Linearna algebra 2
vježbe

Ljiljana Arambašić, Tomislav Berić, Matko Grbac, Ana Prlić

Sadržaj

1 Linearni operatori

1.1 Definicija i osnovni primjeri linearnih operatora

Definicija 1.1. Neka su V, W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ se naziva **linearni operator** ako vrijedi

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y), \quad \forall x, y \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{F}. \quad \text{(linearnost)}$$

Posebno, ako je kodomena preslikavanja A polje $\mathbb{F}$ ($W = \mathbb{F}$), linearni operator A zovemo **linearnim funkcionalom**.

Svojstvo linearnosti ekvivalentno je sa sljedeća dva svojstva

$$\begin{aligned} A(x+y) &= A(x) + A(y), \quad \forall x, y \in V \quad \text{(aditivnost)} \\ A(\alpha x) &= \alpha A(x), \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{F} \quad \text{(homogenost).} \end{aligned}$$

Indukcijom se jednostavno pokaže da je A linearan operator ako i samo ako vrijedi

$$A\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j A(x_j), \qquad x_1, \dots, x_k \in V, \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}.$$

Često kažemo da linearni operatori "komutiraju s linearnim kombinacijama" ili da "čuvaju" linearne kombinacije.

Zadatak 1.1. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori:

(a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_2)$

(b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad A(x, y) = |x|,$

(c) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad A(x, y) = x \cdot y,$

(d) $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad A(z) = \operatorname{Re} z,$

(e) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad A(x, y) = (x, y + 2).$

(f) $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}, \quad f(p) = p(x_0)$, gdje je $x_0 \in \mathbb{R}$ zadan.

Rješenje:

(a) Neka su $x = (x_1, x_2, x_3), y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= (\alpha x_1 + \beta y_1 + \alpha x_2 + \beta y_2 + \alpha x_3 + \beta y_3, 2(\alpha x_1 + \beta y_1) - (\alpha x_2 + \beta y_2)) \\ &= \alpha(x_1 + x_2 + x_3, 2x_1 - x_2) + \beta(y_1 + y_2 + y_3, 2y_1 - y_2) \\ &= \alpha A(x) + \beta A(y), \end{aligned}$$

pa vidimo da je A linearan operator.

(b) Provjerimo homogenost od A. Za $(x, y) = (1, 0)$ i $\alpha = -1$ imamo

$$A(\alpha(x, y)) = A(-1, -1) = 1, \quad \alpha A(x, y) = (-1) \cdot 1 = -1,$$

pa A nije homogeno, a onda niti linearno preslikavanje.

Štoviše, ovo preslikavanje nije niti aditivno; imamo

$$A(1, 0) + A(-1, 0) = 2,$$

dok je s druge strane

$$A((1,0)+(-1,0)) = A(0,0) = 0.$$

Naravno, jednom kad smo pokazali da ovo preslikavanje nije homogeno, to je dovoljno za zaključiti da ono nije linearno; aditivnost nije potrebno provjeravati.

(c) Pokažimo da ovo preslikavanje nije homogeno. Uzmimo $(x,y) = (1,1)$ te $\alpha = 2$. Tada imamo

$$A(2,2) = 4 \neq 2 = 2 \cdot A(1,1).$$

(d) Primijetimo da preslikavanje nije homogeno; imamo $0 = A(i \cdot 1) \neq i \cdot A(1) = i$.

(e) Primijetimo da A ne preslikava nul-vektor u nul-vektor, što je nužan uvjet za svaki linearan operator. Naime, $A(0,0) = (0,2) \neq (0,0)$.

(f) Neka su $p,q \in \mathscr{P}$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$\begin{aligned} f(\alpha p + \beta q) &= (\alpha p + \beta q)(x_0) \\ &= \alpha p(x_0) + \beta q(x_0) \\ &= \alpha f(p) + \beta f(q), \end{aligned}$$

pa vidimo da je f linearan funkcional.

$\blacksquare$

Zadatak 1.2. Postoji li linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takav da vrijedi:

(a) $A(1,2,3) = (1,1)$ i $A(2,4,6) = (2,3)$?

(b) $A(1,0,0) = (1,1)$ i $A(2,0,0) = (2,2)$?

(c) $A(1,0,1) = (2,1), A(1,1,0) = (1,2), A(0,1,-1) = (0,1)$.

Rješenje:

(a) Ukoliko bi takav linearan operator postojao, zbog homogenosti bi moralo vrijediti

$$A(2,4,6) = A(2(1,2,3)) = 2A(1,2,3) = 2(1,1) = (2,2).$$

Kako je u zadatku zadano da je $A(2,4,6) = (2,3)$, takav linearan operator ne postoji.

(b) Uočimo da je $(2,0,0) = 2(1,0,0)$ i da je u ovom podzadatku $A(2,0,0) = 2A(1,0,0)$ pa nemamo problem kao u (a) dijelu zadatka. Ovdje možemo jednostavno pogoditi jedno preslikavanje koje će zadovoljavati oba zadana uvjeta; to je preslikavanje

$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1,x_1).$$

Sada direktno provjerimo (po definiciji) da je ovako zadano preslikavanje zaista linearan operator.

(c) Uočimo da vrijedi $(1,0,1)+(0,1,-1) = (1,1,0)$. Kada bi postojao linearni operator koji zadovoljava uvjete zadatka, onda bi zbog aditivnosti moralo vrijediti i

$$A(1,0,1) + A(0,1,-1) = A(1,1,0),$$

tj. $(2,1)+(0,1) = (1,2)$. Budući da smo došli do kontradikcije, zaključujemo da ne postoji linearni operator koji zadovoljava uvjete zadatka.

■

Zadatak 1.3. Neka je p pravac kroz ishodište čija je jednadžba $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Odredite eksplicitne formule za sljedeća preslikavanja, te dokažite da su to linearni operatori:

(a) $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pri čemu je $P(x,y)$ ortogonalna (okomita) projekcija točke (x,y) na pravac p.

(b) $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pri čemu su $Z(x,y)$ i (x,y) osno simetrične točke s obzirom na pravac p.

Ako je p pravac koji ne prolazi kroz ishodište, hoće li preslikavanja P i Z i tada biti linearni operatori?

Rješenje:

(a) Ako je $k = 0$, tada je dani pravac zapravo x-os, te je očito $P(x,y) = (x,0)$.

Pretpostavimo da je $k \neq 0$. Tada, za proizvoljnu točku $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, točku $P(x,y)$ možemo dobiti kao presjek zadanog pravca p te pravca q koji prolazi kroz točku (x,y) i okomit je na pravac p. Jednadžba takvog pravca je dana s

$$y' - y = -\frac{1}{k}(x' - x).$$

Kako je $P(x,y) = p \cap q$, tada su njegove koordinate (x', y') rješenje sustava

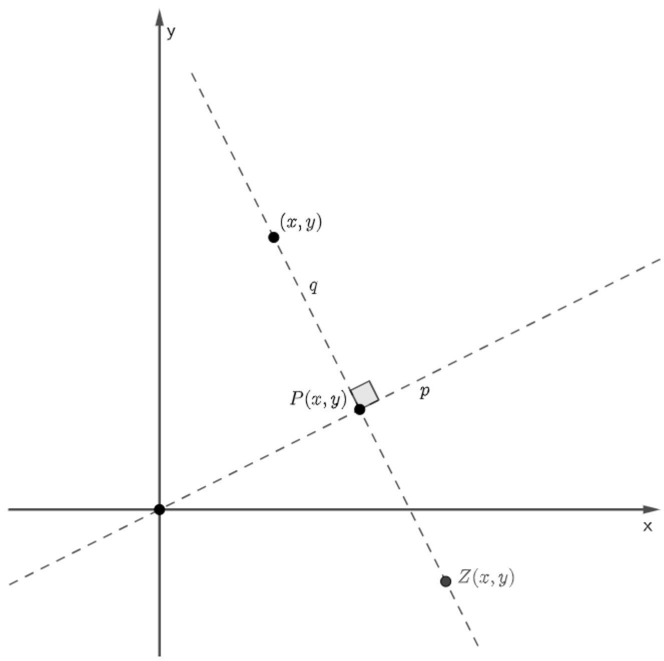
$$\begin{cases} y' = kx' \\ y' - y = -\frac{1}{k}(x' - x) \end{cases}$$

iz čega slijedi da, za $k \neq 0$, vrijedi

$$P(x,y) = \frac{1}{k^2+1}(x + ky, kx + k^2 y). \tag{1}$$

Uočimo da se i slučaj $k = 0$ uklapa u ovu formulu (uvrstimo li $k = 0$ u gornji izraz dobijemo $P(x,y) = (x,0)$, kao što smo već ranije dobili). Prema tome, ortogonalna projecija na pravac p dana je s (1) za svaki $k \in \mathbb{R}$.

Linearnost ovog preslikavanja provjeri se direktno po definiciji.



Slika 1: Ortogonalna projekcija $P(x,y)$ i osnosimetrična točka $Z(x,y)$ točke (x,y)

(b) Kako je $P(x,y)$ polovište dužine s krajnjim točkama (x,y) i $Z(x,y)$, vrijedi

$$(x,y)+Z(x,y)=2P(x,y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Odavde slijedi

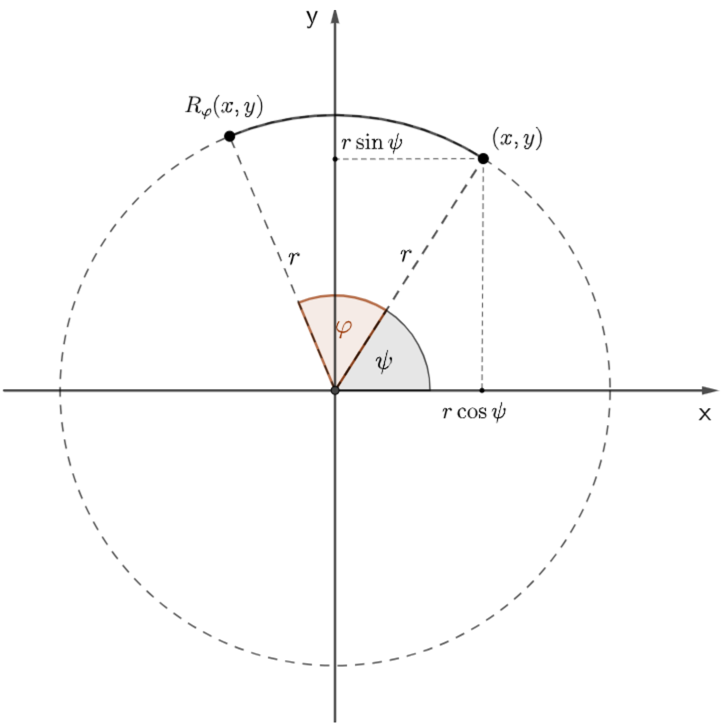
$$Z(x,y)=2P(x,y)-(x,y)=\frac{1}{k^2+1}\left((1-k^2)x+2ky, 2kx+(k^2-1)y\right).$$

I ovdje se linearnost provjeri direktno po definiciji.

Za zadnje pitanje dovoljno je gledati gdje se preslikava $(0,0)$: s obzirom da su u oba slučaja jedine fiksne točke one koje se već nalaze na pravcu p, vidimo da se $(0,0)$ ne preslikava u $(0,0)$, pa tada pripadna preslikavanja neće biti linearni operatori. ■

Zadatak 1.4. Neka je $R_\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ rotacija ravnine oko ishodišta za kut φ u pozitivnom smjeru (suprotnom kretanju kazaljke na satu). Odredite eksplicitnu formulu za R_φ i pokažite da je R_φ linearni operator.

Rješenje: Očito imamo $R_\varphi(0,0)=(0,0)$. Neka je sada $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Za takvu točku postoje jedinstveni $r>0$ (modul) i $\psi\in[0,2\pi)$ (kut koji pripadni vektor zatvara s pozitivnim dijelom x-osi) takvi da je $(x,y)=(r\cos\psi, r\sin\psi)$.



Slika 2: Koordinate točaka (x,y) i $R_\varphi(x,y)$ preko parametara r i ψ

Tada točka $R_\varphi(x,y)$ ima isti modul, dok je njen pripadni kut tada po definiciji $\psi+\varphi$. Stoga je

$$\begin{aligned} R_\varphi(x,y) &= (r\cos(\psi+\varphi), r\sin(\psi+\varphi)) \\ &= (r(\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi), r(\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi) \\ &= (\cos\varphi\cdot x-\sin\varphi\cdot y, \sin\varphi\cdot x+\cos\varphi\cdot y). \end{aligned}$$

Posebno, ova formula je korektna i uvrštavanjem $x=y=0$.

I ovdje se linearnost preslikavanja R_φ provjeri direktno po definiciji. ■

Napomena 1.2. U sva tri prethodna primjera treba naglasiti da umjesto $\mathbb{R}^2$ možemo gledati i $V^2(O)$; primjerice, za R_φ bi tada odgovarajuća formula glasila

$$R_\varphi(x\vec{i}+y\vec{j}) = (\cos\varphi\cdot x-\sin\varphi\cdot y)\vec{i}+(\sin\varphi\cdot x+\cos\varphi\cdot y)\vec{j}.$$

Zadatak 1.5. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori na odgovarajućim prostorima polinoma:

(a) $A:\mathscr{P}_k\to\mathscr{P}_k,\quad (A(p))(t)=p(t+1),\ \ t\in\mathbb{R},$

(b) $B:\mathscr{P}_k\to\mathscr{P}_k,\quad (B(p))(t)=p(t)+1,\ \ t\in\mathbb{R},$

(c) $C:\mathscr{P}\to\mathscr{P},\quad (C(p))(t)=(p(t))^2,\ \ t\in\mathbb{R},$

(d) $D:\mathscr{P}\to\mathscr{P},\quad (D(p))(t)=(p\circ p)(t),\ \ t\in\mathbb{R}.$

Rješenje:

(a) Trebamo provjeriti vrijedi li $A(\alpha p+\beta q)=\alpha A(p)+\beta A(q)$ za sve $p,q\in\mathscr{P}_k$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Za proizvoljni $t\in\mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}(A(\alpha p+\beta q))(t) &= (\alpha p+\beta q)(t+1)\\ &= \alpha p(t+1)+\beta q(t+1)\\ &= \alpha(A(p))(t)+\beta(A(q))(t)\\ &= (\alpha A(p)+\beta A(q))(t).\end{aligned}$$

Dakle, A je linearan operator.

(b) Ako je $p=0$ nulpolinom, onda je $(B(p))(t)=1$. Dakle, B ne preslikava nulvektor u nulvektor i pa stoga nije linearan operator.

(c) Za $p(t)=1$, $t\in\mathbb{R}$ i $\alpha=2$, imamo za sve $t\in\mathbb{R}$

$$(C(2p))(t)=2^2=4 \quad \text{i} \quad 2(C(p))(t)=2$$

pa je $C(2p)\neq 2C(p)$. Dakle, C nije homogen, pa prema tome nije linearni operator.

(d) Za $p(t)=t$, $t\in\mathbb{R}$ i $\alpha=2$, dobivamo

$$(D(2p))(t)=(2p)(2t)=2(2t)=4t \quad \text{i} \quad 2(D(p))(t)=2t, \quad t\in\mathbb{R},$$

pa je $D(2p)\neq 2D(p)$. Dakle, D nije homogen, pa stoga nije linearni operator.

■

Navedimo još neke primjere linearnih operatora (koje smo naveli na predavanjima).

Primjer 1.3. (a) Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Identiteta $I_V:V\to V$, $I_V(x)=x$ je linearan operator.

(b) Neka je $A\in M_{mn}(\mathbb{F})$. Preslikavanja

- $L_A:M_{np}\to M_{mp},\quad L_A(X)=AX$ (množenje matricom A s lijeve strane)
- $R_A:M_{pm}\to M_{pn},\quad R_A(X)=XA$ (množenje matricom A s desne strane)

su linearni operatori (domene i kodomoene su odabrane tako da su množenja dobro definirana).

(c) Preslikavanje $A \mapsto A^T$, koje svakoj matrici pridružuje njoj transponiranu matricu, je linearni operator s $M_{mn}(\mathbb{F})$ u $M_{nm}(\mathbb{F})$.

(d) Preslikavanje $\operatorname{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ koje svakoj kvadratnoj matrici pridružuje njen trag je linearan funkcional na $M_n(\mathbb{F})$.

(e) Preslikavanje $p \mapsto p'$, koje svakom polinomu pridružuje njegovu derivaciju, je linearan operator s $\mathscr{P}$ u $\mathscr{P}$. Također, možemo promatrati i preslikavanje $p \mapsto p'$ s $\mathscr{P}_n$ u $\mathscr{P}_{n-1}$ za $n \geq 1$.

(f) Na kolegiju Matematička analiza 2 proučavaju se (određeni) integrali funkcija.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Preslikavanje koje svakom polinomu p pridružuje vrijednost $\int_a^b p(x)dx$ je linearan funkcional na $\mathscr{P}$. Za kanonske vektore ga računamo po formuli

$$\int_a^b x^k dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

dok je za proizvoljan polinom $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{k=0}^n a_k \frac{x^{k+1}}{k+1}\Big|_a^b = \sum_{k=0}^n a_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Zadatak 1.6. Neka je $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_{n1}(\mathbb{R})$ preslikavanje koje matrici X pridružuje zbroj njenih stupaca. Dokažite da je T linearni operator.

Rješenje: Odredimo prvo eksplicitnu formulu za T. Proizvoljnu matricu $X \in M_n(\mathbb{R})$ zapišimo stupčano kao $X = [S_1\ S_2\ \ldots\ S_n]$. Zbroj stupaca matrice X možemo dobiti sljedećim matričnim množenjem:

$$[S_1\ S_2\ \ldots\ S_n] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = T(X).$$

Prema tome, ako stavimo da je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^T \in M_{n1}$, tada je $T(X) = XA$ za svaki $X \in M_n(\mathbb{R})$. Sada vidimo da je $T = R_A$ (oznaka iz Primjera 1.3), odakle automatski slijedi da je T linearni operator. ■

Iz zadanih linernih operatora možemo konstruirati nove linearne operatore. Dva načina su dana u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.4. *(a) Ako su $A, B : V \to W$ linearni operatori, te $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, tada je i njihova linearna kombinacija $\alpha A + \beta B : V \to W$ linearan operator.*

(b) Ako su $A : V \to W$ i $B : W \to Z$ linearni operatori, tada je i njihova kompozicija $B \circ A : V \to Z$ linearan operator.

Zadatak 1.7. Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$ proizvoljna matrica i $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ preslikavanje dano s

$$T(X) = AX - XA.$$

Dokažite da je T linearni operator.

Rješenje: Zadatak bismo mogli riješiti direktnom provjerom linearnosti preslikavanja T, ali sada možemo i lakše koristeći prethodnu propoziciju. Preslikavanje T zapišemo kao $T = L_A - R_A$, gdje su L_A, R_A linearni operatori iz Primjera 1.3(a). Sada je T linearna kombinacija linearnih operatora, pa je T i sam linearan. ■

Primjer 1.5. Pokažimo kako smo alternativno mogli pokazati linearnost zrcaljenja i rotacije, koristeći linearnost ortogonalne projekcije (koju smo provjerili).

(a) Neka su pravac p te preslikavanja P i Z kao u Zadatku 1.3. Pokazali smo da je P linearan operator, te izveli relaciju

$$Z(x,y) = 2P(x,y) - (x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

to jest, dobili smo da je

$$Z = 2P - I.$$

To znači da je Z linearna kombinacija linearnih operatora P i I, pa je i sam linearan prema prethodnoj propoziciji.

(b) Neka je $\varphi \in [0, 2\pi)$ te neka su p, q pravci koji s pozitivnim dijelom x-osi zatvaraju redom kuteve $\frac{\varphi}{4}$ i $\frac{3\varphi}{4}$. Na kolegiju EM2 je (geometrijskom argumentacijom) pokazano da vrijedi

$$Z_q \circ Z_p = R_\varphi,$$

pri čemu Z_p, Z_q predstavljaju zrcaljenje s obzirom na pripadni pravac. Kako su zrcaljenja linearni operatori, prema prethodnoj propoziciji je i rotacija, kao njihova kompozicija, linearan operator.

Zadatak 1.8. Neka su V, W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq W$, te neka su $f_1, \ldots, f_n : V \to \mathbb{F}$ linearni funkcionali. Tada je preslikavanje $A : V \to W$ dano s

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) v_j$$

linearan operator.

Rješenje: Za proizvoljne $x, y \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, iz linearnosti od $f_1, \ldots, f_n$ slijedi

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \sum_{j=1}^{n} f_j(\alpha x + \beta y) v_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha f_j(x) + \beta f_j(y))\, v_j \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{n} f_j(x) v_j + \beta \sum_{j=1}^{n} f_j(y) v_j \\ &= \alpha A(x) + \beta A(y). \end{aligned}$$

■

Primjer 1.6. Neka je $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje dano s

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \right),$$

gdje su $a_{ij} \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ zadani skalari. Pokažimo da je A linearan operator.

Iskoristit ćemo prethodni zadatak. Ako označimo s $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearne funkcionale zadane s

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

tada je

$$Ax = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) e_i,$$

pa je prema prethodnom zadatku A linearan operator.

