LINEARNA ALGEBRA 2

Drugi kolokvij - 15. lipnja 2026.

ZADATAK 1

Zadano je preslikavanje $[\cdot,\cdot] : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sa

$$[(x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)] = 3(x_1y_1 + x_2y_2) + 2(x_3y_3 + x_1y_2 + x_2y_1).$$

(a) (3 boda) Dokažite da je $[\cdot,\cdot]$ skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.

(b) (3 boda) Ako su $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ linearno zavisni vektori takvi da je

$$[x, x] = 1,\ [y, y] = 2,\ [x, y] = 0,\ [x, z] = 2,\ [z, z] = 5,$$

odredite $[y, z]$.

(c) (4 boda) Ortonormirajte kanonsku bazu za $\mathbb{R}^3$ s obzirom na skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$.

Rješenje:

(a) Kako je

$$[x, x] = 3x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 = 2(x_1 + x_2)^2 + x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2,$$

vidimo da je $[x, x] \geq 0$, za svaki $x \in \mathbb{R}^3$, a $[x, x] = 0$ ako i samo ako

$$2(x_1 + x_2)^2 = x_1^2 = x_2^2 = 2x_3^2 = 0,$$

što je ekvivalentno s $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ostala svojstva se lagano provjere.

(b) Kako su vektori linearno zavisni, Gramova determinanta je jednaka 0, tj.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & [y,z] \\ 2 & [y,z] & 5 \end{vmatrix} = 0,$$

pa se dobije $[y, z] = \pm\sqrt{2}$.

Alternativno, kako su x i y različiti od 0 i ortogonalni, oni su linearno nezavisni. Sada iz linearne zavisnosti x, y, z slijedi da mora biti $z = \alpha x + \beta y$. Imamo:

$$2 = [x, z] = \alpha[x, x] + \beta[x, y] = \alpha$$

i

$$5 = [z, z] = \alpha^2[x, x] + \beta^2[y, y] = 4 + 2\beta^2,$$

pa je $\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Slijedi da je

$$[y, z] = \beta[y, y] = \pm\sqrt{2}.$$

(c) Prva dva vektora su

$$f_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 0, 0),\ f_2 = \frac{1}{\sqrt{15}}(-2, 3, 0),$$

a možemo lako uočiti da je $(0, 0, 1)$ ortogonalan na e_1 i e_2, pa onda i na ova dva vektora, dakle njega treba samo normirati. Slijedi da je $f_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 0, 1)$.

$\boxed{\text{ZADATAK 2}}$

U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom dan je linearan operator A svojim djelovanjem na bazi

$$\begin{aligned} A(1,1,1,1) &= (0,0,0,0),\\ A(1,0,0,0) &= (1,1,0,2),\\ A(0,1,0,0) &= (1,0,1,3),\\ A(0,1,1,0) &= (0,-1,1,1). \end{aligned}$$

(a) (5 bodova) Odredite $A^*(x_1,x_2,x_3,x_4)$ za proizvoljan $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$.

(b) (5 bodova) Neka je $B \in L(\mathbb{R}^4)$ takav da je $\operatorname{Im} A^* = \operatorname{Im} B$. Odredite $\operatorname{Ker} BB^*$.

Rješenje:

(a) Iz danih podataka lako vidimo da je

$$\begin{aligned} Ae_1 &= (1,1,0,2)\\ Ae_2 &= (1,0,1,3)\\ Ae_3 &= A(0,1,1,0) - Ae_2 = (-1,-1,0,2)\\ Ae_4 &= A(1,1,1,1) - Ae_1 - Ae_2 - Ae_3 = (-1,0,1,-3), \end{aligned}$$

pa je za kanonsku bazu (e)

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Alternativno imamo prvo za par baza (e) i $(f) = \{(1,1,1,1),(1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,1,1,0)$

$$A(e,f) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je

$$A(e) = A(e,f)I(e,f)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -2 & -3 \end{bmatrix}.$$

Kako je (e) ONB, slijedi da je

$$A^*(e) = A(e)^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & -1 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{bmatrix}.$$

Dakle, za proizvoljan $(x_1,x_2,x_3,x_4) \in \mathbb{R}^4$ je

$$A^*(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1 + x_2 + 2x_4, x_1 + x_3 + 3x_4, -x_1 - x_2 - 2x_4, -x_1 - x_3 - 3x_4).$$

(b) Koristeći rezultate s predavanja, odnosno vježbi (numerirano prema trenutnoj verziji skripte za vježbe na webu), imamo

$$\operatorname{Ker} BB^* = \operatorname{Ker}(B^*)^* B^* \overset{\text{Zad 4.10.}}{=} \operatorname{Ker} B^* \overset{\text{Prop 4.6.}}{=} (\operatorname{Im} B)^\perp \overset{\text{pretpostavka}}{=} (\operatorname{Im} A^*)^\perp \overset{\text{Prop 4.6.}}{=} \operatorname{Ker} A,$$

pa preostaje odrediti $\operatorname{Ker} A$. Vidimo odmah da za stupce matrice $A(e)$ (odnosno izračunate $Ae_1, \dots, Ae_4$) vrijedi

- $\{S_1, S_2\}$ je linearno nezavisan skup
- $S_3 = -S_1$ i $S_4 = -S_2$.

