Y) - (\alpha X + \beta Y)^T A^T \\ &= A(\alpha X + \beta Y) - (\alpha X^T + \beta Y^T) A^T \\ &= \alpha AX + \beta AY - \alpha X^T A^T - \beta Y^T A^T \\ &= \alpha(AX - X^T A^T) + \beta(AY - Y^T A^T) \\ &= \alpha F_A(X) + \beta F_A(Y). \end{aligned}$$

Dakle, F_A je linearan operator.

Alternativno, označimo

$$L_A : M_{32}(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \qquad L_A(X) := AX$$

i

$$T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R}), \qquad T(Y) := Y^T.$$

S vježbi znamo da su L_A i T linearni operatori, pa je i $I_{M_2(\mathbb{R})} - T$ linearan operator kao linearna kombinacija linearnih operatora. Stoga je i

$$F_A = L_A - T \circ L_A = (I_{M_2(\mathbb{R})} - T) \circ L_A$$

linearan operator kao kompozicija linearnih operatora.

(b) Za

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} \in M_{32}(\mathbb{R})$$

imamo

$$AX = \begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{21} & x_{12} + 2x_{22} \\ -x_{21} + 3x_{31} & -x_{22} + 3x_{32} \end{bmatrix},$$

pa slijedi

$$X^T A^T = (AX)^T = \begin{bmatrix} x_{11} + 2x_{21} & -x_{21} + 3x_{31} \\ x_{12} + 2x_{22} & -x_{22} + 3x_{32} \end{bmatrix}.$$

Zato dobivamo

$$\begin{aligned} F_A(X) &= AX - X^T A^T \\ &= \begin{bmatrix} 0 & x_{12} + x_{21} + 2x_{22} - 3x_{31} \\ -x_{12} - x_{21} - 2x_{22} + 3x_{31} & 0 \end{bmatrix} \\ &= (x_{12} + x_{21} + 2x_{22} - 3x_{31}) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Odavde odmah zaključujemo

$$\operatorname{Im} F_A \subseteq \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\} \right],$$

a obratna inkluzija slijedi npr. iz $F_A(E_{12}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Dakle, jedna baza za sliku od F_A je dana s $\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$. Nadalje,

$$\begin{aligned} \ker F_A &= \{X \in M_{32}(\mathbb{R}) : x_{12} + x_{21} + 2x_{22} - 3x_{31} = 0\} \\ &= \left\{ \begin{bmatrix} x_{11} & -x_{21} - 2x_{22} + 3x_{31} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix} : x_{11}, x_{21}, x_{22}, x_{31}, x_{32} \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right]. \end{aligned}$$

Prema tome, jedna baza za jezgru od F_A jest

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}.$$

(c) Za svaki $A \in M_{23}(\mathbb{R})$ i svaki $X \in M_{32}(\mathbb{R})$ vrijedi

$$F_A(X)^T = (AX - X^T A^T)^T = X^T A^T - AX = -F_A(X),$$

pa je $F_A(X)$ antisimetrična matrica. Dakle,

$$\operatorname{Im} F_A \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\}.$$

Budući da je

$$\dim \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} : \alpha \in \mathbb{R} \right\} = 1,$$

slijedi da je $r(F_A) = \dim \operatorname{Im} F_A \leq 1$, pa F_A ne može biti epimorfizam na $M_2(\mathbb{R})$ jer je $\dim M_2(\mathbb{R}) = 4$. S druge strane, po teoremu o rangu i defektu imamo

$$\dim \ker F_A = d(F_A) = \dim M_{32}(\mathbb{R}) - r(F_A) \geq 6 - 1 = 5,$$

pa F_A ne može biti monomorfizam.

Prema tome, ne postoji matrica $A \in M_{23}(\mathbb{R})$ takva da je F_A monomorfizam, niti postoji matrica $A \in M_{23}(\mathbb{R})$ takva da je F_A epimorfizam.

$\boxed{\text{ZADATAK 2}}$

Na prostoru $\mathcal{P}_2$ zadani su linearni funkcionali

$$f_1(p) = p(0) + p(1), \quad f_2(p) = p(1) + p(2), \quad f_3(p) = p(0) + p(2).$$

(a) (3 boda) Dokažite da je $(f) = \{f_1, f_2, f_3\}$ baza za $\mathcal{P}_2^*$.

(b) (2 boda) Ako je (b) baza za $\mathcal{P}_2$ čija dualna baza je (f), a (e) kanonska baza za $\mathcal{P}_2$, odredite matricu prijelaza $I_{\mathcal{P}_2}(b, e)$.

(c) (5 bodova) Neka je $G \in L(\mathcal{P}_2)$ linearni operator zadan s

$$G(p)(x) = f_1(p) + f_2(p)x + f_3(p)x^2.$$

Dokažite da je G izomorfizam i da su mu matrični prikazi u bazi (e) i (b) jednaki.