Zadatak 1.9. Neka je $A : \mathscr{P} \to M_2(\mathbb{R})$ preslikavanje dano s

$$A(p) = \begin{bmatrix} p(1) - p(-1) & p'(1) \\ \int_0^1 p(x)dx & \int_{-1}^1 p(x+1)dx \end{bmatrix}.$$

Pokažimo da je A lineran operator.

Rješenje: Uočimo prvo kako djelovanje A možemo zapisati kao

$$A(p) = f_1(p)E_{11} + f_2(p)E_{12} + f_3(p)E_{21} + f_4(p)E_{22},$$

gdje su $f_1, \ldots, f_4 : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ dani s

$$f_1(p) = p(1) - p(-1), \quad f_2(p) = p'(1), \quad f_3(p) = \int_0^1 p(x)dx, \quad f_4(p) = \int_{-1}^1 p(x+1)dx.$$

(Ovdje E_{ij} označavaju matrice koje na mjestu (i, j) imaju 1 i sve ostalo 0.) Prema prethodnom zadatku, za linearnost od A dovoljno je provjeriti da su preslikavanja f_1, f_2, f_3, f_4 linearni funkcionali. Imamo sljedeće:

- f_1 je linearna kombinacija linearnih funkcionala $g_1(p) = p(1)$ i $h_1(p) = p(-1)$, pa je stoga i on sam linearan.
- f_2 se može prikazati kao kompozicija $g_2 \circ h_2$, gdje su $h_2 : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ i $g_2 : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ linearni operatori dani s $h_2(p) = p'$ i $g_2(q) = q(1)$. Stoga je i f_2 linearan.
- Za f_3 od ranije znamo da je linearno, uz $a = 0$ i $b = 1$.
- f_4 se može prikazati kao kompozicija $g_4 \circ h_4$, gdje su $h_4 : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ i $g_4 : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ linearni operatori dani s $h_4(p)(t) = p(t+1)$, $g_4(q) = \int_{-1}^1 q(x)dx$. Stoga je i f_4 linearan funkcional.

■

Zadatak 1.10. Neka je $Q : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2$ *operator interpolacije* u čvorovima -1, 0, 1, tj. neka je Qp jedinstveni polinom stupnja najviše 2 čiji graf prolazi točkama $(-1, p(-1))$, $(0, p(0))$, $(1, p(1))$. Dokažite da je Q linearni operator.

Rješenje: Neka je $p \in \mathscr{P}_3$, te označimo

$$(Qp)(x) = a_0(p) + a_1(p)x + a_2(p)x^2.$$

Tada je

$$\begin{aligned} p(-1) = (Qp)(-1) &= a_0(p) - a_1(p) + a_2(p) \\ p(0) = (Qp)(0) &= a_0(p) \\ p(1) = (Qp)(1) &= a_0(p) + a_1(p) + a_2(p) \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$a_0(p) = p(0), \quad a_1(p) = \frac{p(1) - p(-1)}{2}, \quad a_2(p) = \frac{p(1) + p(-1)}{2} - p(0).$$

Ukoliko označimo redom polinome kanonske baze za $\mathscr{P}_2$ s v_0, v_1, v_2, tada djelovanje Q možemo zapisati kao

$$Qp = a_0(p)v_0 + a_1(p)v_1 + a_2(p)v_2.$$

Kako su a_0, a_1, a_2 kao linearne kombinacije linearnih funkcionala i sami takvi, prema zadatku 1.8 slijedi da je Q linearan operator. ■

1.2 Zadavanje linearnih operatora

Na predavanjima smo dokazali sljedeće rezultate:

Teorem 1.7. *Linearni operatori $A, B : V \to W$ su jednaki ako i samo ako se podudaraju svojim djelovanjem na nekoj bazi prostora V.*

Teorem 1.8. *Neka su V, W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ baza za V, $(w_1, \dots, w_n)$ bilo koja uređena n–torka vektora iz W. Tada postoji jedinstveni linearni operator $A : V \to W$ takav da je*

$$Ab_i = w_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

U tom slučaju, za $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, djelovanje operatora A je dano s

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i.$$

Zadatak 1.11. Neka je f linearni funkcional na $M_2(\mathbb{R})$ za koji vrijedi

$$f(I) = 2, \quad f(E_{11}) = 1, \quad f(E_{12}) = f(E_{21}) = 0.$$

Je li f jedinstveno određen? Odredite $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

Rješenje: Prema teoremu 1.8, ovakav f je jedinstveno određen jer je zadano njegovo djelovanje na bazi $\{I, E_{11}, E_{12}, E_{21}\}$. Iz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = dI + (a-d)E_{11} + bE_{12} + cE_{21}$$

slijedi

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = df(I) + (a-d)f(E_{11}) + bf(E_{12}) + cf(E_{21}) = 2d + a - d = a + d.$$

Drugi način je da uočimo da je

$$f(I) = \operatorname{tr}(I), \quad f(E_{11}) = \operatorname{tr}(E_{11}), \quad f(E_{12}) = \operatorname{tr}(E_{12}), \quad f(E_{21}) = \operatorname{tr}(E_{21}).$$

to jest, linearni funkcionali f i tr se podudaraju na bazi domene. Prema teoremu 1.7, $f = \operatorname{tr}$. ∎

Zadatak 1.12. Neka je $\{e_1, e_2\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^2$, $f_1 = (1,1)$ i $f_2 = (1,2)$. Neka su $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operatori takvi da je

$$\begin{aligned} Ae_1 &= (1,-1), \quad Ae_2 = (1,0) \\ Bf_1 &= (2,-1), \quad Bf_2 = (3,-1). \end{aligned}$$

Obrazložite zašto su ovim podacima linearni operatori A i B jedinstveno određeni. Odredite Af_1 i Af_2. Što možete zaključiti o operatorima A i B?

Rješenje: Linearni operatori A i B su jedinstveno određeni zadanim podacima jer su $\{e_1, e_2\}$ i $\{f_1, f_2\}$ baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. Nadalje, imamo

$$Af_1 = A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2 = (2,-1),$$

$$Af_2 = A(e_1 + 2e_2) = Ae_1 + 2Ae_2 = (3,-1).$$

Vidimo da je $Af_1 = Bf_1$ i $Af_2 = Bf_2$, odnosno linearni operatori A i B se podudaraju na bazi $\{f_1, f_2\}$ za $\mathbb{R}^2$, pa su prema Teoremu 1.7 oni jednaki. ∎

Zadatak 1.13. Postoje li skalari $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$ takvi da za neki linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ vrijedi

$$A(1,2,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A(0,2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ A(1,3,0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ A(1,1,1) = \begin{bmatrix} e & f \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako postoje, odredite sve takve skalare, te odredite (u ovisnosti o parametrima $a,\dots,f$) eksplicitnu formulu za pripadni linearni operator.

Rješenje: Vektori na kojima je zadano djelovanje od A očito čine linearno zavisan skup. Vidimo da je $(1,3,0) = (1,2,-1) + \frac{1}{2}(0,2,2)$ pa iz linearnosti od A slijedi da mora vrijediti

$$A(1,3,0) = A(1,2,-1) + \frac{1}{2}A(0,2,2),$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

što nam daje $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$ i $d = 2$.

Nakon što provjerimo da je skup $\{(1,2,-1),(0,2,2),(1,1,1)\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, zaključujemo da je za $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$ i $d = 2$, te proizvoljne (ali fiksirane) $e,f \in \mathbb{R}$, linearni operator A dobro definirano i potpuno određen zadanim podacima.

Odredimo sada i eksplicitnu formulu. Neka je $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ proizvoljan. Tada je njegov prikaz u bazi $\{(1,2,-1),(0,2,2),(1,1,1)$ dan s

$$(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}(x_2-x_3)(1,2,-1) + \frac{1}{6}(-3x_1+2x_2+x_3)(0,2,2) + \frac{1}{3}(3x_1-x_2+x_3)(1,1,1),$$

pa je

$$\begin{aligned} A(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{3}(x_2-x_3)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}(-3x_1+2x_2+x_3)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}(3x_1-x_2+x_3)\begin{bmatrix} e & f \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3(e-1)x_1+2x_2+x_3 & 3fx_1+(2-f)x_2+(f-2)x_3 \\ 3x_1 & -6x_1+4x_2+2x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Zadatak 1.14. Neka je $A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ linearni operator za kojeg vrijedi

$$A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Odredite sve matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$ za koje iz zadanih podataka možemo odrediti $A(X)$.

Rješenje: Uočimo da za sve matrice oblika $\alpha \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ zbog linearnosti od A imamo

$$\begin{aligned} A\left(\alpha\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \alpha A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \beta A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \alpha\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha+3\beta & 2\alpha+\beta \\ 3\alpha+2\beta & 4\alpha+4\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pokažimo sada da su to ujedno i jedini vektori X za koje je moguće odrediti $A(X)$.

Označimo $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ako X nije linearna kombinacija vektora S_1 i S_2, tada je skup $\{S_1, S_2, X\}$ linearno nezavisan, pa ga možemo nadopuniti do baze $\{S_1, S_2, X, Y\}$ za $M_2(\mathbb{R})$. Prema Teoremu 1.8, linearni operator možemo zadati tako da odredimo njegovo djelobanje na bazi vektorskog prostora i zatim ga proširimo po linearnosti na cijeli prostor. Pritom djelovanje na bazi možemo odabrati bez ikakvih ograničenja. U našem slučaju to znači da je vrijednost $A(X)$ potpuno neovisna o vrijednostima $A(S_1)$ i $A(S_2)$, pa iz (2) ne možemo odrediti vrijednost $A(X)$. ■

Domaća zadaća:

DZ 1.1. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori:

(a) $A : M_2 \to M_2, A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+1 & d+a \end{bmatrix}$,

(b) $A : M_2 \to M_2, A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+2d & d+a \end{bmatrix}$,

(c) Preslikavanje koje matrici A pridružuje zbroj njenih redaka (zapišite to preslikavanje pomoću množenja matrica).

(d) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 - 3x_3)$.

(e) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A(x, y) = (x, y, xy)$,

DZ 1.2. Neka je $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ preslikavanje koje matrici A pridružuje matricu dobivenu iz matrice A tako što smo joj zamijenili prva dva retka, a zatim i prva dva stupca. Dokažite da je T linearan operator.

DZ 1.3. Koje od sljedećih tvrdnji su istinite? Neka je $A \in L(V, W), A \neq 0$.

- A preslikava linearno nezavisne skupove u linearno nezavisne skupove.
- A preslikava linearno zavisne skupove u linearno zavisne skupove.
- A preslikava bazu u bazu.
- A čuva dimenziju potprostora od V.

DZ 1.4. Neka je $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ baza za V, te $A, B \in L(V)$. Ako znamo da je

$$Ab_1 = b_2, Ab_2 = b_1, Ab_3 = b_4, Ab_4 = b_3, B(b_1 \pm b_2) = b_2 \pm b_1, B(b_3 \pm b_4) = b_4 \pm b_3,$$

dokažite da je $A = B$.

1.3 Vektorski prostor $L(V, W)$. Dualni prostor

Uvedimo oznaku

$$L(V, W) = \{A : V \to W \,|\, A \text{ je linearan operator}\}.$$

Ako je $V = W$, onda umjesto $L(V, V)$ pišemo $L(V)$. Ukoliko je $W = \mathbb{F}$, tada koristimo oznaku $V^* = L(V, \mathbb{F})$ te V^* zovemo **dualni prostor od** V.

Uz operacije definirane po točkama, dakle kao

$$(A + B)(x) = Ax + Bx$$
$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax, \quad \alpha \in \mathbb{F}$$

je $L(V,W)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

Ako su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori, onda je i $L(V,W)$ konačnodimenzionalan i vrijedi

$$\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W.$$

U tom slučaju znamo da taj prostor ima i bazu. Jedan standardni način formiranja baze za $L(V,W)$ je opisan sljedećim postupkom. Neka su $B_V = \{e_1,\dots,e_n\}$ te $B_W = \{f_1,\dots,f_m\}$ redom baze za V i W (implicitno smo označili $\dim V = n$ i $\dim W = m$). Definiramo $m\cdot n$ linearnih operatora E_{ij}, $i = 1,\dots,m$, $j = 1\dots,n$ zadavanjem na bazi B_V na sljedeći način:

$$E_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i = \begin{cases} f_i, & j = k \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Na predavanjima je dokazano da skup $\{E_{ij} : i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n\}$ čini bazu za $L(V,W)$.

Primjer 1.9. Neka su $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ i $B_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0),(1,1)\}$ redom baze za $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$. Odredimo eksplicitne formule linearnih operatora $E_{12}, E_{23} \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ navedenih u prethodnoj konstrukciji.

Linearni operator E_{12} je zadan na bazi $B_{\mathbb{R}^3}$ s

$$E_{12}(1,1,0) = (0,0), \quad E_{12}(1,0,1) = (1,0), \quad E_{12}(0,1,1) = (0,0).$$

Kako za proizvoljan $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ imamo prikaz

$$(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}(x_1+x_2-x_3)(1,1,0) + \frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3)(1,0,1) + \frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3)(0,1,1),$$

slijedi

$$E_{12}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3,0).$$

Linearni operator E_{23} je pak zadan na bazi $B_{\mathbb{R}^3}$ s

$$E_{23}(1,1,0) = (0,0), \quad E_{23}(1,0,1) = (0,0), \quad E_{23}(0,1,1) = (1,1),$$

pa nam prethodni zapis proizvoljnog vektora u toj bazi daje

$$E_{23}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3, -x_1+x_2+x_3).$$

Promotrimo sada i poseban slučaj, onaj u kojem je riječ o prostoru V^*. Neka je $\{b_1,\dots,b_n\}$ baza za V. Tada prethodna konstrukcija daje bazu za prostor V^* čije ćemo elemente označiti s $b_1^*,\dots,b_n^*$. Dakle, ovi linearni funkcionali su definirani s

$$b_j^*(b_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \qquad j = 1,\dots,n.$$

Bazu $\{b_1^*,\dots,b_n^*\}$ za V^* ćemo zvati **dualnom bazom** baze $\{b_1,\dots,b_n\}$.

Na predavanjima smo dokazali sljedeći rezultat.

Propozicija 1.10. *Ako je $\{b_1,\dots,b_n\}$ baza vektorskog prostora V, tada za svaki $x \in V$ vrijedi*

$$x = \sum_{j=1}^{n} b_j^*(x) b_j,$$

to jest, dualna baza računa koeficijente u prikazu vektora pomoću baze od koje je nastala.

Ovo se lako dokaže: ako je $\{b_1,\dots,b_n\}$ baza za V te $\{b_1^*,\dots,b_n^*\}$ pripadna dualna baza za V^*, tada za svaki $x=\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ i $j=1,\dots,n$ imamo

$$b_j^*(x)=b_j^*\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right)=\sum_{i=1}^n \lambda_i b_j^*(b_i)=\lambda_j.$$

Zadatak 1.15. Dana je baza $\{b_1,b_2,b_3\}$ za $\mathbb{R}^3$, pri čemu je $b_1=(1,0,0)$, $b_2=(1,1,-1)$, $b_3=(0,1,1)$. Odredite toj bazi dualnu bazu $\{b_1^*,b_2^*,b_3^*\}$. Odredite i $b_i^*(e_j)$, $i,j=1,2,3$, gdje su e_1, e_2, e_3 vektori kanonske baze za $\mathbb{R}^3$.

Rješenje: Odredimo prikaz proizvoljnog vektora $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ u bazi $\{b_1,b_2,b_3\}$. Lako se dobije da je

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)b_1+\left(\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)b_2+\left(\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)b_3.$$

Iz prethodne propozicije sada slijedi

$$\begin{aligned}
b_1^*(x_1,x_2,x_3)&=x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\
b_2^*(x_1,x_2,x_3)&=\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\
b_3^*(x_1,x_2,x_3)&=\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3
\end{aligned}$$

Posebno je

$$\begin{aligned}
b_1^*(e_1)&=1 & b_2^*(e_1)&=0 & b_3^*(e_1)&=0\\
b_1^*(e_2)&=-\frac{1}{2} & b_2^*(e_2)&=\frac{1}{2} & b_3^*(e_2)&=\frac{1}{2}\\
b_1^*(e_3)&=\frac{1}{2} & b_2^*(e_3)&=-\frac{1}{2} & b_3^*(e_3)&=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

Zadatak 1.16. Neka je $B=\{1,1-t,1-t^2\}$ baza za $\mathscr{P}_2$ te $f\in\mathscr{P}_2^*$ dan s $f(p)=p(0)$. Odredite prikaz od f u dualnoj bazi od B.

Rješenje: Označimo elemente baze B redom s p_1,p_2,p_3. Tražimo prikaz od f u obliku

$$f=\alpha p_1^*+\beta p_2^*+\gamma p_3^*.$$

Tada je

$$f(p_1)=\alpha p_1^*(p_1)+\beta p_2^*(p_1)+\gamma p_3^*(p_1)=\alpha,$$

a kako po definiciji od f slijedi $f(p_1)=p_1(0)=1$, zaključujemo da je $\alpha=1$. Na sličan način dobijemo da je

$$\beta=f(p_2)=p_2(0)=1 \quad \text{i} \quad \gamma=f(p_3)=p_3(0)=1.$$

Dakle, traženi prikaz je

$$f^*=p_1^*+p_2^*+p_3^*.$$

■

Zadatak 1.17. Neka su $F, G, H \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ zadani formulama

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (2x+z, x+y) \\ G(x,y,z) &= (2y, x) \\ H(x,y,z) &= (x+y+z, x+y) \end{aligned}$$

Dokažite da je $\{F, G, H\}$ linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru $L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$.

Rješenje: Pretpostavimo da su $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je $\alpha F + \beta G + \gamma H = 0$. Znamo da su dva linearna operatora jednaka ako i samo ako se njihova djelovanja podudaraju na nekoj bazi domene, pa je $\alpha F + \beta G + \gamma H = 0$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned} (\alpha F + \beta G + \gamma H)(1,0,0) &= (0,0), \\ (\alpha F + \beta G + \gamma H)(0,1,0) &= (0,0), \\ (\alpha F + \beta G + \gamma H)(0,0,1) &= (0,0). \end{aligned}$$

Kako je

$$(\alpha F + \beta G + \gamma H)(x,y,z) = (\alpha(2x+z) + \beta(2y) + \gamma(x+y+z), \alpha(x+y) + \beta x + \gamma(x+y)),$$

gornje jednadžbe daju sustav linearnih jednadžbi

$$2\alpha + \gamma = 0, \quad 2\beta + \gamma = 0, \quad \alpha + \gamma = 0, \quad \alpha + \beta + \gamma = 0,$$

odakle dobivamo $\alpha = \beta = \gamma = 0$. Time je tvrdnja dokazana. ■

Primjer 1.11. Neka je p pravac $y = x$ te neka su Z i P linearni operatori zrcaljenja s obzirom na p te ortogonalne projekcije na p. S obzirom da smo već ranije pokazali da vrijedi $Z = 2P - I$, slijedi da je $\{Z, P, I\}$ linearno zavisan skup u $L(\mathbb{R}^2)$.

Pokažimo to i na način opisan u prethodnom zadatku. Za $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ vrijedi $\alpha Z + \beta P + \gamma I = 0$ ako i saamo ako je

$$\begin{aligned} \alpha Z(1,0) + \beta P(1,0) + \gamma I(1,0) &= (0,0) \\ \alpha Z(0,1) + \beta P(0,1) + \gamma I(0,1) &= (0,0), \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \alpha(0,1) + \beta \cdot \frac{1}{2}(1,1) + \gamma(1,0) &= (0,0), \\ \alpha(1,0) + \beta \cdot \frac{1}{2}(1,1) + \gamma(0,1) &= (0,0), \end{aligned}$$

to jest

$$\frac{1}{2}\beta + \gamma = 0, \quad \alpha + \frac{1}{2}\beta = 0, \quad \alpha + \frac{1}{2}\beta = 0, \quad \frac{1}{2}\beta + \gamma = 0.$$

Rješenje ovog sustava je $(\alpha, \beta, \gamma) = (t, -2t, t), t \in \mathbb{R}$. Kako rješenje nije trivijalno, dani skup je linearno zavisan. Jedno rješenje je $(1, -2, 1)$ i ono daje $Z - 2P + I = 0$, odnosno već spomenutu relaciju $Z = 2P - I$.

Zadatak 1.18. Neka su $R_1, R_2, R_3 \in L(\mathbb{R}^2)$ rotacije oko ishodišta za različite kutove, označimo ih redom φ_1, φ_2, $\varphi_3 \in [0, 2\pi)$. Dokažite da je skup $\{R_1, R_2, R_3\}$ linearno zavisan u $L(\mathbb{R}^2)$.

