

LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi ispitni rok - 29. lipnja 2026.

ZADATAK 1

Promotrimo linearan operator $A \in L(M_2(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3)$ zadan formulom

$$A \left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \right) := (a + b + c, b - c + d, a + d).$$

- (a) (8 bodova) Odredite po jednu bazu za jezgru i za sliku operatora A .
- (b) (6 bodova) Navedite eksplicitno neki dvodimenzionalni potprostor $W \leq M_2(\mathbb{R})$ takav da je restrikcija $A|_W : W \rightarrow \mathbb{R}^3$ monomorfizam.
- (c) (6 bodova) Ako prostore $M_2(\mathbb{R})$ i \mathbb{R}^3 promatramo kao unitarne prostore (uz standardne skalarne produkte), odredite adjungirani operator operatora A .

Rješenje:

- (a) Imamo

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \ker A \iff (a + b + c, b - c + d, a + d) = 0 \iff b = 0, c = d = -a$$

pa slijedi da je $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$ baza za $\ker A$. Prema teoremu o rangui i defektu dobivamo

$$r(A) = \dim M_2(\mathbb{R}) - d(A) = 4 - 1 = 3,$$

odakle slijedi da je slika operatora A cijeli \mathbb{R}^3 . Stoga za bazu možemo uzeti npr. kanonsku bazu.

- (b) Za $W \leq M_2(\mathbb{R})$, operator $A|_W \in L(W, \mathbb{R}^3)$ će biti monomorfizam ako i samo ako vrijedi

$$\{0\} = \ker(A|_W) = (\ker A) \cap W.$$

Stoga možemo uzeti npr. $W := [\{E_{11}, E_{12}\}]$.

- (c) Označimo s $(e) = \{E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}\}$ i $(f) = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ kanonske baze za domenu i kodomenu, redom. Za matrični prikaz lagano dobivamo

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Budući da su baze (e) i (f) ortonormirane s obzirom na pripadne skalarne produkte, slijedi da adjungirani operator $A^* \in L(\mathbb{R}^3, M_2(\mathbb{R}))$ u paru kanonskih baza ima matrični prikaz

$$A^*(e, f) = A(f, e)^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^t = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Formulom, djelovanje je zadano kao

$$A^*(x, y, z) = \begin{bmatrix} x + z & x + y \\ x - y & y + z \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 2

Promotrimo bazu $(f) = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ prostora $\mathcal{P}_3(\mathbb{R})$ zadanu s

$$f_j(t) := (1+t)^{j-1}, \quad 1 \leq j \leq 4.$$

- (a) (12 bodova) Označimo s $(f^*) = \{f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*\}$ dualnu bazu baze (f) . Za $1 \leq j \leq 4$ odredite djelovanje $f_j^*(a + bt + ct^2 + dt^3)$ za $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.
- (b) (8 bodova) Neka je $A \in L(\mathcal{P}_3(\mathbb{R}))$ operator zadan formulom $(Ap)(t) := p(t-1)$. Odredite matrični prikaz $A(f)$.

Rješenje:

- (a) Označimo kanonsku bazu s $(e) = \{1, t, t^2, t^3\}$. Prema binomnom teoremu imamo

$$\begin{aligned} f_1(t) &= 1, \\ f_2(t) &= 1 + t, \\ f_3(t) &= 1 + 2t + t^2, \\ f_4(t) &= 1 + 3t + 3t^2 + t^3 \end{aligned}$$

pa za matricu prijelaza dobivamo

$$I(e, f) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \implies I(f, e) = I(e, f)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Djelovanje dualnih funkcionala $f_1^*, f_2^*, f_3^*, f_4^*$ očitavamo iz redaka od $I(f, e)$:

$$\begin{aligned} f_1^*(a + bt + ct^2 + dt^3) &= a - b + c - d, \\ f_2^*(a + bt + ct^2 + dt^3) &= b - 2c + 3d, \\ f_3^*(a + bt + ct^2 + dt^3) &= c - 3d, \\ f_4^*(a + bt + ct^2 + dt^3) &= d. \end{aligned}$$

