LINEARNA ALGEBRA 2

Prvi kolokvij - 22. travnja 2025.

ZADATAK 1

Neka je $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ preslikavanje takvo da prvo zrcali vektor s obzirom na pravac $y = x$, a zatim ga ortogonalno projicira na pravac $y = 0$.

(a) (2 boda) Pokažite da je L linearan operator.

(b) (4 boda) Odredite rang i defekt te bazu za sliku i jezgru danog linearnog operatora.

(c) (4 boda) Pronađite neke netrivijalne potprostore $V, W \leq \mathbb{R}^2$ takve da restrikcija $L|_V : V \to W$ bude izomorfizam.

Rješenje: Definirajmo

$$Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,$$
$$Z(x, y) = (y, x),$$

linearni operator zrcaljenja s obzirom na pravac $y = x$ te

$$P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$P(x, y) = (x, 0),$$

operator ortogonalne projekcije na pravac $y = 0$.

(a) Preslikavanje L je linearni operator jer je kompozicija dvaju linearnih operatora, P i Z.

(b) Vrijedi:

$$L(x, y) = P(Z(x, y)) = P(y, x) = (y, 0).$$

Iz $L(x, y) = (y, 0) = (0, 0)$ vidimo da je $\ker L = [\{(1, 0)\}]$, tj. $d(L) = 1$ i jedna baza za jezgru je $\{(1, 0)\}$.

Također, $L(1, 0) = (0, 0)$ i $L(0, 1) = (1, 0)$, pa je $\operatorname{Im} L = [\{(1, 0)\}]$, tj. $r(L) = 1$ i jedna baza za sliku je $\{(1, 0)\}$.

(c) Trebamo pronaći potprostore $V, W \leq \mathbb{R}^2$ takve da je $\ker L|_V = \{(0, 0)\}$ te da je $\operatorname{Im} L|_V = W$.

Jedna od mogućnosti je $V = [\{(0, 1)\}]$ i $W = [\{(1, 0)\}]$.

$\boxed{\text{ZADATAK 2}}$

Neka je $A : \mathcal{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ linearan operator te $(e') = \{1, 1-t, t^2\}$ i $(f') = \{(1,1,1), (0,1,0), (0,0,1)\}$ redom baze za $\mathcal{P}_2$ i $\mathbb{R}^3$.

(a) (8 bodova) Ako je zadano

$$A(f', e') = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

odredite matrični zapis linearnog operatora A u paru kanonskih baza za domenu i kodomenu.

(b) (2 boda) Postoji li par baza (b) i (c) za $\mathcal{P}_2$ i $\mathbb{R}^3$ takav da je

$$A(b, c) = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrični zapis linearnog operatora A u tom paru baza.

Rješenje:

(a) Neka je $(e) = \{1, t, t^2\} = \{p_1, p_2, p_3\}$ kanonska baza za $\mathcal{P}_2$ te $(f) = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Vrijedi:

$$A(f, e) = I(f, f')A(f', e')I(e', e)$$

Lako vidimo da je:

$$I(f, f') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$I(e, e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$I(e', e) = I(e, e')^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Konačno,

$$A(f, e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(b) Budući da je $r(A(f', e'))(= r(A(f, e)) = 3$, a $r(A(b, c)) = 2$, slijedi da ne postoji takav par baza.

$\boxed{\text{ZADATAK 3}}$

(a) (5 bodova) Neka je $P \in L(\mathbb{R}^3)$ projektor u smjeru potprostora $[\{(0,1,1)\}]$ takav da je $P(1,0,0) = \frac{1}{2}(2,1,1)$ i $P(0,1,0) = \frac{1}{2}(0,1,-1)$. Pronađite bazu za $\mathbb{R}^3$ u kojoj se P dijagonalizira.

(b) (5 bodova) Neka je $n \geq 2$ i $A \in L(\mathbb{R}^n)$. Dokažite ili opovrgnite kontraprimjerom tvrdnju: ako je $\sigma(A) = \{0,1\}$, tada je A projektor.

Rješenje:

(a) Kako je P projektor, slijedi da imamo rastav $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Ker} P \dot{+} \operatorname{Im} P$, te se P dijagonalizira u bazi koju dobijemo unijom baza za $\operatorname{Ker} P$ i $\operatorname{Im} P$. S obzirom da je P projektor u smjeru $[\{(0,1,1)\}]$, slijedi da je jedna baza za $\operatorname{Ker} P$ upravo $\{(0,1,1)\}$, dok je zbog linearne nezavisnosti skupa $\{Pe_1, Pe_2\}$ i činjenice da je $r(P) = 2$ jedna baza za sliku dana s $\{(2,1,1),(0,1,-1)\}$. Stoga je

$$\{(2,1,1),(0,1,-1),(0,1,1)\}$$

jedna baza u kojoj se P dijagonalizira.