Rješenje: Prisjetimo se da je operator rotacije ravnine oko ishodišta za kut φ dan s

$$\begin{aligned} R_\varphi(x,y) &= (\cos\varphi \cdot x - \sin\varphi \cdot y, \sin\varphi \cdot x + \cos\varphi \cdot y) \\ &= \cos\varphi \cdot (x,y) + \sin\varphi \cdot (-y, x). \end{aligned}$$

Označimo s $Q \in L(\mathbb{R}^2)$ operator dan s $Q(x,y) = (-y,x)$. Slijedi da je

$$R_\varphi = \cos\varphi \cdot I + \sin\varphi \cdot Q,$$

Prema tome, tročlani skup $\{R_1, R_2, R_3\}$ je sadržan u dvodimenzionalnom prostoru razapetom skupom $\{I, Q\}$ (očito je skup $\{I, Q\}$ linearno nezavisan). Zato je $\{R_1, R_2, R_3\}$ linearno zavisan skup. ■

Uočimo da su I i Q iz prethodnog zadatka rotacije: I za kut 0, te Q za kut $\frac{\pi}{2}$.

Zadatak 1.19. Zadani su sljedeći operatori iz prostora $L(\mathbb{R}^2)$: Z je zrcaljenje s obzirom na os x, P ortogonalna projekcija na os y, a R_φ rotacija oko ishodišta za kut od $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

(a) Može li se svaki linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ prikazati kao linearna kombinacija operatora Z, P i R_φ?

(b) Ako je odgovor u (a) negativan, postoji li $\psi \in [0, 2\pi)$ takav da svaki $A \in L(\mathbb{R}^2)$ ima prikaz pomoću Z, P, R_φ i R_ψ?

Rješenje:

(a) Ovo pitanje je ekvivalentno pitanju je li tročlani skup $\{Z, P, R_\varphi\}$ sustav izvodnica vektorskog prostora $L(\mathbb{R}^2)$. S obzirom da je $\dim L(\mathbb{R}^2) = (\dim \mathbb{R}^2)^2 = 4$, odgovor je negativan.

Za zadaću navedite neki konkretni primjer linearnog operatora na $\mathbb{R}^2$ koji se ne može prikazati kao linearna kombinacija linearnih operatora Z, P i R. (*Uputa*: promotrite linearne operatore E_{ij}, $i, j = 1, 2$ koji su definirani kao na početku ovog dijela, pritom uzevši kanonske baze kao par baza na kojem se definiraju, te među njima pronađite pripadnu dopunu do baze.)

(b) Sada trebamo provjeriti postoji li ψ takav da je skup $\{Z, P, R_\varphi, R_\psi\}$ baza za $L(\mathbb{R}^2)$.

U prethodnom zadatku pokazali smo da se R_φ i R_ψ mogu zapisati kao linearne kombinacije linearnih operatora I i Q. Nadalje, kako je

$$(x, -y) = (x, y) - 2(0, y),$$

slijedi da je $Z = I - 2P$. Stoga je

$$\{Z, P, R_\varphi, R_\psi\} \leq [\{Z, P, I, Q\}] = [\{P, I, Q\}].$$

Kako je $\{Z, P, R_\varphi, R_\psi\}$ četveročlani skup u prostoru $[\{Z, P, R_\varphi, R_\psi\}]$ dimenzije najviše 3, slijedi da je taj skup linearno zavisan i zato ne može biti baza za $L(\mathbb{R}^2)$.

■

Domaća zadaća:

DZ 1.5. Neka je $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) = \operatorname{tr}(A)$. Neka je $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ baza od $M_2(\mathbb{R})$. Prikažite f u dualnoj bazi baze B.

DZ 1.6. Neka su V, W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, $\dim V = n$ i $\dim W = m$, te neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ neka baza za W. Neka je $A \in L(V, W)$. Pokažite da tada postoje linearni funkcionali $f_1, \ldots, f_m \in V^*$ takvi da vrijedi

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) v_i.$$

Sjetimo se da smo u Zadatku 1.8 dokazali da su preslikavanja ovog oblika linearni operatori. Sada smo dokazali da je **svaki** linearan operator između konačnodimenzionalnih prostora tog oblika.

DZ 1.7. Postoji li baza za $L(\mathbb{R}^2)$ sastavljena od linearnih operatora $L_A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadanih s $L_A(X) = AX$ za neku matricu $A \in M_2(\mathbb{R})$.

1.4 Slika i jezgra linearnih operatora

Neka je $A \in L(V,W)$. Uvodimo sljedeće pojmove i oznake:

(1) **Slika linearnog operatora** A je skup $\mathrm{Im}A = A(V) = \{Ax : x \in V\}$.

(2) **Jezgra linearnog operatora** A je skup $\mathrm{Ker}A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : Ax = 0\}$.

(3) Vrijedi $\mathrm{Im}A \leq W$ i $\mathrm{Ker}A \leq V$ pa ima smisla definirati sljedeće pojmove:

- $\mathrm{r}(A) = \dim \mathrm{Im}A$ - **rang linearnog operatora** A
- $\mathrm{d}(A) = \dim \mathrm{Ker}A$ - **defekt linearnog operatora** A

Za određivanje slike linearnog operatora A često ćemo koristiti sljedeći rezultat.

Propozicija 1.12. *Neka je $A \in L(V,W)$. Ako je G sustav izvodnica za V, tada je $A(G)$ sustav izvodnica za* $\mathrm{Im}A$.

Uočimo da, ako je $\{b_1,\dots,b_n\}$ baza za V, tada iz prethodne propozicije slijedi da je skup $\{Ab_1,\dots,Ab_n\}$ sustav izvodnica za $\mathrm{Im}A$ (ali on ne mora biti i baza za $\mathrm{Im}A$) .

Zadatak 1.20. Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ linearni operator zadan formulom

$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, x_1 - 4x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_2).$$

Odredite $\mathrm{Ker}A$, $\mathrm{Im}A$, $\mathrm{d}(A)$, $\mathrm{r}(A)$ te po jednu bazu za $\mathrm{Ker}A$ i $\mathrm{Im}A$.

Rješenje: Prvo odredimo jezgru od A. Uvjet $A(x_1,x_2,x_3) = 0$ je ekvivalentan sustavu

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

koji ima jedino trivijalno rješenje. Dakle, $\mathrm{Ker}A = \{(0,0,0)\}$ pa je $\mathrm{d}(A) = 0$.

Odredimo sada i sliku od A. Prema Propoziciji 1.12 imamo

$$\mathrm{Im}A = [\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\}] = [\{(1,2,1,3), (-1,0,-4,-1), (1,-1,2,0)\}].$$

Lako se vidi da su dobiveni vektori linearno nezavisni pa je ovo jedna baza za $\mathrm{Im}A$, te je $\mathrm{r}(A) = 3$. ■

Zadatak 1.21. Postoji li linearni operator sa zadanim svojstvom:

(a) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\mathrm{Ker}A = \{(x_1,x_2,1,0) : x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$?

(b) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\mathrm{Ker}A = [\{(x_1,x_2,1,0) : x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}]$?

(c) $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\mathrm{Im}A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \geq 1\}$?

(d) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\mathrm{Im}A = \left[\{(1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}\right]$?

(e) $A : \mathbb{R}^3 \to M_{2,3}(\mathbb{R})$ takav da je $r(A) = 4$?

Ako da, nađite primjer takvog linearnog operatora, a ako ne, obrazložite zašto.

Rješenje:

(a) Ne, jer $\operatorname{Ker} A$ mora biti potprostor domene, a zadani skup to nije.

(b) Računanjem linearne ljuske slijedi da treba biti $\operatorname{Ker} A = \{(x_1, x_2, x_3, 0) : x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}\}$, a ovo je potprostor čiju bazu čine e_1, e_2, e_3, prva tri elementa kanonske baze za $\mathbb{R}^4$. Definiramo A djelovanjem na kanonskoj bazi: mora biti $Ae_1 = Ae_2 = Ae_3 = 0$, a Ae_4 može biti bilo koji vektor različit od nulvektora, na primjer $Ae_4 = (1,2,3)$. Sada A proširimo po linearnosti. Dobili smo linearni operator s traženim svojstvom.

(c) Ne, jer $\operatorname{Im} A$ mora biti potprostor kodomene.

(d) Računanjem linearne ljuske slijedi da treba biti $\operatorname{Im} A = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}$, što je potprostor razapet vektorima $a_1 = (1,0,0)$ i $a_2 = (0,1,-1)$. Skup $\{a_1, a_2\}$ nadopunimo vektorom $a_3 = (0,0,1)$ do baze za $\mathbb{R}^3$. Sada A definiramo na bazi kao $Aa_1 = a_1, Aa_2 = a_2$ i $Aa_3 = 0$ te proširimo po linearnosti. Dobili smo linearni operator s traženim svojstvom.

(e) Ne, jer iz Propozicije 1.12 slijedi da mora biti $r(A) \leq \dim V$.

■

Teorem 1.13 (Teorem o rangu i defektu). *Neka je $A \in L(V,W)$ pri čemu je* $\dim V < \infty$. *Tada je*

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim V.$$

Zadatak 1.22. Neka je $Q \in L(\mathscr{P}_3, \mathscr{P}_2)$ operator interpolacije u točkama -1, 0, 1. Odredite baze za $\operatorname{Ker} Q$, $\operatorname{Im} Q$, te $\mathrm{d}(Q)$, $\mathrm{r}(Q)$.

Rješenje: Primijetimo kako za $p \in \mathscr{P}_2$ imamo $Qp = p$. Stoga je $\operatorname{Im} Q = \mathscr{P}_2$, te je $\mathrm{r}(Q) = 3$. Prema teoremu o rangu i defektu je tada $\mathrm{d}(Q) = \dim \mathscr{P}_3 - \mathrm{r}(Q) = 1$. S obzirom da je uvjet $p \in \operatorname{Ker} Q$ ekvivalentan s $p(-1) = p(0) = p(1)$, slijedi da je

$$\operatorname{Ker} Q = [\{x(x-1)(x+1)\}].$$

■

Zadatak 1.23. Neka je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ i $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ linearni operator dan s

$$T(A) = AB - BA.$$

Pronađite $\operatorname{Ker} T$, $\operatorname{Im} T$, $\mathrm{d}(T)$, $\mathrm{r}(T)$, te po jednu bazu za $\operatorname{Ker} T$ i $\operatorname{Im} T$.

Rješenje: Jedan način da riješimo ovaj zadatak je raspisivanjem koordinatnog zapisa linearnog operatora T i standardnim računanjem jezgre i slike. Ovdje ćemo pokazati drugi način.

Primijetimo prvo kako su očito $I, B \in \operatorname{Ker} T$. Stoga je $\mathrm{d}(T) \geq 2$. S druge strane, lako vidimo da je

$$T(E_{11}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T(E_{12}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je $\mathrm{r}(T) \geq 2$. Kako je prema teoremu o rangu i defektu $\mathrm{r}(T) + \mathrm{d}(T) = 4$, zaključujemo da je $\mathrm{r}(T) = \mathrm{d}(T) = 2$, te imamo

$$\operatorname{Ker} T = [\{I, B\}], \qquad \operatorname{Im} T = \left[\left\{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right].$$

■

Zadatak 1.24. Pokažite da za svaki polinom $q \in \mathscr{P}_n$ postoji polinom $p \in \mathscr{P}_{n+1}$ takav da je

$$q(x) = p(x+1) - p(x).$$

Rješenje: Definiramo preslikavanje $A : \mathscr{P}_{n+1} \to \mathscr{P}_n$ kao $(Ap)(x) = p(x+1) - p(x)$. Lako provjerimo da je A linearni operator.

Tvrdnja zadatka je ekvivalentna surjektivnosti od A, to jest tome da je $r(A) = n+1$. Prema teoremu o rangu i defektu imat ćemo da je $r(A) = n+1$ ako i samo ako je $d(A) = \dim \mathscr{P}_{n+1} - r(A) = 1$.

Prema tome, dovoljno je dokazati da je jezgra od A jednodimenzionalna. Prvo uočimo da su svi konstantni polinomi u jezgri od A. Sada dokažimo da su to i jedini elementi jezgre.

Neka je $p \in \mathscr{P}_{n+1}$ takav da je $Tp = 0$, dakle $p(x+1) = p(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je $p(n) = p(0)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$, pa polinom $s(x) = p(x) - p(0)$ ima beskonačno mnogo nultočaka ($s(n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$). Tada je nužno $s = 0$, pa je p konstantni polinom. Time smo dokazali da je $\operatorname{Ker} A = \{p \in \mathscr{P}_{n+1} : p = \text{const}\}$, pa je $d(A) = 1$. ■

Zadatak 1.25. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $M \leq V$. Postoji li linearan operator $A \in L(V)$ takav da je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A = M$?

Rješenje: Uočimo najprije sljedeće: ako je $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Im} A = M$, onda je

$$\dim V = \mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = 2 \dim M.$$

Dakle, $\dim V$ mora biti paran broj i to $\dim V = 2 \dim M$.

Neka je sada $\{a_1, \ldots, a_k\}$ baza za M i $\{b_1, \ldots, b_k\}$ njena nadopuna do baze za V. Zadamo $A : V \to V$ na bazi kao

$$A(a_1) = \ldots = A(a_k) = 0, \quad A(b_1) = a_1, \ldots, A(b_k) = a_k$$

i proširimo po linearnosti. Sada je jasno da je $\operatorname{Im} A = M$, a kako je prema teoremu o rangu i defektu $\mathrm{d}(A) = k$ te je po konstrukciji $M \leq \operatorname{Ker} A$, slijedi $M = \operatorname{Ker} A$.

Prema tome, ako je V prostor neparne dimenzije, tada linearni operator sa zadanim svojstvima ne postoji, a ako je V parne dimenzije, tada takav A postoji. ■

Važnu klasu linearnih operatora na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V čine projektori na potprostore. Prisjetimo se definicije.

Neka je $M \leq V$ i L njegov direktni komplement, dakle vrijedi $V = M \dot{+} L$. Definiramo preslikavanje $P : V \to V$ na sljedeći način: za svaki $x \in V$ postoje jedinstveni $x_M \in M$ i $x_L \in L$ takvi da je $x = x_M + x_L$. Tada stavimo

$$Px = x_M.$$

Ovaj linearni operator zovemo **projektor na potprostor M u smjeru potprostora L**. Na predavanjima je dokazano:

(a) P je linearan operator,

(b) $\operatorname{Im} P = M$ i $\operatorname{Ker} P = L$.

Uočimo da je $I - P$ projektor na L u smjeru M (jer je $(I-P)x = x_L$ za svaki $x \in V$).

Zadatak 1.26. Navedite primjer linearnog operatora $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ čiju jezgru čine sve simetrične matrice reda n, a sliku sve antisimetrične matrice reda n.

Rješenje: S obzirom da su prostor svih simetričnih matrica i prostor svih antisimetričnih matrica reda n jedan drugom direktni komplementi, primjer traženog linearnog operatora bit će projektor.

Preciznije, označimo s S potprostor svih simetričnih matrica reda n, te s L potprostor svih antisimetričnih matrica reda n. Kako je $S \dot{+} L = M_n(\mathbb{R})$, tada za T možemo uzeti projektor na S u smjeru L.

Odredimo i eksplicitnu formulu za T. Rastav proizvoljne matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s obzirom na direktnu sumu $M_n(\mathbb{R}) = S \dotplus L$ je dan s

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Stoga je

$$T(A) = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

■

Zadatak 1.27. Neka je $P \in L(V)$. Tada vrijedi: P je projektor (na neki potprostor M u smjeru nekog njegovog direktnog komplementa L) ako i samo ako je $P^2 = P$. U tom slučaju je $M = \operatorname{Im} P$ i $L = \operatorname{Ker} P$.

Rješenje: $\boxed{\Rightarrow}$ Za svaki $x = x_M + x_L \in V$ imamo

$$P^2 x = P(Px) = P(x_M) = x_M = Px,$$

odakle slijedi $P^2 = P$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pokažimo prvo da je $x \in \operatorname{Im} P \iff Px = x$. Očito $Px = x$ povlači $x \in \operatorname{Im} P$. S druge strane, iz $x \in \operatorname{Im} P$ slijedi da postoji $y \in V$ takav da je $Py = x$, pa imamo

$$x = Py = P^2 y = P(Py) = Px.$$

Pokažimo sada da je $V = \operatorname{Ker} P \dotplus \operatorname{Im} P$. Ako je $x \in \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P$ tada je $Px = 0$ i $Px = x$, pa je $x = 0$ i zato je presjek slike i jezgre od P trivijalan. Prema teoremu o rangu i defektu (i formuli za dimenziju sume potprostora) je $\dim(\operatorname{Ker} P \dotplus \operatorname{Im} P) = d(P) + r(P) = \dim V$, pa je $\operatorname{Ker} P \dotplus \operatorname{Im} P = V$.

Konačno, za proizvoljni $x \in V$ je tada

$$Px = P(x_{\operatorname{Ker} P} + x_{\operatorname{Im} P}) = Px_{\operatorname{Ker} P} + Px_{\operatorname{Im} P} = x_{\operatorname{Im} P},$$

pa vidimo da je P zaista projektor na $\operatorname{Im} P$ u smjeru $\operatorname{Ker} P$. ■

Zadatak 1.28. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a^2 + b^2 \neq 0$ (to jest, nisu oba jednaka nuli), te $A = \frac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$.

(a) Dokažite da je linearni operator $L_A : M_{21} \to M_{21}$ zadan s $L_A(X) = AX$ projektor.

(b) Za $a = 3$ i $b = 4$ odredite potprostore M i L tako da je pridruženi L_A projektor na potprostor M u smjeru potprostora L.

Rješenje:

(a) Prema prethodnom zadatku, L_A je projektor ako i samo ako je $(L_A)^2 = L_A$. Kako je

$$(L_A)^2(X) = L_A(L_A(X)) = A(AX) = A^2 X,$$

to je L_A projektor ako i samo ako je $A^2 X = AX$ za svaki $X \in M_{n1}$. Lako se dobije da je to ekvivalentno s $A^2 = A$. Jednakost $A^2 = A$ se provjeri direktnim množenjem matrica.

(b) Prema prethodnom zadatku, L_A će biti projektor na potprostor $\operatorname{Im} L_A$ u smjeru potprostora $\operatorname{Ker} L_A$, dakle $M = \operatorname{Im} L_A$ i $L = \operatorname{Ker} L_A$. Dobijemo da je $M = \left[\left\{\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T\right\}\right]$ i $L = \left[\left\{\begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}^T\right\}\right]$.

■

Definicija 1.14. Za linearni operator $A \in L(V, W)$ kažemo da je

(1) **monomorfizam** ako je A injekcija
(2) **epimorfizam** ako je A surjekcija
(3) **izomorfizam** ako je A bijekcija.

Za vektorske prostore V i W nad istim poljem $\mathbb{F}$ kažemo da su **izomorfni** ako postoji izomorfizam $A : V \to W$. U tom slučaju pišemo $V \simeq W$.

Kao jednostavnu posljedicu teorema o rangu i defektu imamo sljedeći rezultat.

Korolar 1.15. *Neka je $A \in L(V,W)$, te neka je $\dim V = \dim W < \infty$. Tada vrijedi:*

$$A \text{ je monomorfizam} \Leftrightarrow A \text{ je epimorfizam} \Leftrightarrow A \text{ je izomorfizam.}$$

Na predavanjima smo dokazali sljedeće tvrdnje (za V i W konačnodimenzionalne vektorske prostore nad istim poljem $\mathbb{F}$).

Propozicija 1.16. *Neka je $A \in L(V,W)$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(1) A je monomorfizam.
(2) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, to jest, $d(A) = 0$.
(3) A preslikava linearno nezavisne skupove u V u linearno nezavisne skupove u W.

Propozicija 1.17. *Neka je $A \in L(V,W)$. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) Ako je G sustav izvodnica za V, tada je $A(G)$ sustav izvodnica za $\operatorname{Im} A$.
(2) Ako postoji podskup G od V takav da je $A(G)$ sustav izvodnica za W, tada je A surjektivan.

Propozicija 1.18. *Neka je $A \in L(V,W)$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(1) A je izomorfizam.
(2) Za svaku bazu $\{b_1,\dots,b_n\}$ za V, skup $\{Ab_1,\dots,Ab_n\}$ je baza za W.
(3) Postoji baza $\{b_1,\dots,b_n\}$ za V takva da je $\{Ab_1,\dots,Ab_n\}$ baza za W.

Posebno, $V \simeq W$ ako i samo ako je $\dim V = \dim W$.

Zadatak 1.29. Neka je $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dan formulom

$$T(x,y,z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

Dokažite da je T izomorfizam i odredite T^{-1}.

Rješenje: Prema Korolaru 1.15, dovoljno je provjeriti da je A monomorfizam, odnosno, zbog Propozicije 1.16, da je $\operatorname{Ker} T = \{(0,0,0)\}$. Neka je $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} T$. Tada je $T(x,y,z) = (0,0,0)$, odnosno

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ 4x - y & = 0 \\ 2x + 3y - z & = 0 \end{cases},$$

odakle slijedi $(x,y,z) = (0,0,0)$. Time smo dokazali da je T monomorfizam, pa i izomorfizam.

Alternativno, mogli smo iskoristiti i Propoziciju 1.18. Za kanonsku bazu $\{e_1,e_2,e_3\}$ je skup

$$\{Te_1, Te_2, Te_3\} = \{(2,4,2), (0,-1,3), (0,0,-1)\}$$

očito linearno nezavisan, pa je posebno i baza za $\mathbb{R}^3$. Stoga je T izomorfizam.