Stoga je

$$\operatorname{Ker} A = [\{(1,0,1,0),(0,1,0,1)\}].$$

$\boxed{\text{ZADATAK 3}}$

(a) (5 bodova) Odredite parni polinom $p \in \mathcal{P}_3$ za koji je vrijednost izraza

$$\int_{-1}^{1} \left(p(t) - t^3 - t^2 - 1\right)^2 dt$$

najmanja moguća te odredite tu vrijednost.

(b) (5 bodova) Odredite rješenje u smislu najmanjih kvadrata sustava

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x - y + z = 0 \\ x + y - z = 2 \\ x - y - z = 6. \end{cases}$$

Rješenje:

(a) Promatramo prostor $\mathcal{P}_3$ sa skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \qquad p, q \in \mathcal{P}_3.$$

Označimo s P potprostor svih parnih polinoma, tj.

$$P = \{p \in \mathcal{P}_3 : p(x) = p(-x) \text{ za sve } x \in \mathbb{R}\}.$$

Tada tražimo

$$\min_{p \in P} \|p - q\|^2 = \left(\min_{p \in P} \|p - q\|\right)^2,$$

gdje je $q(t) = t^3 + t^2 + 1$. Stoga je traženi p upravo ortogonalna projekcija q na P. Kako smo na vježbama pokazali da je uz ovaj skalarni produkt $P \oplus N = \mathcal{P}_3$, gdje je N potprostor svih neparnih polinoma, imamo jednostavan rastav danog q s obzirom na ovu ortogonalnu sumu:

$$q(t) = \underbrace{t^2 + 1}_{\in P} + \underbrace{t^3}_{\in N}.$$

Odavde je ortogonalna projekcija q na P dana s $p(t) = t^2 + 1$. Konačno, tražena minimalna vrijednost je jednaka

$$\left\|t^3\right\|^2 = \int_{-1}^{1} t^6 dt = \frac{2}{7}.$$

(b) Dani sustav možemo zapisati kao $AX = B$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Lako se vidi da je $r(A) = 3$ (štoviše, slijedi i iz računa $A^T A = 4I$), te je stoga jedinstveno rješenje u smislu najmanjih kvadrata ovog sustava dano s

$$X_0 = \left(A^T A\right)^{-1} A^T B = \frac{1}{4} I \begin{bmatrix} 10 \\ -2 \\ -6 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 5 \\ -1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{\text{ZADATAK 4}}$

(a) (5 bodova) Zadan je linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ s

$$A(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2, x_1 + 2x_2, 3x_3).$$

Dokažite da postoji ortonormirana baza u kojoj je matrični prikaz od A dijagonalna matrica i odredite neku takvu bazu.

(b) (5 bodova) Svedite kvadratnu formu $q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$q(x, y) = -x^2 - y^2 + 8xy$$

na kanonski oblik. Odredite koja krivulja je zadana jednadžbom $q(x, y) = 15$ i skicirajte ju u polaznom koordinatnom sustavu.

Rješenje:

(a) Matrični prikaz od A u kanonskoj bazi (e) je

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Kako je to simetrična matrica, vidimo da je A hermitski, pa se može dijagonalizirati u ortonormiranoj bazi. Imamo da je $k_A(\lambda) = -(\lambda - 3)^2(\lambda - 1)$, pa je $\sigma(A) = \{1, 3\}$. Svojstveni potprostori su

$$V_A(1) = [\{(1, -1, 0)\}]\,, \; V_A(3) = [\{(1, 1, 0), (0, 0, 1)\}]\,.$$

Gram-Schmidtovim postupkom ortonormiramo baze za svojstvene potprostore, pa dobivamo da je tražena ortonormirana baza

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0), \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 1, 0), (0, 0, 1) \right\}.$$