- (b) Primijetimo da operator A preslikava bazu (f) u kanonsku bazu (e) . Stoga je matrični prikaz $A(e, f)$ jedinična matrica I_4 pa imamo

$$A(f) = I(f, e)A(e, f) = I(f, e) \cdot I_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ZADATAK 3

- (a) (14 bodova) Odredite neku dijagonalnu matricu D i neku ortogonalnu matricu Q tako da vrijedi $A = QDQ^T$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix}.$$

- (b) (6 bodova) Ako je $B \in M_4$ ortogonalno slična matrici A , mora li B biti simetrična? U slučaju potvrdnog odgovora, dokažite tvrdnju, u suprotnom navedite kontraprimjer.

Rješenje:

- (a) Kako je matrica blok-dijagonalna, lako se vidi da je

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda+1)^2(\lambda-3)(\lambda-5).$$

Stoga je $\sigma(A) = \{-1, 3, 5\}$. Pripadne svojstvene vektore možemo jednostavno očitati i iz same matrice. S obzirom da vrijedi $S_1 - S_2 = -(S_1 - S_2)$, $S_3 - S_4 = -(S_3 - S_4)$, $S_1 + S_2 = 3(S_1 + S_2)$ te $S_3 + S_4 = 5(S_3 + S_4)$, imamo

$$V_A(-1) = \{(1, -1, 0, 0)^T, (0, 0, 1, -1)^T\}$$

$$V_A(3) = \{(1, 1, 0, 0)^T\}$$

$$V_A(5) = \{(0, 0, 1, 1)^T\}.$$

Prva baza je već ortogonalna, pa preostaje samo normirati sve vektore te tako dobivamo tražene

$$D = \text{diag}(-1, -1, 3, 5), \quad Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

- (b) Ako je B ortogonalno slična A , slijedi da postoji ortogonalna matrica $S \in M_4$ takva da je $B = SAS^T$. Sada je

$$B^T = (SAS^T)^T = (S^T)^T A^T S^T = SAS^T = B,$$

pa je B simetrična.

ZADATAK 4

U unitarnom prostoru $M_3(\mathbb{R})$ (sa standardnim skalarnim produktom) označimo s S i L redom potprostore simetričnih i antisimetričnih matrica.

- (a) (10 bodova) Pokažite da je $S \oplus L = M_3(\mathbb{R})$.
- (b) (10 bodova) Za matricu $A = (\sqrt{ij} + i - j)_{ij}$ odredite njenu najbolju aproksimaciju elementima iz S te njenu udaljenost od L .

Rješenje:

- (a) Neka su $A \in S$ i $B \in L$ proizvoljne. Tada je

$$\langle A, B \rangle = \sum_{i,j=1}^3 [A]_{ij}[B]_{ij} = \sum_{i=1}^3 [A]_{ii} \underbrace{[B]_{ii}}_{=0} + \sum_{1 \leq i < j \leq 3} \left([A]_{ij}[B]_{ij} + \underbrace{[A]_{ji}}_{=[A]_{ij}} \underbrace{[B]_{ji}}_{=-[B]_{ij}} \right) = 0,$$

pa zaključujemo $S \perp L$. Kako je otprije poznato da je $S \dot{+} L = M_3(\mathbb{R})$, slijedi tvrdnja.