Preostaje odrediti T^{-1}. Neka je $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ proizvoljan, te označimo $T^{-1}(u,v,w) = (x,y,z)$. Tada je $T(x,y,z) = (u,v,w)$, pa dobivamo sustav

$$\begin{cases} 2x & = u \\ 4x - \ y & = v \\ 2x + 3y - z = w \end{cases}$$

odakle slijedi

$$x = \frac{u}{2}, \quad y = 2u - v, \quad z = 7u - 3v - w.$$

Dakle, inverz linearnog operatora T je dan s

$$T^{-1}(u,v,w) = \left(\frac{u}{2}, 2u - v, 7u - 3v - w\right).$$

■

Zadatak 1.30. Ako postoji, navedite primjer

(a) monomorfizma $A : M_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$
(b) epimorfizma $B : M_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$
(c) izomorfizma $C : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$.

Rješenje:

(a) Ne postoji. Za takav A bi vrijedilo $r(A) \leq 3$ i $r(A) + d(A) = 4$, dakle $d(A) \geq 1$, pa A ne može biti monomorfizam.
(b) Da, na primjer takav je linearni operator

$$B\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = at^2 + bt + c.$$

(c) Postoji, jer su dimenzije domene i kodomene jednake (na predavanjima smo dokazali da su dva prostora izomorfna ako i samo ako su njihove dimenzije jednake). Na primjer, takav je linearni operator

$$C(at^3 + bt^2 + ct + d) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ovo je očito monomorfizam, pa zato i izomorfizam.

■

Zadatak 1.31. (a) Neka je V vektorski prostor dimenzije n, te $A, B \in L(V)$ takvi da je $AB = 0$. Dokažite da je $r(A) + r(B) \leq n$.

(b) Ako je $A \in L(V)$ proizvoljan linearan operator, dokažite da postoji $B \in L(V)$ takav da vrijedi $AB = 0$ i $r(A) + r(B) = n$.

Rješenje:

(a) Po teoremu o rangu i defektu imamo $r(A) + d(A) = n$. Uočimo da je sada dovoljno dokazati da je $r(B) \leq d(A)$, jer je tada $r(A) + r(B) \leq r(A) + d(A) = n$.

Iz $AB = 0$ slijedi da je $ABx = 0$ za svaki $x \in V$. Tada je $Bx \in \operatorname{Ker} A$ za svaki $x \in V$, dakle $\operatorname{Im} B = \{Bx : x \in V\} \subseteq \operatorname{Ker} A$. Odavde je $r(B) \leq d(A)$.

(b) Iz $AB = 0$ slijedi, kao maloprije, da mora biti $\mathrm{Im}B \le \mathrm{Ker}A$, a iz $r(A) + r(B) = n$ da mora biti $r(B) = n - r(A) = d(A)$. Zato je za ovakav B nužno i dovoljno da je $\mathrm{Im}B = \mathrm{Ker}A$.

Na primjer, za B možemo uzeti projektor na $\mathrm{Ker}A$ (u smjeru bilo kojeg direktnog komplementa od $\mathrm{Ker}A$ u V).

■

Zadatak 1.32. Neka je $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan kao $A(x,y) = (x+y, x+2y)$. Ako je M potprostor od $\mathbb{R}^2$, odredite $A(M)$.

Rješenje: Kako je $M \le \mathbb{R}^2$, imamo tri mogućnosti: $M = \{(0,0)\}$, $M = \mathbb{R}^2$ te M je skup svih točaka na nekom pravcu kroz ishodište.

Linearan operator potprostore preslikava u potprostore, dakle $A(M)$ će također biti jedan od ta tri tipa skupa: $\{(0,0)\}$, pravac kroz ishodište ili $\mathbb{R}^2$.

S obzirom da je A izomorfizam (na primjer, vidimo da A preslikava bazu $\{(1,0),(0,1)\}$ za $\mathbb{R}^2$ u bazu $\{(1,1,),(1,2)\}$ za $\mathbb{R}^2$), vrijedi da je $\dim A(M) = \dim M$. Prema tome, imamo:

(a) $A(\{(0,0)\}) = \{(0,0)\}$ i $A(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

(b) Ako je M pravac kroz ishodište tada će i $A(M)$ biti pravac kroz ishodište. Kako je svaki pravac određen s dvije točke, za određivanje potprostora $A(M)$ dovoljno je, na primjer, pogledati $A(0,0)$ i $A(1,1)$ i naći jednadžbu pravca kroz te dvije točke.

Ako je M pravac zadan jednadžbom $y = kx$, tada je $A(M)$ pravac kroz $(0,0)$ i $(1+k, 1-2k)$, dakle pravac zadan jednadžbom $y = \frac{1+2k}{1+k}x$ u slučaju $k \ne -1$, te pravac $x = 0$ ako je $k = -1$.

■

Domaća zadaća:

DZ 1.8. Odredite po jednu bazu za jezgru i sliku linearnog operatora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zadanog s $T(x,y,z) = (x,x,y,y)$.

DZ 1.9. Neka je $A : \mathscr{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ preslikavanje dano sa

$$A(p) = (p(1), p(2), p(1) + p(2)).$$

Dokažite da je A linearan operator, te mu odredite rang, defekt i po jednu bazu za sliku i jezgru.

Rješenje: A je linearan jer je

$$\begin{aligned}
A(\alpha p + \beta q) &= ((\alpha p + \beta q)(1), (\alpha p + \beta q)(2), (\alpha p + \beta q)(1) + (\alpha p + \beta q)(2)) \\
&= (\alpha p(1) + \beta q(1), \alpha p(2) + \beta q(2), \alpha p(1) + \beta q(1) + \alpha p(2) + \beta q(2)) \\
&= \alpha(p(1), p(2), p(1) + p(2)) + \beta(q(1), q(2), q(1) + q(2)) \\
&= \alpha A(p) + \beta A(q).
\end{aligned}$$

Nadalje, $A(p) = (0,0,0) \Leftrightarrow (p(1) = 0 \text{ i } p(2) = 0)$. Za $p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ to daje sustav

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\
a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 0
\end{aligned}$$

čije rješenje daje jezgru od A. Dobijemo da je skup $\{2 - 3t + t^2, 6 - 7t + t^3\}$ jedna baza $\mathrm{Ker}A$, te da je $d(A) = 2$. Sada je $r(A) = 4 - d(A) = 2$. Sliku generira skup $\{A(1), A(t), A(t^2), A(t^3)\}$. Kako je skup $\{A(1), A(t)\} = \{(1,1,2),(1,2,3)\}$ linearno nezavisan, to je, zbog $r(A) = 2$, baza za $\Im A$. ■

DZ 1.10. Odredite po jednu bazu za jezgru i sliku linearnog operatora $T : M_2 \to M_2$ zadanog kao

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix}.$$

DZ 1.11. Neka je $T \in L(V,W)$, V,W vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, $k \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$. Dokažite da je

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker}(kT), \quad \operatorname{Im} T = \operatorname{Im}(kT).$$

DZ 1.12. Ako postoji, navedite primjer

- linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^2)$ čija je jezgra pravac $y = x+1$,
- linearnog operatora $B : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$,
- izomorfizma $C : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{C})$,
- monomorfizma $D : M_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$,
- epimorfizma $E : M_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$,
- linearnog operatora $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ koji skup $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y = 0\}$ preslikava u jediničnu kružnicu oko ishodišta,
- linearnog operatora $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ koji matricu E_{ij} preslikava u matricu E_{ji}, za sve $i,j = 1,\dots,n$.

DZ 1.13. Neka je $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan kao $A(x,y) = (x,x)$. Ako je M potprostor od $\mathbb{R}^2$, odredite $A(M)$.

DZ 1.14. Navedite, ako postoji, primjer linearnog operatora $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ čiju jezgru čine svi parni polinome, a sliku svi neparni polinomi (polinom je paran ako je $p(-x) = p(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, te neparan ako je $p(-x) = -p(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$).

DZ 1.15. Ako je $A \in L(V)$ proizvoljno odabran, dokažite da postoji $B \in L(V)$ takav da vrijedi $BA = 0$ i $r(A) + r(B) = n$.

DZ 1.16. Neka su $A,B \in L(V)$. Dokažite:

(a) $r(A+B) \le r(A) + r(B)$,

(b) $r(AB) \le \min\{r(A), r(B)\}$,

Rješenje:

(a) Imamo $\operatorname{Im}(A+B) = \{Ax+Bx : x \in V\} \subseteq \{Ax+By : x,y \in V\} = \operatorname{Im}A + \operatorname{Im}B$. Sada je

$$\begin{aligned} r(A+B) &= \dim \operatorname{Im}(A+B) \le \dim(\operatorname{Im}A + \operatorname{Im}B) = \dim \operatorname{Im}A + \dim \operatorname{Im}B - \dim(\operatorname{Im}A \cap \operatorname{Im}B) \\ &\le \dim \operatorname{Im}A + \dim \operatorname{Im}B = r(A) + r(B). \end{aligned}$$

(b) Iz $\operatorname{Im}(AB) = \{(AB)x : x \in V\} = \{A(Bx) : x \in V\} \subseteq \{Ay : y \in V\} = \operatorname{Im}A$ slijedi $r(AB) \le r(A)$.
Dokažimo sada $r(AB) \le r(B)$. Prema teoremu o rangu i defektu, to je ekvivalentno s

$$r(AB) \le r(B) \Leftrightarrow \dim V - d(AB) \le \dim V - d(B) \Leftrightarrow d(B) \le d(AB) \Leftrightarrow \operatorname{Ker}B \le \operatorname{Ker}(AB).$$

Ako je $x \in \operatorname{Ker}B$ tada je $Bx = 0$ pa i $(AB)(x) = A(Bx) = 0$, dakle $x \in \operatorname{Ker}(AB)$.

■

DZ 1.17. Neka je $A : U \to V$ linearni operator i neka je $L \le U$. Dokažite da je

$$\dim L - d(A) \le \dim A(L) \le \dim L.$$

DZ 1.18. Neka su $A,B : V \to V$ linearni operatori. Dokažite

(a) A je surjekcija akko za svaki linearni operator $C : V \to V$ vrijedi $CA = 0 \Longrightarrow C = 0$.

(b) B je injekcija akko za svaki linearni operator $C : V \to V$ vrijedi $BC = 0 \Longrightarrow C = 0$.

1.5 Matrični prikaz (zapis) linearnog operatora

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, te $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ njegova uređena baza (uređena baza je baza kojoj smo fiksirali poredak elemenata). Svaki vektor $x \in V$ ima jedinstveni prikaz u obliku $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$, pa mu možemo pridružiti matricu (stupac)

$$x(e) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ovaj zapis se naziva **matrični prikaz vektora** x **u bazi** (e).

Zadatak 1.33. (a) Odredite matrični prikaz polinoma $p(x) = 2x^2 + x - 1$ iz $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ s obzirom na bazu $(e) = \{x^3, x+1, x^2, 3\}$, te polinom q čiji je matrični prikaz u toj bazi jednak $q(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(b) Odredite matrični prikaz jedinične matrice I promatrane kao element vektorskog prostora M_2 s obzirom na bazu

$$(F) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

te odredite element $T \in M_2$ kojeg predstavlja matrični prikaz $T(F) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

Rješenje:

(a) Iz

$$2x^2 + x - 1 = \alpha \cdot x^3 + \beta \cdot (x+1) + \gamma \cdot x^2 + \delta \cdot 3$$

slijedi

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2, \quad \delta = -\frac{2}{3},$$

pa je

$$p(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T.$$

Nadalje, imamo

$$q(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot (x+1) + 2 \cdot x^2 + (-1) \cdot 3 = x^3 + 2x^2 - 3.$$

(b) Označimo elemente baze (F) redom F_1, F_2, F_3, F_4. Kao je

$$I = F_4 = 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + 1 \cdot F_4$$

slijedi

$$I(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Iz $T(F) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ slijedi

$$T = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Zadatak 1.34. Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i $(e') = \{(1,1,2), (2,0,0), (0,1,1)\}$ još jedna baza za $\mathbb{R}^3$. Odredite

(a) $(e_1 + e_3)(e)$

(b) $(e_1 + e_3)(e')$.

Rješenje:

(a) Iz $e_1+e_3 = 1\cdot e_1 + 0\cdot e_2 + 1\cdot e_3$ slijedi $(e_1+e_3)(e) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

(b) Iz $e_1+e_3 = 1\cdot e_1' - 1\cdot e_3'$ slijedi $(e_1+e_3)(e') = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$.

■

Neka su V,W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $(e)=\{e_1,\dots,e_n\}$ baza za V i $(f)=\{f_1,\dots,f_m\}$ baza za W. Neka je $A\in L(V,W)$. Tada postoje jedinstveni prikazi vektora $Ae_1,\dots,Ae_n$ u bazi (f). Neka su to

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j=1,\dots,n.$$

Koristeći ove skalare, linearnom operatoru A pridružimo matricu

$$A(f,e) = \begin{bmatrix}(Ae_1)(f) & \dots & (Ae_n)(f)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{F}).$$

Ovaj zapis zovemo **matrični prikaz (zapis) linearnog operatora** A **u paru baza** (e)**,** (f). Ako je $V=W$ i $(e)=(f)$, tada ćemo umjesto $A(e,e)$ kraće pisati $A(e)$.

Zadatak 1.35. Odredite matrični prikaz linearnog operatora $A\in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ u paru kanonskih baza domene i kodomene ako je

$$A(x,y) = (x+y, x-y, x).$$

Rješenje: Neka je $(e)=\{e_1,e_2\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^2$ i $(f)=\{f_1,f_2,f_3\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Trebamo odrediti prikaze vektora Ae_1 i Ae_2 u bazi (f). Imamo

$$A(e_1) = (1,1,1) = f_1+f_2+f_3, \quad A(e_2) = (1,-1,0) = f_1-f_2$$

odakle slijedi

$$A(f,e) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

■

Zadatak 1.36. Odredite matrični prikaz linearnog operatora $S\in L(\mathbb{R}^3, M_2(\mathbb{R}))$ zadanog sa

$$S(x,y,z) = \begin{bmatrix}x-y & y-z\\ z-x & x+y+z\end{bmatrix}$$

u paru kanonskih baza za domenu i kodomenu.

Rješenje: Neka je $(e)=\{e_1,e_2,e_3\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i $(E)=\{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ kanonska baza za $M_2(\mathbb{R})$. Tada je

$$S(e_1) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{bmatrix} = E_{11}-E_{21}+E_{22}$$

$$S(e_2) = \begin{bmatrix}-1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix} = -E_{11}+E_{12}+E_{22}$$

$$S(e_3) = \begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 1\end{bmatrix} = -E_{12}+E_{21}+E_{22}$$

pa je

$$S(E,e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Zadatak 1.37. Neka je $I_V \in L(V)$ identični operator na vektorskom prostoru V, te $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_n\}$ dvije baze za V. Dokažite da je $I_V(f,e)$ jednak jediničnoj matrici I ako i samo ako su baze (e) i (f) jednake.

Rješenje: Po definiciji matričnog prikaza linearnog operatora slijedi da je $I_V(f,e) = I$ ako i samo ako je $I_V(e_i) = f_i$ za sve $i = 1, \ldots, n$, odnosno ako i samo ako je $e_i = f_i$, $i = 1, \ldots, n$. Slijedi tvrdnja. ■

Sljedeći rezultati (dokazani na predavanjima) govore o usklađenosti djelovanja linearnih operatora na vektor te komponiranja linearnih operatora s množenjem pridruženih matrica.

Propozicija 1.19. *(a) Neka je $A \in L(V,W)$ te $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(f) = \{f_1, \ldots, f_m\}$ redom baze za V i W. Za svaki $x \in V$ vrijedi*

$$Ax(f) = A(f,e)x(e).$$

(b) Neka su $A \in L(V,W)$ i $B \in L(W,X)$ te (e), (f) i (g) redom baze za V, W, X. Tada za $BA \in L(V,X)$ vrijedi

$$(BA)(g,e) = B(g,f)A(f,e).$$

(c) Ako je $A \in L(V,W)$ izomorfizam te (e) i (f) redom baze za prostore V i W tada je

$$(A^{-1})(e,f) = (A(f,e))^{-1}.$$

Iz prethodne propozicije dobijemo sljedeći korolar (birajući identični operator za pojedine linearne operatore) koji daje vezu između matričnih prikaza prikaza jednog te istog vektora u različitim bazama prostora kojemu pripada, odnosno jednog te istog linearnog operatora u različitim parovima baza za domenu i kodomenu.

Korolar 1.20. *(a) Neka su $(e), (e')$ dvije baze za vektorski prostor V. Tada je za sve $x \in V$*

$$x\left(e'\right) = I_V\left(e', e\right)x(e)$$

*Matricu $I_V(e,e')$ zovemo **matricom prijelaza** (iz baze (e) u bazu (e')).*

(b) Neka su V, W vektorski prostori te (e), (e') dvije baze za V, a $(f), (f')$ dvije baze za W. Tada je

$$A\left(f', e'\right) = I_W\left(f', f\right)A(f,e)I_V\left(e, e'\right)$$

Posebno, za $V = W$ i $(e) = (f)$ te $(e') = (f')$ imamo

$$A\left(e'\right) = I_V\left(e', e\right)A(e)I_V\left(e, e'\right)$$

Uočimo da su matrice prijelaza $I_V(e,e')$ i $I_V(e,e')$ između baza (e) i (e') prostora V povezane relacijom

$$I_V(e',e) = (I_V^{-1})(e',e) = (I_V(e,e'))^{-1}. \tag{3}$$

Zadatak 1.38. Odredite matrice prijelaza između baza $(e) = \{1, t, t^2\}$ i $(e') = \{1-t, 1+t^2, t^2\}$ vektorskog prostora $\mathscr{P}_2$.

Rješenje: Zapise elemenata baze (e') pomoću baze (e) direktno iščitavamo i upisujemo u stupce matrice $I_{\mathscr{P}_2}(e,e')$. Slijedi

$$I_{\mathscr{P}_2}(e,e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jedan način za formiranje matrice $I_{\mathscr{P}_2}(e',e)$ je prikazivanje vektora baze (e) pomoću baze (e'). Drugi je primjena formule (3):

$$I_{\mathscr{P}_2}(e',e) = \left(I_{\mathscr{P}_2}(e,e')\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Zadatak 1.39. Odredite matricu prijelaza $I_{\mathbb{R}^2}\left(e',e''\right)$, ako su baze za $\mathbb{R}^2$ dane s $(e') = \{(1,2),(2,3)\}$ i $(e'') = \{(1,1),(1,-1)\}$.

Rješenje: Ovaj zadatak bismo mogli riješiti direktno, to jest prikazivanjem vektora baze (e'') pomoću vektora baze (e'). Međutim, s obzirom na jednostavnost zapisa svakog vektora pomoću kanonske baze (e) za $\mathbb{R}^2$, zadatak ćemo riješiti indirektno na sljedeći način:

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{R}^2}\left(e',e''\right) &= I_{\mathbb{R}^2}\left(e',e\right) I_{\mathbb{R}^2}\left(e,e''\right) = I_{\mathbb{R}^2}\left(e,e'\right)^{-1} I_{\mathbb{R}^2}\left(e,e''\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Zadatak 1.40. Linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3, M_2(\mathbb{R}))$ zadan je svojim matričnim prikazom

$$A(E',e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

u paru baza $(e') = \{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,1)\}$ i $(E') = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Odredite $A(x_1,x_2,x_3)$ za proizvoljan $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Rješenje: Neka su (e) i (E) redom kanonske baze za $\mathbb{R}^3$ i $M_2(\mathbb{R})$. Tada je

$$\begin{aligned}
(Ax)(E) &= A(E,e)x(e) = I_{M_2(\mathbb{R})}(E,E')A(E',e')I_{\mathbb{R}^3}(e,e')^{-1}x(e) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

pa je

$$\begin{aligned}
Ax &= \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)E_{11} + (x_1+x_2)E_{12} + (x_1+x_2)E_{21} + (2x_1+x_2)E_{22} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

■

Zadatak 1.41. Neka je $Z_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zrcaljenje s obzirom na pravac dan jednadžbom $y = kx$. Odredite matrični prikaz linearnog operatora Z_k u kanonskoj bazi te matrični prikaz u još jednoj, po volji odabranoj bazi.

Rješenje: Iz jednog od prijašnjih zadataka znamo da je

$$Z_k(x,y) = \frac{2}{k^2+1}(x+ky, kx+k^2y) - (x,y).$$

Stoga je

$$Z_k(e) = \begin{bmatrix} \frac{2}{k^2+1} - 1 & \frac{2k}{k^2+1} \\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{2k^2}{k^2+1} - 1 \end{bmatrix}.$$

Linearni operator Z_k će imati "najjednostavniji" matrični prikaz u bazi koju čine neki vektor koji pripada pravcu $y = kx$ i vektor koji leži na pravcu koji je okomit na pravac $y = kx$, npr. $f_1 = (1,k)$, $f_2 = (1, \frac{-1}{k})$. Stavimo $(f) = \{f_1, f_2\}$. Imamo $Z_k(f_1) = f_1$ i $Z_k(f_2) = -f_2$ pa je

$$Z_k(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da smo iz posljednjeg matričnog prikaza lako mogli doći do matričnog prikaza $Z_k(e)$. Naime, vrijedi $Z_k(e) = I(e,f)Z_k(f)I(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & \frac{-1}{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & \frac{-1}{k} \end{bmatrix}^{-1}$. ■

Zadatak 1.42. Neka je $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projektor prostora $\mathbb{R}^3$ na potprostor $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$ duž potprostora $L = \{(x,x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Odredite matrični prikaz $P(e)$ u kanonskoj bazi (e).