(b) Razlikujemo slučajeve $n = 2$ i $n \geq 3$. Ako je $n = 2$, tada A ima dvije različite svojstvene vrijednosti, pa je dijagonalizibilan, odnosno postoji baza (f) za $\mathbb{R}^2$ takva da je $A(f) = \operatorname{diag}(1,0)$. Stoga je $A^2(f) = A(f)^2 = A(f)$, pa je $A^2 = A$, te je A projektor. Za $n \geq 3$ promotrimo operator A zadan matričnim zapisom u kanonskoj bazi (e) s

$$A(e) = E_{11} + E_{12} + E_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Očito je $k_A(\lambda) = (-\lambda)^{n-2}(1-\lambda)^2$, odnosno, $\sigma(A) = \{0,1\}$. Međutim, imamo

$$A^2 e_2 = A(e_1 + e_2) = 2e_1 + e_2 \neq Ae_2,$$

pa kako je $A^2 \neq A$, zaključujemo da A nije projektor. Dakle za $n = 2$ tvrdnja vrijedi, dok za $n \geq 3$ tvrdnja ne vrijedi.

ZADATAK 4

(a) (5 bodova) Neka je $A \in L(\mathbb{R}^3)$ singularan linearni operator takav da je $k_A(-1) = 18$ i $k_A(1) = -4$. Odredite $r(A - 2I)$ i $r(A + I)$.

(b) (5 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i $A \in L(V)$ takav da je $A^k = 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Dokažite da je $\sigma(A) = \{0\}$.

Rješenje:

(a) S obzirom da je $k_A(-1) \neq 0$, slijedi da je $A + I$ regularan, pa je $r(A + I) = 3$. Nadalje, kako je A singularan, vrijedi $\det A = 0$, pa je karakteristični polinom oblika

$$k_A(\lambda) = -\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda,$$

odakle uvrštavanjem $k_A(-1) = 18$ i $k_A(1) = -4$ dobivamo

$$k_A(\lambda) = -\lambda(2 - \lambda)(5 - \lambda).$$

Stoga je $d(A - 2I) = g(2) = 1$, pa je $r(A - 2I) = 3 - d(A - 2I) = 2$.

(b) Koristeći tvrdnju o odnosu spektra potencije operatora i potencija svojstvenih vrijednosti polaznog operatora s vježbi, imamo

$$\sigma(A)^k \subseteq \sigma(A^k) = \{0\}.$$

Stoga je $\sigma(A) \subseteq \{0\}$. S druge strane, iz $A^k = 0$ također slijedi da je operator A singularan, pa je $0 \in \sigma(A)$, te je time dokazana tvrdnja.

ZADATAK 5

Neka je V vektorski prostor konačne dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$ koje je $\mathbb{R}$ ili $\mathbb{C}$. Neka je $A : V \to V$ linearan operator. Dokažite:

(a) (5 bodova) Ako je A injektivno preslikavanje i $S = \{v_1, \ldots, v_k\} \subseteq V$ linearno nezavisan skup, tada je $AS = \{Av_1, \ldots, Av_k\} \subseteq V$ linearno nezavisan skup.

(b) (5 bodova) Ako je $A(\mathrm{Im}A) = \mathrm{Im}A$, tada se V može prikazati kao direktna suma: $V = \mathrm{Ker}A \dot{+} \mathrm{Im}A$.

Rješenje

(a) Neka su $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ takvi da je $\alpha_1 Av_1 + \ldots + \alpha_k Av_k = 0$.
Tada je $0 = \alpha_1 Av_1 + \ldots + \alpha_k Av_k = A(\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k)$.
Kako je A injektivno imamo $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_k v_k = 0$.
Jer je $\{v_1, \ldots, v_k\}$ linearno nezavisan, imamo $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

(b) Prema teoremu o rangu i defektu imamo

$$\dim(\mathrm{Ker}\, A + \mathrm{Im}\, A) = d(A) + r(A) - \dim(\mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Im}\, A) = n - \dim(\mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Im}\, A)\,.$$

Dakle, dovoljno je pokazati da je $\mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Im}\, A = \{0\}$.

Neka je $x \in \mathrm{Ker}\, A \cap \mathrm{Im}\, A$ i $r = r(A)$. Tvrdnja vrijedi za $r = 0$, jer je u tom slučaju $V = V \dot{+} \{0\}$, pa pretpostavimo $r > 0$. Neka je $\{y_1, \ldots, y_r\}$ baza za $\mathrm{Im}\, A$.

Sada je $\{Ay_1, \ldots, Ay_r\}$ sustav izvodnica od r članova za $A(\mathrm{Im}\, A) = \mathrm{Im}\, A$, prostor dimenzije r, pa je i njegova baza.

Postoje $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{F}$ takvi da je $x = \alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_r y_r$. Imamo

$$0 = Ax = A(\alpha_1 y_1 + \ldots + \alpha_r y_r) = \alpha_1 Ay_1 + \ldots \alpha_r Ay_r \Rightarrow \alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0 \Rightarrow x = 0.$$