Rješenje:

(a) Neka je $(e) = (1, x, x^2)$ kanonska baza prostora $\mathcal{P}_2$ te $\mathbf{1} = \{1\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}$. Za $p(x) = a + bx + cx^2 \in \mathcal{P}_2$ vrijedi

$$\begin{aligned} f_1(p) &= p(0) + p(1) = a + (a + b + c) = 2a + b + c, \\ f_2(p) &= p(1) + p(2) = (a + b + c) + (a + 2b + 4c) = 2a + 3b + 5c, \\ f_3(p) &= p(0) + p(2) = a + (a + 2b + 4c) = 2a + 2b + 4c. \end{aligned}$$

Stoga su matrični prikazi funkcionala f_1, f_2, f_3 su paru kanonskih baza dani s

$$f_1(\mathbf{1}, e) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad f_2(\mathbf{1}, e) = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad f_3(\mathbf{1}, e) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Lako se provjeri da je matrica

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

regularna s inverzom

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -2 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

pa slijedi da su f_1, f_2, f_3 linearno nezavisni. Budući da je $\dim \mathcal{P}_2^* = \dim \mathcal{P}_2 = 3$, zaključujemo da je $(f) = \{f_1, f_2, f_3\}$ baza za $\mathcal{P}_2^*$.

(b) Neka je $(b) = (b_1, b_2, b_3)$ baza prostora $\mathcal{P}_2$ čija je dualna baza $(f) = (f_1, f_2, f_3)$. Znamo da su retci matrice $I_{\mathcal{P}_\in}(b, e)$ upravo matrični prikazi funkcionala $f_i(\mathbf{1}, e)$ za $i = 1, 2, 3$ pa slijedi

$$I_{\mathcal{P}_2}(b, e) = \begin{bmatrix} f_1(\mathbf{1}, e) \\ f_2(\mathbf{1}, e) \\ f_3(\mathbf{1}, e) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(e_1) & f_1(e_2) & f_1(e_3) \\ f_2(e_1) & f_2(e_2) & f_2(e_3) \\ f_3(e_1) & f_3(e_2) & f_3(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}.$$

(c) Za $1 \leq j \leq 3$, po definiciji dualne baze imamo

$$G(b_j) = \sum_{k=1}^{3} f_k(b_j) x^{k-1} = \sum_{k=1}^{3} \delta_{kj} x^{k-1} = x^{j-1},$$

odakle direktno slijedi $G(e, b) = I_3$. Budući da operator G u paru baza (b) i (e) ima matrični prikaz koji je regularna matrica, slijedi da je G izomorfizam. Nadalje, imamo

$$G(e) = G(e, b) I_{\mathcal{P}_2}(b, e) = I_3 I_{\mathcal{P}_2}(b, e) = I_{\mathcal{P}_2}(b, e),$$

$$G(b) = I_{\mathcal{P}_2}(b, e) G(e, b) = I_{\mathcal{P}_2}(b, e) I_3 = I_{\mathcal{P}_2}(b, e).$$

Zaključujemo $G(e) = G(b)$.

Alternativno, računanjem $G(e_i)$, za $i = 1, 2, 3$, vidimo da je $G(e) = I_{\mathcal{P}_2}(b, e)$, pa onda imamo

$$G(b) = I_{\mathcal{P}_2}(b, e) G(e) I_{\mathcal{P}_2}(e, b) = (I_{\mathcal{P}_2}(b, e))^2 (I_{\mathcal{P}_2}(b, e))^{-1} = I_{\mathcal{P}_2}(b, e).$$

ZADATAK 3

(a) (7 bodova) Neka je $P \in L(\mathbb{R}^3)$ projektor na potprostor $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x+y+z = 0\}$ u smjeru potprostora $L = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ te $A \in L(\mathbb{R}^3)$ dan svojim matričnim zapisom u bazi $(e') = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 1, 1)\}$ s

$$A(e') = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Pokažite da je $P^2 = A$.

(b) (3 boda) Neka je $P \in L(\mathbb{R}^3)$ projektor takav da je $P(f)$ regularna matrica za neku bazu (f). Odredite P.

Rješenje:

(a) Kako je P projektor, ekvivalentno je pokazati da je $A = P$. Kako su jedne baze za M i L dane s $B_M = \{(1, -1, 0), (1, 0, -1)\}$ i $B_L = \{(1, 1, 1)\}$, stavljanjem $(e) = \{(1, -1, -0), (1, 0, -1), (1, 1, 1)\}$ imamo $P(e) = \operatorname{diag}(1, 1, 0)$. Stoga preostaje provjeriti da isto vrijedi i za A:

$$\begin{aligned} A(e) &= I(e', e)^{-1} A(e') I(e', e) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \operatorname{diag}(1, 1, 0). \end{aligned}$$

(b) Kako je $P(f)$ regularna matrica, slijedi da je P regularan operator. Posebno je $\operatorname{Im} P = \mathbb{R}^3$ i $\operatorname{Ker} P = \{0\}$, pa s obzirom da je P projektor te djeluje kao identiteta na svojoj slici, slijedi da je $P = I_{\mathbb{R}^3}$.