(b) Izaberite još neku bazu (f) za $\mathbb{R}^3$ i odredite $P(f)$.

Rješenje: Iako bismo (a) dio mogli rješavati direktno (napravite to sami), mi ćemo prvo riješiti (b) dio zadatka i onda pomoću njega (a) dio. Ideja je da odredimo bazu (f) u kojoj će matrični prikaz od P biti vrlo jednostavan.

(b) Dokazali smo da za projektor P na potprostor M duž potprostora L vrijedi $\operatorname{Im} P = M$, $\operatorname{Ker} P = L$ te $Px = x$ za $x \in M$. Kako je $M \dot{+} L = \mathbb{R}^3$, uzmimo bazu za $\mathbb{R}^3$ koja je unija baze za M i baze za L. Kako je $M = [\{(1,0,1),(0,1,1)\}]$, $L = [\{(1,1,-1)\}]$, dobijemo bazu

$$(f) = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}.$$

Tada je $Pf_1 = f_1, Pf_2 = f_2, Pf_3 = 0$ pa je

$$P(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Odavde računamo $P(e)$:

$$P(e) = I(e,f)P(f)I(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

■

Propozicija 1.21. *Neka su V, W vektorski prostori, $n = \dim V$, $m = \dim W$, te neka su (e) i (f) njihove baze.*

(a) Preslikavanje $\varphi : V \to M_{n1}$ definirano s $\varphi(x) = x(e)$ je izomorfizam vektorskih prostora.

(b) Preslikavanje $\Phi : L(V,W) \to M_{mn}$ definirano s $\Phi(A) = A(f,e)$ je izomorfizam vektorskih prostora.

Ova propozicija nam omogućuje da razne probleme u prostoru linearnih operatora riješimo odgovarajućom provjerom u prostoru matrica, odnosno da iskoristimo istovrsne tvrdnje koje smo već dobili za matrice.

Zadatak 1.43. Zadani su sljedeći linearni operatori na $\mathbb{R}^2$:

- R - rotacija oko ishodišta za kut $\frac{\pi}{2}$,
- P - ortogonalna projekcija na pravac $y = -x$,
- Z - zrcaljenje s obzirom na pravac $y = x$,
- Q - ortogonalna projekcija na pravac $x = 0$.

Dokažite da je skup $\{R, P, Z, Q\}$ baza za $L(\mathbb{R}^2)$.

Rješenje: Svi ovi operatori su nam od ranije poznati i zadani su sljedećim izrazima:

$$R(x,y) = (-y,x), \quad P(x,y) = \frac{1}{2}(x-y,-x+y), \quad Z(x,y) = (y,x), \quad Q(x,y) = (0,y).$$

Ovaj zadatak mogli bismo riješiti direktnom provjerom linearne nezavisnosti zadanog skupa (kao u zadatku 1.17). Ovdje ćemo na drugi način, primjenom propozicije 1.21.

Označimo s (e) kanonsku bazu za $\mathbb{R}^2$. Prema prethodnoj propoziciji je preslikavanje

$$\Phi : L(\mathbb{R}^2) \to M_2(\mathbb{R}), \quad \Phi(A) = A(e)$$

izomorfizam, pa je skup $\{R,P,Z,Q\}$ baza za $L(\mathbb{R}^2)$ ako i samo ako je skup

$$\{\Phi(R),\Phi(P),\Phi(Z),\Phi(Q)\} = \{R(e),P(e),Z(e),Q(e)\}$$

baza za $M_2(\mathbb{R})$. Dobijemo da je

$$R(e) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P(e) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lako provjerimo da ove četiri matrice čine linearno nezavisan skup, a kako je kardinalitet skupa jednak dimenziji prostora, on čini i bazu za $M_2(\mathbb{R})$. Prema opisanom, slijedi tvrdnja. ■

Navedimo još jedan rezultat s predavanja.

Propozicija 1.22. *Neka su V,W vektorski prostori te (e) i (f) redom baze za V i W. Za $A \in L(V,W)$ vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $r(A) = r(A(f,e))$ (rang linearnog operatora jednak je rangu njehovog matričnog prikaza u proizvoljnom paru baza).

(2) Ako je $\dim V = \dim W$ tada je A izomorfizam ako i samo ako je matrica $A(f,e)$ regularna.

Zadatak 1.44. Neka je $A \in L(V,W)$ linearni operator ranga $r > 0$. Dokažite da se A može napisati kao suma r linearnih operatora ranga 1, to jest, da postoje linearni operatori $A_1,\dots,A_r \in L(V,W)$ ranga 1 takvi da je $A = A_1 + \dots + A_r$.

Rješenje: Neka je $n = \dim V$ i $m = \dim W$. Zadatak istog tipa smo rješavali za matrice, pa ćemo se ovdje poslužiti tim rezultatom. Neka su (e) i (f) redom baze za V i W. Tada je $A(f,e)$ matrica ranga r. Prema dokazanom, postoje matrice $B_1,\dots,B_r$ ranga 1 takve da je

$$A(f,e) = B_1 + \dots + B_r.$$

Kako je preslikavanje $A \mapsto A(f,e)$ izomorfizam s $L(V,W)$ na M_{mn}, postoje $A_1,\dots,A_r \in L(V,W)$ takvi da je

$$A_k(f,e) = B_k, \quad k = 1,\dots,r.$$

Prema prethodnoj propoziciji je

$$r(A_k) = r(A_k(f,e)) = r(B_k) = 1, \quad k = 1,\dots,r.$$

Konačno, imamo

$$A(f,e) = B_1 + \dots + B_r = A_1(f,e) + \dots + A_r(f,e) = (A_1 + \dots + A_r)(f,e),$$

odakle slijedi $A = A_1 + \dots + A_r$. ■

Zadatak 1.45. Neka je $A \in L(V,W)$ linearni operator ranga r. Dokažite da postoje baze $(b) = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ i $(c) = \{c_1, c_2, \ldots, c_m\}$ za V i W takve da je

$$A(c,b) = D_r$$

pri čemu je $D_r \in M_{mn}$ kanonska matrica reda r.

Rješenje: Ako je $r = 0$ tada je $A = 0$ i tvrdnja vrijedi za svaki izbor baza. Pretpostavimo da je $r > 0$. I ovaj zadatak rješavamo "prebacujući" se u matrični prostor i primjenom rezultata koje smo tamo dobili.

Uočimo da tražimo baze (b) i (c) takve da je

$$A(b_i) = \begin{cases} c_i, & i = 1, \ldots, r \\ 0, & i = r+1, \ldots, n. \end{cases} \tag{4}$$

Neka su (e) i (f) neke (bilo koje) baze za V i W. Prema propoziciji 1.22, $A(f,e)$ je matrica ranga r. Tada postoje regularne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da je

$$SA(f,e)T = D_r. \tag{5}$$

Kako je preslikavanje $D \mapsto D(f)$ izomorfizam s $L(W)$ u M_m, to postoji $C \in L(W)$ takav da je $C(f) = S$. Na isti način zaključujemo da postoji $B \in L(V)$ takav da je $B(e) = T$. Kako su S i T reguarne matrice, slijedi da su B i C izomorfizmi. Sada je $SA(f,e)T = B(f)A(f,e)C(e) = (BAC)(f,e)$ pa jednakost (6) postaje

$$(CAB)(f,e) = D_r. \tag{6}$$

Po definiciji matričnog zapisa linearnog operatora to znači da je

$$(CAB)(e_i) = \begin{cases} f_i, & i = 1, \ldots, r \\ 0, & i = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

što, imajući na umu (4), zapišemo kao

$$A(Be_i) = \begin{cases} C^{-1} f_i, & i = 1, \ldots, r \\ 0, & i = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

Sad preostaje označiti $b_i = Be_i$ za $i = 1, \ldots, n$ i $c_i = C^{-1} f_i$ za $i = 1, \ldots, m$. Kako su B i C izomorfizmi, skup $(b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$ je baza za V i $(c) = \{c_1, \ldots, c_m\}$ je baza za W, te vrijedi

$$A(b_i) = \begin{cases} c_i, & i = 1, \ldots, r \\ 0, & i = r+1, \ldots, n \end{cases}$$

■

Za kraj ovog odjeljka pokažimo kako možemo iskoristiti matricu prijelaza za određivanje dualne baze.

Neka je $x \in V$, te $(b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$ neka baza za V. Dokazali smo da je (propozicija 1.10)

$$x = \sum_{j=1}^{n} b_j^*(x) b_j.$$

Pretpostavimo da je $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ neka druga baza za V te neka je $I(b,e)$ matrica prijelaza. U prvom stupcu ove matrice nalaze se koeficijenti iz prikaza vektora $I_V(e_1) = e_1$ pomoću vektora baze (b), dakle koeficijenti iz prikaza

$$e_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j^*(e_1) b_j,$$

te slično za sljedeće stupce. Tako dobijemo da je

$$I(b,e) = \begin{bmatrix} b_1^*(e_1) & b_1^*(e_2) & \dots & b_1^*(e_n) \\ b_2^*(e_1) & b_2^*(e_2) & \dots & b_2^*(e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n^*(e_1) & b_n^*(e_2) & \dots & b_n^*(e_n) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Tada je

$$b_k^*\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j b_k^*(e_j),$$

što nam daje jednostavan način za određivanje djelovanja funkcionala b_k^* na vektorima domene koji su prikazani pomoću neke druge baze: za određivanje $b_k^*(\sum_{j=1}^n x_j e_j)$ trebaju nam koeficijenti iz k-tog retka matrice $I(b,e)$.

Ovo je posebno korisno kada je (e) baza u kojoj je lako i prirodno naći prikaze elemenata prostora (na primjer, ako je (e) kanonska baza $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{P}_n$, M_{mn}).

Pokažimo to na konkretnom primjeru.

Zadatak 1.46. Neka je V vektorski prostor simetričnih matrica reda 2 i neka je dana baza $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ za V dana s

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite djelovanje elemenata dualne baze $(b)^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ za V^* na proizvoljnoj matrici domene, to jest $b_k^*\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\right)$ za $k = 1,2,3$.

Rješenje: Neka je $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza za V zadana s

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ovu bazu možemo smatrati kanonskom bazom za V s obzirom da je rastav proizvoljne matrice iz V prirodan i jednostavan za izračunati:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{22}e_3.$$

Sada je

$$b_k^*\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = b_k^*(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{22}e_3) = a_{11}b_k^*(e_1) + a_{12}b_k^*(e_2) + a_{22}b_k^*(e_3).$$

Prema (7), koeficijenti koji nam trebaju u prethodnoj sumi nalaze se u k-tom retku matrice $I(b,e)$. Dobijemo da je

$$I(b,e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

odakle slijedi

$$b_1^*\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}, \quad b_2^*\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{12}, \qquad b_3^*\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{12} + a_{22}.$$

■

Domaća zadaća:

DZ 1.19. Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i $(e') = \{(1,1,2),(2,0,0),(0,1,1)\}$ još jedna baza za $\mathbb{R}^3$. Odredite $(e_1 - e_2)(e')$ i $(e'_1 - e'_3)(e')$.

Rješenje: $(e_1 - e_2)(e') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$, $(e'_1 - e'_3)(e') = \begin{bmatrix} 1 & 0-1 \end{bmatrix}^T$. ■

DZ 1.20. Nađite matricu linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^2)$, $A(x,y) = (x-y, x+y)$ u bazi $\{(1,2),(2,1)\}$.

Rješenje: $A(e') = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. ■

DZ 1.21. Nađite matricu operatora $A \in L(\mathbb{R}^3, \mathscr{P}_1)$, $A(x,y,z) = x+y+z+xt$ u paru baze $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$ i $\{1+t, 1-2t\}$.

Rješenje: $A(f',e') = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. ■

DZ 1.22. Neka je $f \in V^*$. Neka je $(b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$ neka baza za V, te $(1) = \{1\}$ baza za $\mathbb{F}$. Odredite matrični prikaz $f(1,b)$ linearnog funkcionala f u paru baza (b) i (1).

Rješenje: Prvo uočimo da je $f(1,b) \in M_{1,n}$, te da je i-ti stupac matrice $f(1,b)$ prikaz od $f(b_i)$ u bazi $\{1\}$ za $\mathbb{F}$. Kako je $f(b_i) = f(b_i) \cdot 1$ za sve $i = 1, \ldots, n$, slijedi

$$f(1,b) = \begin{bmatrix} f(b_1) & f(b_2) & \ldots & f(b_n) \end{bmatrix}.$$

■

DZ 1.23. Neka je $(f) = \{1-t, 1+t^2, t^2\}$ jedna baza vektorskog prostora $\mathscr{P}_2$. Odredite bazu (g) za $\mathscr{P}_2$ ako znamo da je matrica prijelaza

$$I_{\mathscr{P}_2}(f,g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

DZ 1.24. U $\mathbb{R}^3$ s (e) označimo kanonsku bazu. Zadana je i baza $(e') = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, gdje su

$$e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_2, \quad e'_3 = e_1.$$

Odredite matrični prikaz linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ u bazi (e') ako je $Ae_i = e'_i$ za $i = 1,2,3$.

Rješenje: Imamo

$$A(e) = I_{\mathbb{R}^3}(e,e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je

$$A(e') = I_{\mathbb{R}^3}(e,e')^{-1} A(e) I_{\mathbb{R}^3}(e,e') = A(e)^{-1} A(e) A(e) = A(e).$$

■

DZ 1.25. Zadan je matrični prikaz $A(f,e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathscr{P}_2$ u paru baza $\{(1,-1,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$ i $\{1, t, t^2\}$. Odredite $A(x_1, x_2, x_3)$.

Rješenje: $A(x_1,x_2,x_3) = x_1 + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)t + (x_1 - x_3)t^2.$ ■

DZ 1.26. Neka je $(e') = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ baza za $\mathbb{R}^3$ i $(f') = \{1, 1-t, 1+t^2\}$ baza za $\mathscr{P}_2$. Neka su linearni operatori $A \in L(\mathbb{R}^3)$ i $B \in L(\mathbb{R}^3, \mathscr{P}_2)$ zadani svojim matričnim prikazima

$$A(e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B(f',e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Odredite matrični prikaz od BA u paru kanonskih baza za domenu i kodomenu.

Rješenje: Neka je (f) kanonska baza za $\mathscr{P}_2$. Tada je

$$\begin{aligned} BA(f,e) &= B(f,e)A(e) = I_{\mathscr{P}_2}(f,f')B(f',e)I_{\mathbb{R}^3}(e,e')A(e')I_{\mathbb{R}^3}(e,e')^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

DZ 1.27. Neka je $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearni operator dan svojom matricom $A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi. Neka je $(e') = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ baza za $\mathbb{R}^4$ zadana s $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, a (e'') još jedna baza za $\mathbb{R}^4$ zadana s $e''_1 = e_1$, $e''_2 = e_2$, $e''_3 = e_4$, $e''_4 = e_3$.

(a) Za $x = (1,-1,2,1)$ odredite $(Ax)(e)$ i $(Ax)(e')$.

(b) Neka je $y(e') = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$. Odredite $(Ay)(e)$.

(c) Odredite matricu prijelaza iz baze (e) u (e'') i $A(e'')$.

(d) Odredite rang od A.

Rješenje:

(a) $(Ax)(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $(Ax)(e') = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(b) $(Ay)(e) = \begin{bmatrix} -24 \\ -32 \\ -51 \\ -42 \end{bmatrix}$.

(c) $A(e'') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$

(d) $r(A) = 4.$

■

DZ 1.28. Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, te $L_A \in L(M_2)$ zadan kao $L_A(X) = AX$. Odredite matrični prikaz od L_A u nekom paru bazu.

DZ 1.29. Neka su $A, B \in M_2$ i $T \in L(M_2)$ zadan s $T(X) = AXB$. Odredite matrični prikaz od T u paru kanonskih baza.

DZ 1.30. Neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(e') = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze prostora V. Neka je $S \in L(V)$ linearni operator zadan na bazi s

$$Se_i = e'_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pokažite da je $S(e) = I_V(e, e')$.

DZ 1.31. Dana je baza $\{b_1, b_2, b_3\}$ za $\mathbb{R}^3$, pri čemu je $b_1 = (1,0,0)$, $b_2 = (1,1,-1)$, $b_3 = (0,1,1)$. Pomoću matrice prijelaza $I(b, e)$ odredite $b_k^*(x_1, x_2, x_3)$ za $k = 1,2,3$.

2 Spektar

2.1 Definicija i osnovni primjeri

Definicija 2.1. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ kažemo da je **svojstvena vrijednost** linearnog operatora A ako postoji vektor $x \in V \setminus \{0\}$ takav da je

$$Ax = \lambda x.$$

Taj vektor x se naziva **svojstveni vektor** linearnog operatora A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se **spektar** od A i označava sa $\sigma(A)$.

Prije prvih primjera, osvrnimo se nakratko na samu definiciju:

- U definiciji svojstvene vrijednosti traži se egzistencija vektora $x \neq 0_V$ za koje je djelovanje operatora A dano jednostavnim skaliranjem. Uvjet $x \neq 0_V$ je važan jer je $A0_V = \lambda 0_V$ za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$, pa bi bez tog uvjeta definicija bila besmislena.
- Primijetimo da jedan te isti $x \in V$ ne može biti svojstveni vektor pridružen različitim svojstvenim vrijednostima. Naime, kada bi za $\lambda \neq \mu$ imali $Ax = \lambda x$ i $Ax = \mu x$, slijedilo bi $(\lambda - \mu)x = 0$, odnosno $x = 0$, pa x ne bi bio svojstveni vektor. Dakle, različitim svojstvenim vrijednostima su pridruženi različiti svojstveni vektori (kasnije ćemo vidjeti da vrijedi i nešto više).

Zadatak 2.1. (1) Jesu li $\lambda = 3$ i $\mu = 0$ svojstvene vrijednosti linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadanog s

$$A(x,y,z) = (x+2y+2z, 3x-2y+z, y+z)?$$

Ako da, odredite (neki) pripadni svojstveni vektor.

(2) Jesu li $v = (-1,0,1)$ i $w = (1,1,2)$ svojstveni vektori linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadanog s

$$A(x,y,z) = (5x+2y+3z, 3x+8y+3z, 2x+4z)?$$

Ako da, odredite pripadne svojstvene vrijednosti?

Rješenje: (1) Uzmimo prvo $\lambda = 3$. Trebamo provjeriti postoji li $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ takav da je $A(x,y,z) = 3 \cdot (x,y,z)$. Ovo se svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi i provjeru ima li on i netrivijalnih rješenja. Dobijemo da je $(3,2,1)$ jedno rješenje sustava, dakle, 3 je svojstvena vrijednost od A i $(3,2,1)$ pripadni svojstveni vektor.

Isti napravimo za $\mu = 0$. U ovom slučaju sustav ima samo trivijalno rješenje pa 0 nije svojstvena vrijednost od A.

(2) Treba provjeriti postoji li $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $A(-1,0,1) = \lambda(-1,0,1)$. Kako je $A(-1,0,1) = (-2,0,2) = 2 \cdot (-1,0,1)$, slijedi da je $(-1,0,1)$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 2.

Isti način provjere za drugi vektor daje da on nije svojstveni vektor od A. ■

Zadatak 2.2. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore za sljedeće linearne operatore.

(1) $T : M_n \to M_n$, $T(A) = A^T$ operator transponiranja.

(2) $P \in L(V)$ projektor.

Rješenje: (1) Neka je $A \in M_n$, $A \neq 0$. Pretpostavimo da je $T(A) = \lambda A$, to jest $A^T = \lambda A$. Tada

$$A = (A^T)^T = (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda^2 A,$$

odnosno $(\lambda^2 - 1)A = 0$. Kako je $A \neq 0$, slijedi $\lambda^2 - 1 = 0$, odnosno $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$.

Sada, rješavanjem jednadžbe $T(A) = 1 \cdot A$ slijedi da je $A \neq 0$ svojstveni vektor od T pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 ako i samo ako je A simetrična matrica. Isto tako, rješavanjem jednadžbe $T(A) = -1 \cdot A$ slijedi da je $A \neq 0$ svojstveni vektor od T pridružen svojstvenoj vrijednosti -1 ako i samo ako je A antisimetrična matrica.

(2) Neka je $P \in L(V)$ projektor.

Ako je $\operatorname{Im} P = \{0\}$, tada je $P = 0$, pa je $\sigma(P) = \{0\}$. Ako je $\operatorname{Im} P = V$, tada je $P = I_V$, pa je $\sigma(P) = \{1\}$.

