

LINEARNA ALGEBRA 2

Treći ispitni rok - 26. kolovoza 2024.

ZADATAK 1

(20 bodova) Neka je $\mathcal{P}_3$ vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog 3 te neka je $Q: \mathcal{P}_3 \rightarrow \mathcal{P}_3$ dan sa

$$(Qp)(x) = p'(x-1) + (xp(x))''.$$

- (a) Dokažite da je Q linearan operator.
- (b) Odredite matrični prikaz operatora Q u kanonskoj bazi.
- (c) Odredite rang i defekt te po jednu bazu za jezgru i sliku.

LINEARNA ALGEBRA 2

Treći ispitni rok - 26. kolovoza 2024.

ZADATAK 2

(20 bodova) Neka je baza dualnog prostora $\mathcal{P}_1^*$ (vektorski prostor polinoma stupnja manjeg ili jednakog 1) dana sa $(a) = \{a_1^*, a_2^*\}$. Odredite bazu $(a) = \{a_1, a_2\}$ prostora $\mathcal{P}_1$ kojoj je baza (a^*) dualna ako su za funkcionalne $f_1, f_2 \in \mathcal{P}_1^*$ poznati prikazi

$$f_1 = 2a_1^* - 3a_2^*, \quad f_2 = a_1^* + a_2^*,$$

gdje je $f_1(a + bt) = a + 2b$ te $f_2(a + bt) = 3a - b$.

LINEARNA ALGEBRA 2

Treći ispitni rok - 26. kolovoza 2024.

ZADATAK 3

Neka je dan vektorski prostor $V = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$ i $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$. Neka je dano linearno preslikavanje $\Phi : V \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ formulom

$$\Phi \left(\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a + 3b + c & -2a - b - c \\ 2b + 4c & 2a + 2b + 3c \end{bmatrix}.$$

- (a) (13 bodova) Odredite jednu ortonormiranu bazu za $\text{Im}(\Phi)$.
- (b) (4 bodova) Odredite $P_{\text{Im}(\Phi)}(A)$, ortogonalnu projekciju od A na $\text{Im}(\Phi)$.
- (c) (3 boda) Odredite udaljenost $P_{\text{Im}(\Phi)}(A)$ i A .

LINEARNA ALGEBRA 2

Treći ispitni rok - 26. kolovoza 2024.

ZADATAK 4

- (a) (10 bodova) Postoji li $x \in \mathbb{C}$ takav da je matrica

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & x \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

unitarno slična dijagonalnoj matrici? Ukoliko postoji, odaberite jedan takav te odredite pripadne U i D takve da je $A = UDU^*$.

- (b) (10 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni unitarni prostor te $A \in L(V)$. Dokažite:

$$A \text{ je normalan} \iff \|Ax\| = \|A^*x\| \text{ za svaki } x \in V.$$

LINEARNA ALGEBRA 2

Treći ispitni rok - 26. kolovoza 2024.

ZADATAK 5

(20 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te $A \in L(V)$ takav da je $k_A(\lambda) = (\lambda^2 - 1)(\lambda^2 + 1)(\lambda - 3)^2$.

- (a) Odredite $\dim V$ i pokažite da je A izomorfizam.
- (b) Odredite $r(A + 5I)$ i $r(A - I)$.
- (c) Ako je $\text{Ker}(A - 3I)$ dvodimenzionalan potprostor od V , možemo li zaključiti da se A može dijagonalizirati? Ovisi li to o polju $\mathbb{F}$? Odgovore obrazložite.