OKRENITE PAPIR

ZADATAK 4

Neka je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \in M_4(\mathbb{R}).$$

(a) (7 bodova) Može li se A dijagonalizirati? Ako da, odredite neke matrice $S, D \in M_4(\mathbb{R})$ takve da je S regularna, D dijagonalna i $A = SDS^{-1}$.

(b) (3 boda) Dokažite da za sve polinome $p \in \mathbb{R}[x]$ vrijedi

$$p(A) = 0 \iff p(1) = p(-1) = 0.$$

Rješenje: Za matricu $B \in M_4(\mathbb{R})$, s $\ker(B)$ standardno označimo skup svih vektora $X \in M_{4,1}(\mathbb{R})$ takvih da je $BX = 0$.

(a) Imamo

$$k_A(\lambda) = \lambda^4 - 2\lambda^2 + 1 = (\lambda^2 - 1)^2 = (\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$$

pa je $\sigma(A) = \{1, -1\}$. Dobivamo

$$V_A(1) = \ker(A - I) = \ker \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & -2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 0 \end{bmatrix} = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right],$$

$$V_A(-1) = \ker(A + I) = \ker \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \\ 2 & -2 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right].$$

Budući da je $g(1) + g(-1) = 2 + 2 = 4$, slijedi da je A dijagonalizabilna u $M_4(\mathbb{R})$. Nadalje, za

$$S := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

vrijedi

$$SDS^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A.$$

(b) Neka su S i D matrice iz (a) dijela. Za $p \in \mathbb{R}[x]$ imamo $p(A) = p(SDS^{-1}) = Sp(D)S^{-1}$ i stoga

$$\begin{aligned} p(A) = 0 &\iff Sp(D)S^{-1} = 0 \\ &\iff p(D) = 0 \\ &\iff \operatorname{diag}(p(1), p(1), p(-1), p(-1)) = 0 \\ &\iff p(1) = p(-1) = 0. \end{aligned}$$

ZADATAK 5

(a) (5 bodova) Neka je V vektorski prostor dimenzije n, $0 \neq A \in L(V)$ te $M \leq V$ direktan komplement od $\operatorname{Ker} A$. Neka su $B_1, \ldots, B_k \in L(V)$, takvi da je $\operatorname{Im} B_i \leq M$, za svaki $i = 1, \ldots, k$. Ako je $\{B_1, \ldots, B_k\}$ linearno nezavisan skup, je li i skup $\{A \circ B_1, \ldots, A \circ B_k\}$ linearno nezavisan? Detaljno obrazložite.

(b) (5 bodova) Neka je V vektorski prostor, $\{x, y\} \subseteq V$ linearno nezavisan skup, te $A \in L(V)$ takav da je

$$\begin{aligned} Ax &= x + 2y, \\ Ay &= \lambda x + 3y, \end{aligned}$$

za neki λ skalar. Postoji li λ takav da je $x + y$ svojstveni vektor za A i ako da, koja je njegova pripadna svojstvena vrijednost?

Rješenje.

a) Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ skalari takvi da vrijedi

$$\alpha_1 A \circ B_1 + \ldots + \alpha_k A \circ B_k = 0.$$

Tada, za svaki x iz V vrijedi

$$\alpha_1 (A \circ B_1)x + \ldots + \alpha_k (A \circ B_k)x = 0,$$

odnosno

$$\alpha_1 A(B_1 x) + \ldots + \alpha_k A(B_k x) = 0.$$

Slijedi

$$A(\alpha_1 B_1 x + \ldots + \alpha_k B_k x) = 0.$$

Dakle

$$\alpha_1 B_1 x + \ldots + \alpha_k B_k x \in \ker A.$$

S druge strane, za svaki $i = 1, \ldots, k$ je $\operatorname{Im} B_i \subseteq M$ pa je $B_i x \in M \leq V$, te

$$\alpha_1 B_1 x + \ldots + \alpha_k B_k x \in M.$$

Sada imamo $\alpha_1 B_1 x + \ldots + \alpha_k B_k x \in M \cap \ker A = \{0\}$, za svaki $x \in V$. Zato je

$$\alpha_1 B_1 + \ldots + \alpha_k B_k = 0.$$

Iz linearne nezavisnosti skupa $\{B_1, \ldots, B_k\}$ slijedi $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Skup $\{A \circ B_1, \ldots, A \circ B_k\}$ je linearno nezavisan.

b) Zbrajanjem jednadžbi imamo

$$A(x + y) = (1 + \lambda)x + 5y$$

Vektor $x + y$ nije trivijalan jer je skup $\{x, y\}$ linearno nezavisan, pa je svojstven za A ako postoji skalar μ, koji je svojstvena vrijednost, takav da je

$$A(x + y) = \mu(x + y).$$

Izjednačavanjem desnih strana jednadžbi imamo

$$\begin{aligned} (1 + \lambda)x + 5y &= \mu(x + y), \text{ odnosno} \\ (1 + \lambda - \mu)x + (5 - \mu)y &= 0. \end{aligned}$$

Iz linearne nezavisnosti skupa $\{x, y\}$ slijedi $\mu = 5$ i $\lambda = 4$.