Promotrimo preostale slučajeve, one u kojem je $\operatorname{Im} P$ netrivijalan potprostor od V. Označimo s $M = \operatorname{Im} P$ i $L = \operatorname{Ker} P$. Kada bi za neke $\lambda \in \mathbb{F}$ i $x = x_M + x_L \in V \setminus \{0\}$ vrijedilo $Px = \lambda x$, imali bismo

$$x_M = Px = \lambda x = \lambda(x_M + x_L),$$

odakle slijedi

$$(\lambda - 1)x_M + \lambda x_L = 0.$$

S obzirom na direktnost sume $M \dotplus L = V$, slijedi

$$(\lambda - 1)x_M = 0 \quad \text{i } \lambda x_L = 0.$$

Odavde jednostavnim promatranjem slučajeva slijedi da su jedine mogućnosti $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$, te pritom mora biti $x = x_L \in L$ u prvom, odnosno $x = x_M \in M$ u drugom slučaju. Dakle, $\sigma(P) = \{0, 1\}$, te vidimo da su svi vektori iz L pridruženi svojstvenoj vrijednosti 0 te svi iz M pridruženi svojstvenoj vrijednosti 1. ■

U idućem dijelu ćemo proučiti neke tvrdnje koje će pojednostaviti određivanja spektra linearnog operatora i pridruženih svojstvenih vektora. U međuvremenu, promotrimo kroz idućih nekoliko zadataka kako se spektar ponaša s obzirom na neke prirodne operacije nad operatorima.

Zadatak 2.3. Neka je $A \in L(V), \alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ proizvoljan skalar. Dokažite

$$\sigma(\alpha A) = \alpha\sigma(A),$$

gdje je

$$\alpha\sigma(A) = \{\alpha\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Rješenje: Imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(\alpha A) &\iff \exists x \in V \setminus \{0\} \text{ takav da je } (\alpha A)x = \lambda x \\
&\iff \exists x \in V \setminus \{0\} \text{ takav da je } Ax = \frac{\lambda}{\alpha}x \\
&\iff \frac{\lambda}{\alpha} \in \sigma(A) \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \sigma(A) \text{ takav da je } \frac{\lambda}{\alpha} = \lambda_0 \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \sigma(A) \text{ takav da je } \lambda = \alpha\lambda_0 \\
&\iff \lambda \in \alpha\sigma(A).
\end{aligned}$$

■

Zadatak 2.4. Neka je $A \in L(V), \alpha \in \mathbb{F}$ proizvoljan skalar. Dokažite

$$\sigma(A - \alpha I) = \sigma(A) - \alpha,$$

gdje je

$$\sigma(A) - \alpha = \{\lambda - \alpha : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Rješenje: Imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(A-\alpha I) &\iff \exists x \in V \setminus \{0\} \text{ takav da je } (A-\alpha I)x = \lambda x \\
&\iff \exists x \in V \setminus \{0\} \text{ takav da je } Ax = (\lambda+\alpha)x \\
&\iff \lambda+\alpha \in \sigma(A) \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \sigma(A) \text{ takav da je } \lambda+\alpha = \lambda_0 \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \sigma(A) \text{ takav da je } \lambda = \lambda_0 - \alpha \\
&\iff \lambda \in \sigma(A) - \alpha.
\end{aligned}$$

■

Zadatak 2.5. Neka je $A \in L(V)$ regularan operator. Dokažite

$$\sigma\left(A^{-1}\right) = \sigma(A)^{-1},$$

gdje je

$$\sigma(A)^{-1} = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\right\}.$$

Rješenje: Primijetimo prvo kako za operator $A \in L(V)$ imamo

$$0 \in \sigma(A) \iff \exists x \in V \setminus \{0\} \text{ takav da je } Ax = 0 \iff A \text{ nije regularan.}$$

Stoga regularni operatori ne sadrže 0 u svom spektru, pa je posebno i skup $\sigma(A)^{-1}$ dobro definiran. Pokažimo sada i traženu jednakost. Imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma\left(A^{-1}\right) &\iff \exists x \in V \setminus \{0\} \text{ takav da je } A^{-1}x = \lambda x \\
&\iff \exists x \in V \setminus \{0\} \text{ takav da je } x = A(\lambda x) \\
&\iff \exists x \in V \setminus \{0\} \text{ takav da je } \frac{1}{\lambda}x = Ax \\
&\iff \lambda^{-1} \in \sigma(A) \\
&\iff \lambda \in \sigma(A)^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Zadatak 2.6. Neka je $A \in L(V)$ i $k \in \mathbb{N}$. Dokažite

$$\sigma(A)^k \subseteq \sigma\left(A^k\right),$$

gdje je

$$\sigma(A)^k = \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Dodatno, pokažite kontraprimjerom da obratna inkluzija ne mora vrijediti.

Rješenje: Neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada postoji $x \in V \setminus \{0\}$ takav da je $Ax = \lambda x$. Djelovanjem na ovu relaciju s A slijedi

$$A^2x = \lambda(Ax) = \lambda^2 x,$$

pa vidimo da je $\lambda^2 \in \sigma(A^2)$, uz isti pridruženi svojstveni vektor. Sada se lako indukcijom dovrši dokaz tražene inkluzije.

Kao kontraprimjer za obratnu inkluziju imamo slučaj operatora $R_{\frac{\pi}{2}} \in L(\mathbb{R}^2)$, rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$. Tada je $\sigma(R_{\frac{\pi}{2}}^2) = \sigma(R_\pi) = \{-1\}$, a s druge strane je $\sigma(R_{\frac{\pi}{2}})^2 = \emptyset$.

Napomenimo ovdje kako je ovaj slučaj specifičan za realne vektorske prostore (kao što je $\mathbb{R}^2$); u kompleksnim vektorskim prostorima će vrijediti jednakost skupova u iskazu zadatka. ■

Primijetimo i jedno zajedničko svojstvo svim prethodnim primjerima: ako je x svojstveni vektor pridružen λ, tada je taj isti x svojstveni vektor pridružen (redom po zadacima) svojstvenim vrijednostima $\alpha\lambda$, $\lambda - \alpha$, λ^{-1}, odnosno λ^k.

DZ 2.1. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, te $A, B \in L(V)$.

(a) Ako je x svojstveni vektor i od A i od B, je li x svojstveni vektor od AB ili od $A+B$?

(b) Ako je λ svojstvena vrijednost i od A i od B, je li λ svojstvena vrijednost od AB ili od $A+B$?

DZ 2.2. Odredite sve linearne operatore $A \in L(\mathbb{R}^2)$ kojima je $(1,0)$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 5.

DZ 2.3. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, $A \in L(V)$, te v_1 i v_2 svojstveni vektori pridruženi svojstvenim vrijednostima 1 i -0.2. Ako je $v = 3v_1 + 4v_2$, procijenite ponašanje $A^n v$ za velike vrijednosti n.

2.2 Karakteristični polinom

U ovom dijelu se vraćamo na pitanje određivanja spektra danog linearnog operatora. Navedimo neke ključne pojmove i rezultate.

Definicija 2.2. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

naziva se **karakteristični** ili **svojstveni** polinom matrice A.

Primjer 2.3. (1) Ako je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2$, tada je

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc) = \lambda^2 - (\mathrm{tr} A)\lambda + \det A.$$

(2) Općenitije, za $A \in M_n(\mathbb{F})$ je k_A zaista polinom, i to n–tog stupnja. Ako ga zapišemo u obliku

$$k_A(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

gdje su $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, tada neke od ovih skalara možemo i preciznije odrediti; vrijedi

$$a_n = (-1)^n, \qquad a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr} A, \qquad a_0 = \det A.$$

Za definiciju karakterističnog polinoma linearnog operatora ključna je sljedeća propozicija.

Propozicija 2.4. *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ slične matrice (tj. postoji $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ takva da je $B = SAS^{-1}$). Tada je $k_A = k_B$. Drugim riječima, slične matrice imaju iste karakteristične polinome.*

Kako su matrični prikazi $A(e)$ i $A(e')$ istog linearnog operatora A u različitim bazama (e) i (e') slične matrice (ovdje je $S = I_V(e, e')$), sljedeća je definicija dobra (odnosno, ne ovisi o odabiru baze).

Definicija 2.5. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $A \in L(V)$. **Karakteristični** polinom linearnog operatora A, k_A, definira se kao polinom

$$k_A(\lambda) = k_{A(e)}(\lambda),$$

gdje je (e) proizvoljna baza za V.

Zadatak 2.7. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $P \in L(V)$ projektor različit od $0, I$. Odredite karakteristični polinom od P.

Rješenje: Kako je $V = \operatorname{Im} P \dotplus \operatorname{Ker} P$, možemo uzeti bazu za V oblika

$$(e) = \{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\},$$

gdje je $\{e_1, \ldots, e_r\}$ baza za $\operatorname{Im} P$ i $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ baza za $\operatorname{Ker} P$. Tada je

$$P(e) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle odmah slijedi da je

$$k_P(\lambda) = \det(P(e) - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (1-\lambda)I_r & 0 \\ 0 & -\lambda I_{n-r} \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^r(-\lambda)^{n-r}.$$

■

Idući teorem daje najavljivani alternativni način za određivanje spektra linearnog operatora.

Teorem 2.6. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $A \in L(V)$ te $\lambda_0 \in \mathbb{F}$. Tada je*

$$\lambda_0 \in \sigma(A) \iff k_A(\lambda_0) = 0.$$

Posebno, ako je $\dim V = n$, onda A ima najviše n (različitih) svojstvenih vrijednosti.

Primijetimo ovdje i ključnu razliku između slučaja $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Iz osnovnog teorema algebre znamo da svaki nekonstantni polinom (s realnim ili kompleksnim koeficijentima) mora imati barem jednu nultočku u $\mathbb{C}$. Stoga, ukoliko je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, svaki $A \in L(V)$ ima neprazan spektar. S druge strane, za realne vektorske prostore postoje linearni operatori s praznim spektrom (na primjer, već navedena rotacija za kut $\varphi \neq 0, \pi$).

Zadatak 2.8. Neka je V vektorski prostor neparne dimenzije i $A \in L(V)$. Dokažite da je $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Rješenje: Ako je V kompleksni vektorski prostor, tvrdnja je očita.

Pretpostavimo da je V realni vektorski prostor. Neka je (e) proizvoljna baza za V. Kako je $A(e)$ realna matrica, slijedi da je $k_A = k_{A(e)}$ polinom s realnim koeficijentima, i to neparnog stupnja. Stoga on ima barem jednu realnu nultočku, pa je prema teoremu 2.6 spektar od A neprazan. ■

Zadatak 2.9. Neka je linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ dan svojim matričnim zapisom u nekoj bazi (e):

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite spektar od A.

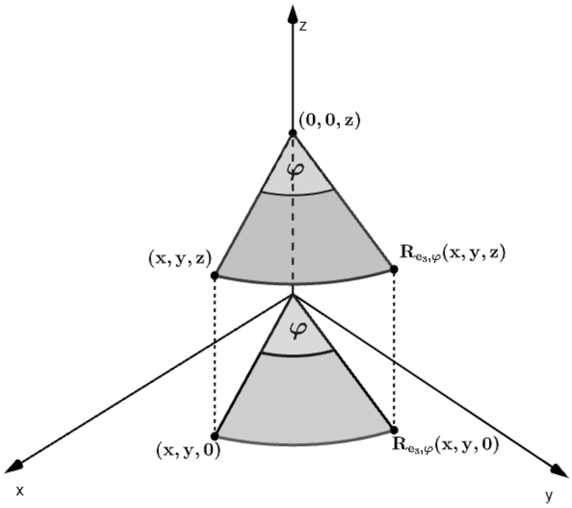
Rješenje: Odredimo prvo karakteristični polinom od A. Imamo

$$k_A(\lambda) = \det(A(e) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

Stoga je $\sigma(A) = \{1,2\}$. ■

Zadatak 2.10. Neka je $R_{e_3,\varphi} \in L(\mathbb{R}^3)$ operator rotacije prostora oko z–osi za kut $\varphi \in [0,2\pi)$. Odredite spektar od $R_{e_3,\varphi}$.

Rješenje:



Slika 3: Rotacija oko z–osi za kut φ

Operator $R_{e_3,\varphi}$ na kanonskoj bazi $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ djeluje na sljedeći način:

$$R_{e_3,\varphi}e_1 = (\cos\varphi)e_1 + (\sin\varphi)e_2, \quad R_{e_3,\varphi}e_2 = (-\sin\varphi)e_1 + (\cos\varphi)e_2, \quad R_{e_3,\varphi}e_3 = e_3.$$

Stoga je

$$R_{e_3,\varphi}(e) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je karakteristični polinom od $R_{e_3,\varphi}$

$$k_{R_{e_3,\varphi}}(\lambda) = (1-\lambda)\left((\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi\right).$$

Sada lako vidimo da je

$$\sigma(R_{e_3,\varphi}) = \begin{cases} \{1\}, & \varphi \neq \pi \\ \{-1,1\}, & \varphi = \pi \end{cases}$$

■

DZ 2.4. Neka je $A \in M_n$. Dokažite da za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$k_{A^2}(\lambda^2) = k_A(\lambda)k_A(-\lambda).$$

2.3 Svojstveni potprostori i dijagonalizacija linearnog operatora

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor, $A \in L(V)$ i $\lambda \in \sigma(A)$. Označimo s $V_A(\lambda)$ skup svih svojstvenih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ zajedno s nulvektorom. Kako je

$$V_A(\lambda) = \{x \in V : Ax = \lambda x\} = \mathrm{Ker}(A - \lambda I),$$

slijedi da je $V_A(\lambda) \leq V$. Ovaj potprostor nazivamo **svojstveni potprostor** linearnog operatora A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Njegovu dimenziju ćemo zvati **geometrijska kratnost** svojstvene vrijednosti λ, te označavati s $g(\lambda)$.

Primijetimo kako je za proizvoljan $\lambda \in \mathbb{F}$ skup $V_A(\lambda)$ definiran kao $V_A(\lambda) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I)$ također potprostor od V; spektar od A čine upravo oni skalari za koje je taj potprostor različit od $\{0_V\}$ (odnosno $g(\lambda) \geq 1$).

Opišimo postupak određivanja svojstvenih potprostora za $A \in L(V)$. Neka je (e) neka baza za V. Tada je

$$x \in V_A(\lambda) \iff (A - \lambda I)x = 0 \iff ((A - \lambda I)x)(e) = 0 \iff (A(e) - \lambda I)x(e) = 0.$$

Dakle, ukoliko odredimo Ω, prostor svih rješenja homogenog sustava $(A(e) - \lambda I)X = 0$, tada je

$$V_A(\lambda) = \varphi^{-1}(\Omega),$$

gdje je $\varphi : V \to M_{n,1}$ izomorfizam vektorskih prostora dan s $\varphi(x) = x(e)$.

Primjer 2.7. (a) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i $P \in L(V)$ projektor različit od $0, I$. Tada je $\sigma(P) = \{0, 1\}$. Po definiciji je $V_P(0) = \mathrm{Ker}\, P$ i onda $g(0) = d(P)$. S druge strane, kako je $I - P$ projektor na $\mathrm{Ker}\, P$ u smjeru $\mathrm{Im}\, P$, slijedi da je $V_P(1) = \mathrm{Ker}(P - I) = \mathrm{Im}\, P$ i onda $g(1) = r(P)$.

(b) Neka je $\varphi \in [0, 2\pi)$ te $R_{e_3,\varphi} \in L(\mathbb{R}^3)$ operator rotacije oko z–osi za kut φ. Razlikujemo slučajeve:

- Ako je $\varphi = 0$, tada je $R_{e_3,0} = I$, pa je $V_{R_{e_3,0}}(1) = \mathbb{R}^3$.
- Ako je $\varphi = \pi$, tada za kanonsku bazu (e) imamo

$$R_{e_3,\pi}(e) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

  odakle je očito

$$V_{R_{e_3,\pi}}(-1) = [\{e_1, e_2\}] \quad \text{i} \quad V_{R_{e_3,\pi}}(1) = [\{e_3\}].$$

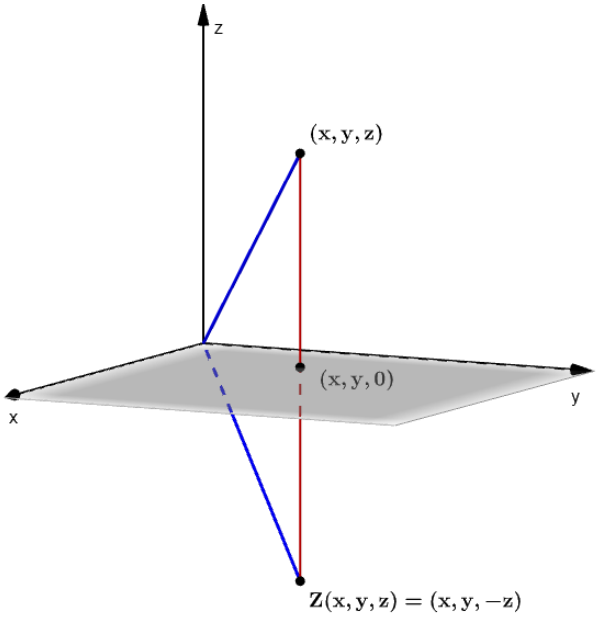
- Ako je $\varphi \neq 0, \pi$, tada je $\sigma(R_{e_3,\varphi}) = \{1\}$ i jedini svojstveni potprostor je $V_{R_{e_3,\varphi}}(1) = [\{e_3\}]$.

(c) Neka je Z operator zrcaljenja s obzirom na xy–ravninu. Tada je

$$Z(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

odakle očito imamo $\sigma(Z) = \{-1, 1\}$ te

$$V_Z(-1) = [\{e_3\}] \quad \text{i} \quad V_Z(1) = [\{e_1, e_2\}].$$



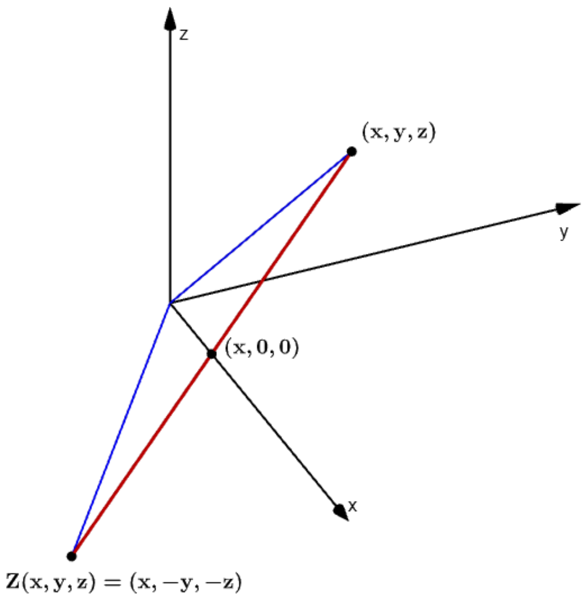
Slika 4: Zrcaljenje s obzirom na xy–ravninu

(d) Neka je sada Z operator zrcaljenja s obzirom na x–os. Tada je

$$Z(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

odakle očito imamo $\sigma(Z) = \{-1, 1\}$ te

$$V_Z(-1) = [\{e_2, e_3\}] \quad \text{i} \quad V_Z(1) = [\{e_1\}].$$



Slika 5: Zrcaljenje s obzirom na x–os

Zadatak 2.11. Odredite svojstvene potprostore linearnog operatora A iz zadatka 2.9.

Rješenje: Već smo odredili spektar danog operatora: $\sigma(A) = \{1,2\}$. Odredimo prvo $V_A(1)$. Za to je potrebno riješiti homogeni sustav čija je matrica

$$A(e) - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje (e) ponovno označava kanonsku bazu za $\mathbb{R}^3$. Rješenje ovog sustava je potprostor $\left[\left\{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}\right]$, pa slijedi da je

$$V_A(1) = [\{(1,1,1)\}].$$

Za određivanje $V_A(2)$ je potrebno riješiti homogeni sustav čija je matrica

$$A(e) - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovdje lako dobivamo da je rješenje potprostor $\left[\left\{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T\right\}\right]$, pa slijedi da je

$$V_A(2) = [\{(0,0,1)\}].$$

■

Vratimo se sada na odnos svojstvenih vektora pridruženih različitim svojstvenim vrijednostima. Prvi rezultat dan je idućom propozicijom.

Propozicija 2.8. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $A \in L(V)$. Ako su $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ međusobno različite svojstvene vrijednosti od A te $x_1, \ldots, x_k$ redom pridruženi svojstveni vektori, tada je $\{x_1, \ldots, x_k\}$ linearno nezavisan skup.*

Zadatak 2.12. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i $A \in L(V)$. Neka su v_1 i v_2 svojstveni vektori od A pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2. Dokažite da niti jedan vektor oblika $\alpha v_1 + \beta v_2$, gdje su $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$, ne može biti svojstveni vektor od A.