(b) Vidimo da je q određena matricom $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$. Kako je $k_B(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda + 5)$, vidimo da je kanonski oblik forme

$$q(x, y) = 3(x')^2 - 5(y')^2,$$

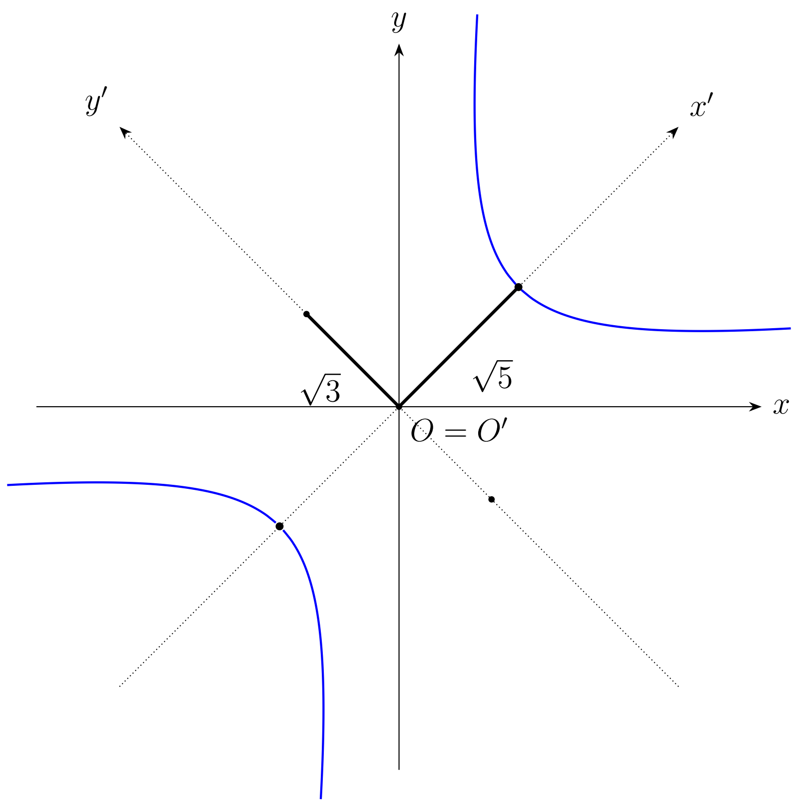
gdje je $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, a stupci matrice Q su normirani vektori pridruženi redom svojstvenim vrijednostima 3 i -5. Dakle

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da je $Q = R_{\frac{\pi}{4}}$. U koordinatama (x', y') krivulja $q(x, y) = 15$ ima jednadžbu

$$\frac{(x')^2}{5} - \frac{(y')^2}{3} = 1,$$

što je jednadžba hiperbole, dakle zadana krivulja je hiperbola dobivena rotacijom navedene hiperbole u kanonskom obliku oko ishodišta za $\frac{\pi}{4}$.



y
y'
x'
$\sqrt{3}$
$\sqrt{5}$
x
$O = O'$

ZADATAK 5

(a) (5 bodova) Neka je V konačnodimenzionalni kompleksni unitarni prostor i $U \in L(V)$ unitaran operator. Dokažite da je operator $(U + U^* - iI)(U - (1 + i)I)$ izomorfizam.

(b) (5 bodova) Postoji li normalan operator $A \in L(\mathbb{F}^3)$ takav da je $A(0, 1, 2) = (0, 1, 2)$ i $(3, 4, 5) \in \operatorname{Ker} A$? Ako postoji, odredite jedan takav operator A. Ako ne postoji, dokažite tu tvrdnju.

U rješenju je potrebno navesti sve tvrdnje s predavanja koje koristite.

Rješenje: (a) S obzirom na to da je U unitaran operator, za $\lambda \in \sigma(U)$ vrijedi $|\lambda| = 1$. Prema tome, $1 + i \notin \sigma(U)$ i zato je $U - (1 + i)I$ izomorfizam.

Nadalje, $U + U^*$ je hermitski operator, a svojstvene vrijednosti hermitskog operatora su realne. Zato je $i \notin \sigma(U + U^*)$ pa je $U + U^* - iI$ izomorfizam.

Sada je $(U + U^* - iI)(U - (1 + i)I)$ izomorfizam kao kompozicija izomorfizama.

(b) Dokazali smo da za normalan operator vrijedi da su svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima međusobno ortogonalni.

Pretpostavimo da postoji normalan operator A kao u zadatku. Prema pretpostavci, $(0, 1, 2)$ je svojstveni vektor od A pridružen svojstvenoj vrijednosti 1, a $(3, 4, 5)$ svojstveni vektor od A pridružen svojstvenoj vrijednosti 0. Međutim, $(0, 1, 2)$ i $(3, 4, 5)$ nisu međusobno ortogonalni, što je kontradikcija s pretpostavkom da je A normalan. Prema tome, ne postoji takav linearni operator.