- (b) Vidimo kako A možemo lako zapisati u rastavu $S \oplus L = M_3(\mathbb{R})$ kao $A = A_S + A_L$, gdje je $A_S = (\sqrt{ij})_{ij} \in S$ te $A_L = (i - j)_{ij} \in L$. Sada je najbolja aproksimacija elementima iz S upravo A_S , dok je njena udaljenost od L jednaka

$$d(A, L) = \|A_S\| = \left(\sum_{i,j=1}^3 (\sqrt{ij})^2 \right)^{1/2} = \left(\sum_{i,j=1}^3 ij \right)^{1/2} = \left(\left(\sum_{i=1}^3 i \right)^2 \right)^{1/2} = \sum_{i=1}^3 i = 6.$$

ZADATAK 5

- a) (10 bodova) Neka je $\phi \in L(V, W)$ izomorfizam vektorskih prostora, te $\langle \cdot, \cdot \rangle$ skalarni produkt na W . Pokažite da je sa

$$[x, y] = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle, \quad x, y \in V,$$

definiran skalarni produkt na V .

- b) (10 bodova) Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ takav da je $A \neq I$, $A^2 \neq 0$, te postoji $\lambda_0 \in \sigma(A)$, takav da vrijedi

$$\lambda_0 = \sqrt{g(\lambda_0) - 2},$$

gdje je $g(\lambda_0)$ geometrijska kratnost od λ_0 . Može li se A dijagonalizirati, odnosno, postoji li neka baza od \mathbb{R}^3 u kojoj je matricni prikaz operatora A dijagonalna matrica?

Rješenje:

- a) Treba provjeriti svojstva skalarnog produkta za preslikavanje $[\cdot, \cdot] : V \times V \rightarrow \mathbb{F}$:

1. $\forall x \in V, [x, x] = \langle \phi(x), \phi(x) \rangle \geq 0$, jer je $\forall y \in W, \langle y, y \rangle \geq 0$.
2. $\forall x \in V, [x, x] = 0 \Leftrightarrow \langle \phi(x), \phi(x) \rangle = 0 \Leftrightarrow \phi(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$, gdje je zadnja ekvivalencija posljedica injektivnosti od ϕ , a predzadnja istog svojstva 2. skalarnog produkta $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
3. $\forall x, y, z \in V, [x + y, z] = \langle \phi(x + y), \phi(z) \rangle = \langle \phi(x) + \phi(y), \phi(z) \rangle = \langle \phi(x), \phi(z) \rangle + \langle \phi(y), \phi(z) \rangle = [x, z] + [y, z]$
4. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall x, y \in V, [\alpha x, y] = \langle \phi(\alpha x), \phi(y) \rangle = \langle \alpha \phi(x), \phi(y) \rangle = \alpha \langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \alpha [x, y]$.
5. $\forall x, y \in V, [x, y] = \langle \phi(x), \phi(y) \rangle = \overline{\langle \phi(y), \phi(x) \rangle} = \overline{[y, x]}$.

- b) Vrijedi $1 \leq g(\lambda_0) \leq \dim \mathbb{R}^3 = 3$. Po formuli u zadatku, ako je $g(\lambda_0) = 1$ imamo $\lambda_0 = \sqrt{-1} \notin \mathbb{R}$, što je kontradikcija jer je \mathbb{R}^3 prostor nad \mathbb{R} . Ako je $g(\lambda_0) = 3$ imamo $\lambda_0 = 1$, pa je $A = I$ što je u kontradikciji s uvjetom zadatka. Dakle $g(\lambda_0) = 2$ i $\lambda_0 = 0$. Neka je $\{f_1, f_2\}$ baza za $\ker A$, te $\{f_3\}$ baza za neki direktan komplement jezgre.

$$A_{(f)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \alpha_{13} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} \\ 0 & 0 & \alpha_{33} \end{bmatrix}$$

Iz $A^2 \neq 0$ imamo $0 \neq \alpha_{33}$. Također $k_A(\lambda) = \lambda^2(\alpha_{33} - \lambda)$, pa je $\alpha_{33} \in \sigma(A)$. Sada je $\dim \mathbb{R}^3 \geq g(0) + g(\alpha_{33}) \geq 2 + 1 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$, pa je operator A dijagonalizabilan.