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, to jest da postoje $\alpha, \beta \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ takvi da je vektor $\alpha v_1 + \beta v_2$ svojstveni vektor za A, te neka je on pridružen svojstvenoj vrijednosti μ. Dakle, vrijedi

$$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \mu(\alpha v_1 + \beta v_2),$$

odnosno

$$\alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2 = \mu\alpha v_1 + \mu\beta v_2.$$

Prema prethodnoj propoziciji, skup $\{v_1, v_2\}$ je linearno nezavisan, pa slijedi da je

$$\alpha\lambda_1 = \mu\alpha \quad \text{i} \quad \beta\lambda_2 = \mu\beta,$$

odakle, zbog $\alpha, \beta \neq 0$ slijedi $\lambda_1 = \mu = \lambda_2$, što je kontradikcija s pretpostavkom. Slijedi tvrdnja. ■

Zadatak 2.13. Neka su zadani vektori $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1,1)$ i $v_3 = (1,2,2,1)$ u $\mathbb{R}^4$. Postoji li linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^4)$ sa sljedećim svojstvom:

(a) v_1 i v_2 su svojstveni vektori od A pridruženi redom svojstvenim vrijednostima 1 i 2?

(b) v_1, v_2 i v_3 su svojstveni vektori od A pridruženi redom svojstvenim vrijednostima 1, 2 i 3?

(c) v_1, v_2 i v_3 su svojstveni vektori od A?

Rješenje:

(a) Da. Važno je uočiti da je skup $\{v_1, v_2\}$ linearno nezavisan. Tada ga proširimo do baze za $\mathbb{R}^4$, na primjer, vektorima $u_1 = (1,0,0,0)$ i $u_2 = (0,1,0,0)$. Definiramo A djelovanjem na bazi $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ kao:

$$Av_1 = v_1, \quad Av_2 = 2v_2, \quad Au_1 = Au_2 = 0,$$

te proširimo po linearnosti.

(b) Ne, jer svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima moraju činiti linearno nezavisan skup, a skup $\{v_1, v_2, v_3\}$ je linearno zavisan (očito je $v_3 = v_1 + v_2$).

(c) Zbog prethodnog zadatka je nužno da vektori v_1 i v_2 budu pridruženi istoj svojstvenoj vrijednosti. Neka je ta svojstvena vrijednost jednaka λ. Tada je $A = \lambda I$ primjer traženog linearnog operatora.

■

Spomenimo i kako vrijedi više od same linearne nezavisnosti svojstvenih vektora pridruženih različitim svojstvenim vrijednostima.

Propozicija 2.9. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, $A \in L(V)$ te $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Tada je unija proizvoljno odabranih baza za potprostore $V_A(\lambda_1), \ldots, V_A(\lambda_k)$ linearno nezavisan skup.*

Osim geometrijske kratnosti svojstvene vrijednosti λ linearnog operatora $A \in L(V)$, bitnu ulogu igra i **algebarska kratnost** svojstvene vrijednosti, koju definiramo kao kratnost nultočke λ karakterističnog polinom k_A, te označavamo s $a(\lambda)$.

Ako označimo $n = \dim V$ te $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, tada je

$$\sum_{i=1}^{k} a(\lambda_i) \leq n.$$

Dodatno, ako je V kompleksan vektorski prostor, vrijedi jednakost.

Odnos algebarske i geometrijske kratnosti dan je idućim rezultatom.

Propozicija 2.10. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada za sve $\lambda \in \sigma(A)$ vrijedi $g(\lambda) \leq a(\lambda)$.*

Zadatak 2.14. Odredite svojstvene vrijednosti, njihove algebarske i geometrijske kratnosti te pripadne svojstvene potprostore linearnog operatora $A \in L(\mathbb{F}^n)$ zadanog s

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i \right).$$

Rješenje: Očito je $\operatorname{Im} A = [\{(1, \ldots, 1)\}]$, dakle $r(A) = 1$, odakle, prema teoremu o rangu i defektu, slijedi $d(A) = n - 1$. To znači da je 0 svojstvena vrijednost od A i $g(0) = \dim \operatorname{Ker}(A) = n - 1$. Lako dobijemo da je

$$V_A(0) = \operatorname{Ker} A = [\{e_1 - e_j : j = 2, \ldots, n\}].$$

Nadalje, lako je uočiti da vrijedi

$$A(1, \ldots, 1) = n(1, \ldots, 1),$$

dakle, $(1, \ldots, 1)$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti n. Tada je $a(n) \geq g(n) \geq 1$. Kako je

$$n \leq g(0) + g(n) \leq a(0) + a(n) \leq n$$

slijedi $a(n) = g(n) = 1$ i zato je $V_A(n) = [\{(1,\ldots,1)\}]$. ■

Primijetimo sljedeće: ukoliko u prethodnom zadatku uzmemo bazu $(f) = \{f_1,\ldots,f_n\}$, gdje su

$$f_n = (1,\ldots,1), \qquad f_j = e_1 - e_j, \quad j = 1,\ldots,n-1,$$

tada je matrični prikaz operatora A u bazi (f) dijagonalna matrica

$$A(f) = \mathrm{diag}(0,0,\ldots,0,n).$$

Jedno od najvažnijih pitanja ovog dijela je upravo pronalaženje baze u kojoj operator ima dijagonalni oblik, odnosno karakterizacija onih linearnih operatora za koje je to moguće. Pritom ćemo za linearni operator $A \in L(V)$ za koji postoji baza (f) za V takva da je $A(f)$ dijagonalna matrica reći da je **dijagonalizibilan**. Pritom je $A(f)$ dijagonalna matrica sa svojstvenim vrijednostima na dijagonali, te se svaka svojstvena vrijednost pojavljuje onoliko puta kolika je njena algebarska kratnost. Nadalje, baza (f) se sastoji od odgovarajućih svojstvenih vektora. Preciznije, ako je $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$, tada uzimanjem unije proizvoljno odabranih baza za svojstvene potprostore $V_A(\lambda_1),\ldots,V_A(\lambda_k)$ dobivamo (jednu) takvu bazu (f).

Navodimo sada rezultate koji daju karakterizaciju dijagonalizibilnih linearnih operatora.

Teorem 2.11. *Neka je V vektorski prostor dimenzije n, $A \in L(V)$ te $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$. Tada je A dijagonalizibilan ako i samo ako vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) = n.$$

U tom slučaju je baza u kojoj A ima dijagonalni matrični prikaz jednaka uniji baza za $V_A(\lambda_i), i = 1,\ldots,k$.

Teorem 2.12. *Neka je V kompleksan konačnodimenzionalni vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je A dijagonalizibilan ako i samo ako za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ vrijedi $g(\lambda) = a(\lambda)$.*

Istaknimo bitnu razliku između prethodna dva teorema: ako je V *kompleksan* vektorski prostor, tada je

$$\sum_{\lambda\in\sigma(A)} g(\lambda) = n \iff g(\lambda) = a(\lambda) \text{ za sve } \lambda \in \sigma(A).$$

Međutim, ako je V realan vektorski prostor, tada uvjet $g(\lambda) = a(\lambda)$ može biti zadovoljen za sve $\lambda \in \sigma(A)$, a da operator pritom nije dijagonalizibilan. Primjerice, operator rotacije oko z–osi za kut $\varphi \neq 0,\pi$ ima spektar $\sigma(R_{e_3,\varphi}) = \{1\}$, te je $a(1) = g(1) = 1$. Međutim, taj operator nije dijagonalizibilan s obzirom da je

$$\sum_{\lambda\in\sigma(R_{e_3,\varphi})} g(\lambda) = 1 < 3.$$

Dakle, u realnom slučaju, uvjet

$$g(\lambda) = a(\lambda) \text{ za sve } \lambda \in \sigma(A)$$

je nužan, ali nije dovoljan za dijagonalizibilnost.

Navedimo i jedan korolar.

Korolar 2.13. *Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Ako A ima n različitih svojstvenih vrijednosti, tada je A dijagonalizabilan.*

Zadatak 2.15. Linearni operator $A \in L(V)$ zadan je svojim matričnim zapisom u nekoj bazi (e) za V s

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ispitajte je li A dijagonalizibilan.

Rješenje: Karakteristični polinom od A je

$$k_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2,$$

pa je $\sigma(A) = \{1,2\}$. Algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti su

$$a(1) = 2, \quad a(2) = 1.$$

Nadalje, imamo

$$g(1) = d(A-I) = d\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1,$$

pa kako je već $g(1) \neq a(1)$, zaključujemo da A nije dijagonalizibilan. ■

Zadatak 2.16. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te $A \in L(V)$ takav da je $k_A(\lambda) = (\lambda^2-1)(\lambda^2+1)(\lambda-3)^2$.

(a) Odredite $\dim V$ i pokažite da je A izomorfizam.

(b) Odredite $r(A+5I)$ i $r(A-I)$.

(c) Ako je $\operatorname{Ker}(A-3I)$ dvodimenzionalan potprostor od V, možemo li zaključiti da se A može dijagonalizirati?

Rješenje:

(a) Kako je $\deg k_A = 6$, slijedi da je $\dim V = 6$. Nadalje, kako je $k_A(0) \neq 0$, slijedi da 0 nije u spektru od A, pa je A izomorfizam.

(b) Kako 5 nije u spektru od A, slijedi da je $A+5I$ izomorfizam, pa je $r(A+5I) = 6$. Nadalje, kako je $1 \in \sigma(A)$ i $a(1) = 1$, slijedi da je $g(1) = 1$, pa je $r(A-I) = 6 - d(A-I) = 6 - g(1) = 5$.

(c) Vrijedi $g(3) = \dim \operatorname{Ker}(A-3I) = 2$. Razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, tada odmah vidimo da je $\sigma(A) = \{\pm 1, \pm i, 3\}$, te je uz pretpostavku zadatka $a(3) = g(3)$. S druge strane, kako sve preostale svojstvene vrijednosti imaju algebarsku kratnost 1, slijedi da su i njihove geometrijske kratnosti također 1, pa je u ovom slučaju operator dijagonalizibilan.
- Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tada iz k_A imamo da je $\sigma(A) = \{\pm 1, 3\}$. Međutim, tada je

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} a(\lambda) = 4 < 6,$$

pa takav operator nije dijagonalizibilan.

■

Zadatak 2.17. Neka je dan operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi dan s

$$A(e) = \begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{bmatrix}.$$

Odredite sve vrijednosti $k \in \mathbb{R}$ za koje operator nije dijagonalizabilan.

Rješenje: Dobijemo

$$k_A(\lambda) = ... = \lambda(k+3-\lambda)(\lambda-(2k+3))$$

iz čega slijedi da su svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = k+3, \quad \lambda_3 = 2k+3.$$

Ako imamo tri različite svojstvene vrijednosti, A će biti dijagonalizabilan. Zato razmatramo jedino slučajeve kada nemamo tri različite svojstvene vrijednosti:

- Neka je $k = 0$. Tada je $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, pa A neće biti dijagonalizabilan ako i samo ako je $g(3) < a(3) = 2$, odnosno $g(3) = 1$. (Za svojstvene vrijednosti čija je algebarska kratnost jednaka 1 je automatski zadovoljeno da se algebarska i geometrijska kratnost podudaraju).

  Za $k = 0$ je $A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, odakle slijedi $g(3) = d(A(e)-3I) = 1$. Slijedi da A nije dijagonalizabilan za $k = 0$.

- Neka je $k = -3$. Tada je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ i $\lambda_3 = -3$, pa A neće biti dijagonalizabilan ako i samo ako je $g(0) < a(0) = 2$, odnosno $g(0) = 1$.

  Za $k = -3$ je $A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, pa je $g(0) = d(A(e)) = 2$, što znači da je u ovom slučaju operator A dijagonalizabilan.

- Neka je $k = -\frac{3}{2}$. Tada je $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ i $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, pa A neće biti dijagonalizabilan ako i samo ako je $g(0) < a(0) = 2$, odnosno $g(0) = 1$.

  Za $k = -\frac{3}{2}$ je $A(e) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, pa je $g(0) = d(A(e)) = 1$. Dakle, A nije dijagonalizabilan za $k = -\frac{3}{2}$.

Prema tome, A nije dijagonalizabilan ako i samo ako je $k = 0$ ili $k = -\frac{3}{2}$. ■

Zadatak 2.18. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ dijagonalizabilan linearni operator. Ako je $\sigma(A) = \{1, -1\}$ tada je $A^{-1} = A$. Dokažite.

Rješenje: Prvo uočimo da je A izomorfizam jer $0 \notin \sigma(A)$.

Kako je A dijagonalizabilan linearni operator, postoji baza (e) za V takva da je $A(e)$ dijagonalna matrica. Kako se na dijagonali od $A(e)$ nalaze samo 1 i -1, slijedi da je $(A(e))^{-1} = A(e)$. Sada je

$$A^{-1}(e) = (A(e))^{-1} = A(e),$$

odakle slijedi $A^{-1} = A$. ■

DZ 2.5. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ dijagonalizabilan linearni operator.

(a) Ako je $\sigma(A) = \{0, 1\}$, dokažite da je tada $A^2 = A$.

(b) Ako je $\sigma(A) = \{0, 1, -1\}$, dokažite da je tada A^2 projektor.

(c) Ako je $\sigma(A) = \{1, -1\}$, odredite A^k za $k \in \mathbb{N}$.

2.4 Dijagonalizacija matrice

Definicija 2.14. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je **svojstvena vrijednost matrice** A ako postoji $X \in M_{n1}(\mathbb{F}), X \neq 0$ takav da vrijedi

$$AX = \lambda X.$$

Ovakav vektor X se naziva **svojstveni vektor matrice** A (pridružen svojstvenoj vrijednosti λ).

Spektar matrice A, u oznaci $\sigma(A)$, je skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A.

Ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ i $L_A \in L(M_{n,1}(\mathbb{F}))$ linearni operator definiran s $L_A X = AX$, tada za kanonsku bazu (e) za $M_{n,1}(\mathbb{F})$ vrijedi $L_A(e) = A$. Odavde se dokaže da se problemi određivanja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora za matricu A podudaraju s istovrsnim problemima za linearni operator L_A. Posebno, kako je $k_{L_A} = k_A$, slijedi da je $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako je $k_A(\lambda) = 0$.

Zadatak 2.19. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna matrica. Dokažite da je $\det A$ jednaka produktu, a $\operatorname{tr} A$ sumi svojstvenih vrijednosti od A (uključujući njihove kratnosti).

Rješenje: Kako je $A \in M_n(\mathbb{C})$, njen karakteristični polinom se može faktorizirati kao

$$k_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda),$$

pri čemu su $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti (među kojima može biti i istih). Tada je

$$\det A = k_A(0) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Znamo da je $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A$ koeficijent uz λ^{n-1} u karakterističnom polinomu pa je

$$(-1)^{n-1} \operatorname{tr} A = (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right),$$

to jest, $\operatorname{tr} A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. ■

Zadatak 2.20. Neka je $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ takva da je $\det A < 0$ (A je reda $2n$). Dokažite da A ima barem dvije realne svojstvene vrijednosti.

Rješenje: Promatramo A kao element prostora $M_{2n}(\mathbb{C})$ te zapišemo njen karakteristični polinom u obliku

$$k_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{2n} (\lambda_k - \lambda), \quad \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Kako je A realna matrica, k_A ima realne koeficijente, pa sve kompleksne (nerealne) svojstvene vrijednosti dolaze u konjugiranim parovima, tj. za $\lambda_0 \in \sigma(A)$ je i $\overline{\lambda_0} \in \sigma(A)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lambda_{n+k} = \overline{\lambda_k}$ za sve $k = 1, \ldots, n$. Odavde slijedi da je broj kompleksnih svojstvenih vrijednosti za A paran.

Kada A ne bi imala niti jednu realnu svojstvenu vrijednost, tada bi iz prethodnog zadatka slijedilo

$$\det A = \prod_{k=1}^{2n} \lambda_k = \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \geq 0,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom zadatka. Prema tome, A ima barem jednu svojstvenu vrijednost u $\mathbb{R}$. Kada bi A imala točno jednu realnu svojstvenu vrijednost (računajući kratnost), tada bi broj kompleksnih svojstvenih vrijednosti bio neparan, što nije slučaj. ■

Zadatak 2.21. Neka su $A,B \in M_n(\mathbb{F})$. Dokažite da je $k_{AB} = k_{BA}$ i $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

Rješenje: Dokazali smo da za svake dvije matrice $T,S \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi

$$\det(I+ST) = \det(I+TS).$$

Neka je $\lambda \neq 0$. Primjenom gornje tvrdnje na matrice $-\frac{1}{\lambda}A$ i B dobivamo

$$\det\left(I - \frac{1}{\lambda}AB\right) = \det\left(I - \frac{1}{\lambda}BA\right)$$

odakle za svaki $\lambda \neq 0$ vrijedi

$$k_{AB}(\lambda) = \det(AB - \lambda I) = (-\lambda)^n \det\left(I - \frac{1}{\lambda}AB\right) = (-\lambda)^n \det\left(I - \frac{1}{\lambda}BA\right) = \det(BA - \lambda I) = k_{BA}(\lambda).$$

Dakle, polinomi k_{AB} i k_{BA} se podudaraju u beskonačno točaka, pa su oni jednaki. ■

Zadatak 2.22. Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor te $A,B \in L(V)$. Dokažite da je $k_{AB} = k_{BA}$. Posebno, vrijedi i $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

Rješenje: Neka je (e) proizvoljna baza za V. Prema prethodnom zadatku je $k_{A(e)B(e)} = k_{B(e)A(e)}$, pa je

$$k_{AB} = k_{(AB)(e)} = k_{A(e)B(e)} = k_{B(e)A(e)} = k_{(BA)(e)} = k_{BA}.$$

■

Kao što smo na prirodan način definirali svojstvene vrijednosti i pridružene svojstvene vektore za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$, možemo i dati definiciju dijagonalizibilnosti matrice.

Definicija 2.15. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da se matrica A **može dijagonalizirati** ili da je **dijagonalizabilna**, ako postoji regularna matrica $S \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $S^{-1}AS$ dijagonalna matrica.

Propozicija 2.16. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ dijagonalizabilna matrica, te $S \in M_n(\mathbb{F})$ regularna matrica takva da je $D = S^{-1}AS$ dijagonalna matrica. Neka su na dijagonali matrice D redom skalari $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Tada su $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A, a stupci $S_1, \dots, S_n$ matrice S su redom pridruženi svojstveni vektori.*

Uočimo da, ukoliko je matrica A dijagonalizabilna, matrice D i S nisu jedinstvene: uvijek možemo promijeniti poredak svojstvenih vrijednosti u dijagonalnoj matrici D (što će rezultirati i odgovarajućom promjenom u poretku stupaca matrice S) ili odabrati neke druge svojstvene vektore.

Kao i kod dijagonalizacije linearnog operatora, dijagonalizacija matrice bit će moguća ukoliko postoji baza sastavljena od svojstvenih vektora matrice. Vrijede analogne tvrdnje kao i kod dijagonalizacije linearnog operatora (preko geometrijskih i algebrarskih kratnosti).

Zadatak 2.23. Dijagonalizirajte, ako je moguće, matricu $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ u $M_2(\mathbb{R})$ i u $M_2(\mathbb{C})$.

Rješenje: Dobijemo da je $k_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$.

Kako k_A nema realnih nultočki, A se ne može dijagonalizirati u $M_2(\mathbb{R})$.

Promatrajmo sada A kao element $M_2(\mathbb{C})$. Tada je $\sigma(A) = \{i, -i\}$. Kada matrica reda 2 ima dvije različite svojstvene vrijednosti, ona je dijagonalizabilna, dakle A se može dijagonalizirati u $M_2(\mathbb{C})$. Sada izračunamo da je $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti i, te da je $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $-i$. Slijedi da za

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

vrijedi $A = SDS^{-1}$. ■

Zadatak 2.24. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ 6 & 6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati. Zatim za najmanji $x \in \mathbb{N}$ za koji je matricu moguće dijagonalizirati pronađite pripadne S i D takve da je $A = SDS^{-1}$.

Rješenje: Karakteristični polinom matrice A je

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2(\lambda - x).$$

Sada razlikujemo tri slučaja:

- $x \notin \{1, -2\}$

  U ovom slučaju je $\sigma(A) = \{1, -2, x\}$ te je $a(1) = 1$, $a(-2) = 2$ i $a(x) = 1$. Kako je geometrijska kratnost manja ili jednaka algebarskoj, vrijedi $g(1) = a(1) = 1$ i $g(x) = a(x) = 1$. Trebamo još odrediti $g(-2)$. Vrijedi $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 = a(-2)$. Dakle, u ovom slučaju se matrica može dijagonalizirati.

- $x = -2$

  Sada je $\sigma(A) = \{1, -2\}$, $a(1) = 1$ i $a(-2) = 3$. Vrijedi $g(1) = a(1) = 1$, dok je $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 < a(-2)$. U ovom slučaju se matrica ne može dijagonalizirati.

- $x = 1$

  Ovdje je $\sigma(A) = \{1, -2\}$, $a(1) = 2$ i $a(-2) = 2$. Vrijedi $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 = a(-2)$, $g(1) = d(A - I) = 4 - r(A - I) = 2 = a(1)$. U ovom slučaju se matrica može dijagonalizirati.

Dakle, matrica A se može dijagonalizirati ako i samo ako je $x \neq -2$. Provedimo sada dijagonalizaciju za $x = 1$. Potrebne su nam baze za $V_A(1)$ i $V_A(-2)$, gdje standardnim načinom dobijemo

$$V_A(1) = [\{(1, -1, 0, 0), (2, 0, 1, 2)\}], \qquad V_A(-2) = [\{(1, 0, -3, 0), (2, 0, 0, 3)\}].$$

Dakle, ako stavimo

$$D = \operatorname{diag}(1, 1, -2, -2), \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

tada je $A = SDS^{-1}$. ■

Zadatak 2.25. Odredite sve $b, c, d \in \mathbb{R}$ za koje se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 1 & d & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati. Zatim odredite A^{20} za $b = c = d = 0$.

Rješenje: Prvo dobijemo da je

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \cdots = (1-\lambda)^2(d-\lambda).$$

Imamo dva slučaja:

- Ako je $d = 1$, tada je $a(1) = 3$. S druge strane je

$$g(1) = d(A-I) = d\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \leq 2,$$

  pa vidimo da A nije dijagonalizibilna u ovom slučaju.

- Ako je $d \neq 1$ tada je $a(1) = 2$ i $a(d) = 1$. Stoga je posebno i $a(d) = g(d) = 1$. Matrica A će biti dijagonalizabilna ako i samo ako je $g(1) = a(1) = 2$. Kako je

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & d-1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  vidimo da je $d(A-I) = 2$ ako i samo ako je $c = 0$.

Prema tome, matrica A se može dijagonalizirati ako i samo ako je $b \in \mathbb{R}$, $c = 0$ i $d \neq 1$.

Odredimo sada A^{20} u slučaju $d = b = c = 0$, tj.

$$A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{20}.$$

Kako je u ovom slučaju matrica A dijagonalizibilna, postoji regularna matrica S takva da je $A = SDS^{-1}$, gdje je $D = \text{diag}(1,1,0)$. Tada je

$$A^{20} = (SDS^{-1})^{20} = (SDS^{-1})(SDS^{-1})\ldots(SDS^{-1}) = SD^{20}S^{-1} = S\,\text{diag}(1^{20}, 1^{20}, 0^{20})S^{-1} = SDS^{-1} = A.$$

■

Zadatak 2.26. Neka je $A \in M_n$ dijagonalizabilna matrica takva da je $\lambda^4 = 3\lambda^2$ za svaki $\lambda \in \sigma(A)$. Dokažite da je tada $A^4 = 3A^2$.

Rješenje: Neka su S regularna i D dijagonalna matrica takve da je $A = SDS^{-1}$. Kako su na dijagonali od D svojstvene vrijednosti od A, iz pretpostavke zadatka slijedi da je $D^4 = 3D^2$. Sada je

$$A^4 = SD^4S^{-1} = 3SD^2S^{-1} = 3A^2.$$

■

DZ 2.6. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(a) Može li se A dijagonalizirati? Ako da, nađite regularnu matricu S i dijagonalnu matricu D takve da je $S^{-1}AS = D$.

(b) Odredite A^{30}.

Rješenje:

(a) Dobijemo $k_A(\lambda) = ... = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$, iz čega slijedi $\sigma(A) = \{1,3\}$ te $a(1) = 2$ i $a(3) = 1$.
Prvo računamo $V_A(1)$:

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(1) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \Rightarrow g(1) = 2.$$

Sada za $V_A(3)$ imamo:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(1) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \Rightarrow g(3) = 1.$$

To znači da je A dijagonalizabilna matrica i da za

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

vrijedi $S^{-1}AS = D$.

(b) Računamo:

$$A^{30} = SD^{30}S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{30} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 0.5+0.5\cdot 3^{30} & 0 & -0.5+0.5\cdot 3^{30} \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5+0.5\cdot 3^{30} & 0 & 0.5+0.5\cdot 3^{30} \end{bmatrix}.$$

■

DZ 2.7. Neka su $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Pokažite da su A i B dijagonalizabilne matrice. Jesu li dijagonalizabilne i matrice $A+B$ i AB?

DZ 2.8. Neka su dane matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je $k_A = k_B$, da je A dijagonalizabilna, a B nije.

DZ 2.9. Neka je $A \in M_n$ dijagonalizabilna matrica. Dokažite da su i sljedeće matrice dijagonalizabilne:

(a) A^k za $k \in \mathbb{N}$

(b) $A^3 + A^2 + I$

(c) αA za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $T^{-1}AT$ za svaku regularnu matricu T

(e) $\alpha I + A$ za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$

DZ 2.10. Neka su su B i C kvadratne matrice, te A blok-matrica dana kao:

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

(a) Pokažite da je $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)k_C(\lambda)$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Ako su X i Y redom svojstveni vektori matrica B i C, pokažite da su vektori:

$$\begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix}$$

svojstveni vektori matrice A.

2.5 Matrični polinomi

Definicija 2.17. Neka je $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ proizvoljni polinom u jednoj varijabli x s koeficijentima iz $\mathbb{F}$ i neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Tada pod matričnim polinomom podrazumijevamo

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Uočimo da potencije kvadratne matrice međusobno komutiraju pa s matričnim polinomima možemo postupati kao s polinomima u varijabli koja je element polja $\mathbb{F}$. Npr. vrijede identiteti kao što su

$$A^2 - I = (A-I)(A+I) \quad \text{ili} \quad (A+I)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k.$$

Naravno, sličan zaključak ne možemo provesti za matrične poliome u više varijabli. Primjerice, kako općenito je $AB \neq BA$, to je i

$$A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B).$$

Zadatak 2.27. Neka je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $A^k = 0$ i $A^{k-1} \neq 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Dokažite da je matrica $I - A$ regularna i nađite $(I-A)^{-1}$.

Rješenje: Pogledajmo polinom $p(A) = \sum_{j=0}^{k-1} A^j$. Tada je

$$\begin{aligned} (I-A)p(A) &= (I-A)\left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} A^j - \sum_{j=1}^{k} A^j \\ &= I - A^k = I. \end{aligned}$$

Prema tome, $I - A$ je regularna matrica i $(I-A)^{-1} = \sum_{j=1}^{k-1} A^j$. ∎

Teorem 2.18. *(Hamilton-Cayley) Svaka kvadratna matrica poništava svoj svojstveni polinom, tj. vrijedi* $k_A(A) = 0$.

Hamilton-Cayleyjev teorem nam daje još jednu metodu invertiranja regularnih matrica. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ regularna matrica te $k_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ njen karakteristični polinom. Prema Hamilton-Cayleyjevom teoremu je $k_A(A) = 0$, tj.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k A^k = 0.$$

Kako je A regularna matrica, vrijedi $a_0 = \det A \neq 0$, pa je

$$I = -\frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k A^k\right) = A\left(-\frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} A^k\right)\right),$$

Iz ovoga slijedi da je

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} A^k\right).$$

Zadatak 2.28. Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Prvo odredimo karakteristični polinom dane matrice:

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

Prema Hamilton-Cayleyjevom teoremu i raspravi koja je prethodila ovom zadatku imamo

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 4A + 5I\right).$$

Kako je $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & -2 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, dobivamo

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}\right).$$

■

Zadatak 2.29. Neka je $A \in M_n$ proizvoljna matrica i

$$M = \left[\left\{A^k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}\right].$$

Dokažite da je $\dim M \leq n$.

Rješenje: Prema Hamilton-Cayleyjevom teoremu, $A^n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$ za neke skalare $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, dakle,

$$A^n \in \left[\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}\right].$$

Nadalje,

$$A^{n+1} = A \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^{k+1} \in \left[\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}\right].$$

Na isti način dobijemo da su sve potencije od A sadržane u prostoru $\left[\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}\right]$, čija je dimenzija manja ili jednaka n.

■

DZ 2.11. Odredite karakteristični polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(rj. $k_A(\lambda) = (3-\lambda)(6-\lambda^2)$).

DZ 2.12. Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem izrazite A^{-1} u obliku $p(A)$ za neki polinom p, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

(rj. $A^{-1} = \frac{1}{32}\left(A^4 - 10A^3 + 40A^2 - 80A + 80I\right)$)

DZ 2.13. Neka je $A \in M_2(\mathbb{F})$, $A \neq \alpha I$, za svaki $\alpha \neq 0$. Dokažite da je A singularna ako i samo ako je $A^2 = \beta A$ za neki $\beta \in \mathbb{F}$.

Rješenje: Za karakteristični polinom od A imamo

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (\operatorname{tr} A)\,\lambda + \det A.$$

Po Hamilton-Cayleyjevom teoremu je $k_A(A) = A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I = 0$, to jest $A^2 = (\operatorname{tr} A)A - (\det A)IA$.

Pretpostavimo da je A singularna matrica. Tada je $\det A = 0$ i zato $A^2 = (\operatorname{tr} A)A$, što daje tvrdnju.

Obratno, neka je $A^2 = \beta A$ za neki $\beta \in \mathbb{F}$. Kada bi A bila regularna onda bismo, množeći prethodnu jednakost s A^{-1}, dobili $A = \beta I$, što po pretpostavci zadatka nije slučaj. Slijedi da je A singularna. ■

Uočimo da iz uvjeta prethodnog zadatka vrijedi ako je $A^2 = \beta A$ i $A \neq 0$, onda je $\beta = \operatorname{tr} A$ (raspišite). Dakle, slučaj $\operatorname{tr} A \neq \beta$ je moguć samo za $A = 0$.

DZ 2.14. Neka je $A \in M_n$ proizvoljna regularna matrica i

$$M = \left[\left\{A^k : k \in \mathbb{Z}\right\}\right].$$

(Pritom, ako je $k < 0$ tada je $A^k = (A^{-1})^{-k}$; na primjer, $A^{-5} = (A^{-1})^5$). Što možete reći o $\dim M$?

DZ 2.15. Neka su A i B slične matrice i p polinom. Dokažite da je $p(A) = 0$ ako i samo ako je $p(B) = 0$.

Rješenje: Neka je S regularna matrica takva da je $B = S^{-1}AS$. Tada je $B^k = (S^{-1})A^kS$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, te onda lako slijedi da je $p(B) = (S^{-1})p(A)S$. Odavde slijedi tvrdnja. ■

2.6 Linearne rekurzije

Promatramo niz $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0} \subseteq \mathbb{C}$ zadan rekurzivno s

$$x_n = px_{n-1} + qx_{n-2}, \qquad n \geq 2,$$

gdje su $p, q \in \mathbb{C}$. Ukoliko zadamo vrijednosti prva dva člana niza, x_0, x_1, tada je cijeli niz jedinstveno određen. Pogledajmo sada kako možemo tehnikama iz prethodnih poglavlja riješiti ovu rekurziju. Od dane rekurzije možemo "umjetno" formirati sustav 2×2 uvođenjem pomoćnog niza $y_n = x_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$. Tada imamo

$$\begin{aligned} x_n &= px_{n-1} + qy_{n-1} \\ y_n &= x_{n-1}, \end{aligned}$$

što možemo u matričnom obliku zapisati kao

$$\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ako za $n \in \mathbb{N}$ označimo

$$X_n = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

tada posljednja jednakost glasi

$$X_n = AX_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Uvrštavanjem iste relacije za X_{n-1}, te nastavkom tog procesa induktivno, dobivamo

$$X_n = AX_{n-1} = A^2 X_{n-2} = \cdots = A^{n-1} X_1 = A^{n-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_0 \end{bmatrix}.$$

Stoga se problem rješavanja dane linearne rekurzije svodi na problem računanja potencija matrice A. Kao što smo vidjeli u prethodnom dijelu, ovaj problem je jednostavno riješiti ukoliko je A dijagonalizibilna. Sada ćemo pokazati opsežniji rezultat, ali samo za slučaj matrica reda 2.

Zadatak 2.30. Neka je $A \in M_2(\mathbb{C})$. Tada vrijedi jedna od dvije mogućnosti:

(1) A je dijagonalizibilna.

(2) Postoji regularna matrica S takva da je

$$A = S \begin{bmatrix} \lambda_0 & 1 \\ 0 & \lambda_0 \end{bmatrix} S^{-1},$$

gdje je λ_0 jedina svojstvena vrijednost matrice A.

Rješenje: Ukoliko A ima dvije različite svojstvene vrijednosti, tada je ona dijagonalizibilna, pa smo u slučaju (1). Pretpostavimo stoga da je $\sigma(A) = \{\lambda_0\}$. Posebno, karakteristični polinom matrice A je tada dan s $k_A(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^2$. Ako je već $g(\lambda_0) = 2$, onda je $A = \lambda_0 I$, pa smo ponovno u slučaju (1). Stoga preostaje samo promotriti slučaj kada je $g(\lambda_0) = 1$. Primijetimo sljedeće: ako bismo htjeli da vrijedi jednakost iz zadatka, tada je dovoljno pronaći bazu $\{f_1, f_2\}$ za $M_{2,1}(\mathbb{C})$ takvu da je

$$Af_1 = \lambda_0 f_1, \qquad Af_2 = f_1 + \lambda_0 f_2,$$

odnosno

$$(A - \lambda_0 I)f_1 = 0, \qquad (A - \lambda_0 I)f_2 = f_1.$$

Neka je $f_2 \in M_{2,1}(\mathbb{C}) \setminus \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)$. Stavimo $f_1 = (A - \lambda_0 I)f_2$. Kako imamo $f_2 \notin \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I)$, to je i $f_1 \neq 0$. Nadalje, prema Hamilton-Cayleyevom teoremu je $(A - \lambda_0 I)^2 = 0$, pa je posebno i

$$(A - \lambda_0 I)f_1 = (A - \lambda_0 I)^2 f_2 = 0.$$

Konačno, kako je $f_1 \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 I) \setminus \{0\}$, slijedi da je $\{f_1, f_2\}$ linearno nezavisan skup, pa je to i baza za $M_{2,1}(\mathbb{C})$. Stavljanjem $S = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 \end{bmatrix}$ slijedi tražena tvrdnja. ■

Vratimo se sada na konkretnu matricu pridruženu linearnoj rekurziji,

$$A = \begin{bmatrix} p & q \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Karakteristični polinom ove matrice je

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - p\lambda - q.$$

Kako A nije skalarna matrica, imamo dvije mogućnosti:

- karakteristični polinom je oblika $k_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$, gdje je $\alpha \neq \beta$
- karakteristični polinom je oblika $k_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$.

Pretpostavimo da smo u prvom slučaju. Tada je A dijagonalizibilna, te je pripadna dijagonalna matrica $D = \mathrm{diag}(\alpha, \beta)$. Preostaje odrediti pripadne svojstvene vektore. Iz Vietovih formula imamo

$$\alpha + \beta = p, \qquad \alpha\beta = -q.$$

Stoga je

$$A - \alpha I = \begin{bmatrix} \beta & -\alpha\beta \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix},$$

odakle je odmah vidljivo da je $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix}^T$ svojstveni vektor pridružen α. Slično dobivamo i da je $\begin{bmatrix} \beta & 1 \end{bmatrix}^T$ svojstveni vektor pridružen β. Dakle, tada je

$$A = SDS^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{bmatrix},$$

pa je

$$A^n = SD^nS^{-1} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & 0 \\ 0 & \beta^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\beta \\ -1 & \alpha \end{bmatrix} = \frac{1}{\alpha - \beta} \begin{bmatrix} \alpha^{n+1} - \beta^{n+1} & \alpha\beta^{n+1} - \beta\alpha^{n+1} \\ \alpha^n - \beta^n & \alpha\beta^n - \beta\alpha^n \end{bmatrix}.$$

Time dobivamo eksplicitnu formulu za rješenje početne linearne rekurzije: kako nas zanima zapravo samo vrijednost x_n, dovoljno je u relaciji $X_n = A^{n-1}X_1$ očitati prvi redak, odnosno pomnožiti prvi redak od A^{n-1} s X_1. Tako dobivamo

$$x_n = \frac{1}{\alpha - \beta} \left[(\alpha^n - \beta^n)x_1 + (\alpha\beta^n - \beta\alpha^n)x_0 \right],$$

što možemo drugačije zapisati i u obliku

$$x_n = \left(\frac{x_1 - \beta x_0}{\alpha - \beta} \right) \alpha^n + \left(\frac{\alpha x_0 - x_1}{\alpha - \beta} \right) \beta^n.$$

Dakle, n-ti član niza je linearna kombinacija (s koeficijentima neovisnim o n!) n-tih potencija nultočaka karakterističnog polinoma. Pritom nije nužno potrebno pamtiti koeficijente u gornjem izrazu; jednom kad znamo da je rješenje oblika $x_n = c_1\alpha^n + c_2\beta^n$, dovoljno je uvrstiti $n = 0, 1$ i dobiti c_1, c_2 i dobivenog 2×2 sustava.

Promotrimo sada i drugi slučaj, onaj u kojem je karakteristični polinom matrice A jednak $k_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^2$. Posebno imamo $2\alpha = p$ i $\alpha^2 = -q$. Matrica $A - \alpha I$ je tada dana s

$$A - \alpha I = \begin{bmatrix} \alpha & -\alpha^2 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Pratimo sada konstrukciju iz zadatka 2.30: iz matričnog zapisa vidimo da možemo uzeti $f_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, a zatim je $f_1 = (A - \alpha I) f_2 = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \end{bmatrix}^T$. Stoga je

$$A = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix}.$$

Indukcijom se lako pokaže da za matricu $\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}$ vrijedi

$$\begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix},$$

pa je

$$A^n = \begin{bmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha^n & n\alpha^{n-1} \\ 0 & \alpha^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -\alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (n+1)\alpha^n & -n\alpha^{n+1} \\ n\alpha^{n-1} & -(n-1)\alpha^n \end{bmatrix}.$$

Ponovno promatrajući samo prvi redak relacije $X_n = A^{n-1} X_1$ dobivamo

$$x_n = n\alpha^{n-1} x_1 - (n-1)\alpha^n x_0,$$

što možemo drugačije zapisati i u obliku

$$x_n = x_0 \alpha^n + (x_1 - \alpha x_0) n \alpha^{n-1}.$$

Ovdje je ponovno dovoljno zapamtiti oblik rješenja $x_n = c_1 \alpha^n + c_2 n \alpha^{n-1}$, a zatim se c_1, c_2 mogu odrediti uvrštavanjem $n = 0, 1$.

Naravno, niz x_n ne mora počinjati od nultog člana; često ćemo takav niz dobiti preko nekih objekata koji nemaju niti smisla za $n = 0$, ili možda čak niti za prvih $n_0 - 1$ brojeva. Međutim, ako nam je dan niz x_n za $n \geq n_0$, s početna dva člana x_{n_0} i x_{n_0+1}, tada jednostavnim uvođenjem pomoćnog niza

$$y_0 = x_{n_0}, \quad y_1 = x_{n_0+1}, \quad y_n = x_{n_0+n}, \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

problem svodimo na prethodnu diskusiju. Rješenje linearne rekurzije je tada

$$x_n = y_{n-n_0} = \left(\frac{x_{n_0+1} - \beta x_{n_0}}{\alpha - \beta} \right) \alpha^{n-n_0} + \left(\frac{\alpha x_{n_0} - x_{n_0+1}}{\alpha - \beta} \right) \beta^{n-n_0}$$

u prvom, odnosno

$$x_n = y_{n-n_0} = x_{n_0} \alpha^{n-n_0} + (x_{n_0+1} - \alpha x_{n_0})(n - n_0)\alpha^{n-n_0-1}$$

u drugom slučaju.

Zadatak 2.31. Fibonaccijev niz (F_n) zadan je rekurzivno s

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \quad F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

Odredite opći član niza.

Rješenje: Zadana linearna rekurzija je pridružena matrici

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

pa sada analiziramo njenu dijagonalizibilnost. Karakteristični polinom je dan s

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - \lambda - 1 = \left(\lambda - \frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right) \left(\lambda - \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right),$$

pa vidimo da imamo dvije različite nultočke, $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ i $\beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$. Stoga se nalazimo u prvom slučaju, te je opći član niza dan s

$$\begin{aligned} F_n &= \left(\frac{F_1 - \beta F_0}{\alpha - \beta}\right)\alpha^n + \left(\frac{\alpha F_0 - F_1}{\alpha - \beta}\right)\beta^n \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right] \end{aligned}$$

∎

Zadatak 2.32. Neka su $a, b \in \mathbb{C}$. Izračunajte determinantu n-tog reda

$$D_n = \begin{vmatrix} a+b & a & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ b & a+b & a & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & a+b & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b & a+b \end{vmatrix}.$$

Rješenje: Laplaceovim razvojem po prvom retku dobivamo

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - a\begin{vmatrix} b & a & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a+b & a & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a+b & a \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a+b. \end{vmatrix}$$

Sada razvojem druge determinante po prvom stupcu dobivamo relaciju

$$D_n = (a+b)D_{n-1} - abD_{n-2}.$$

Ovo je linearna rekurzija čija je pripadna matrica

$$A = \begin{bmatrix} (a+b) & -ab \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

a početna dva člana su $D_1 = a+b$ i $D_2 = (a+b)^2 - ab$ (dakle, rekurzija počinje od člana s indekxom $n = 1$). Njen karakteristični polinom je dan s

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (a+b)\lambda + ab = (\lambda - a)(\lambda - b).$$

Razlikujemo slučajeve:

- Ako je $a \neq b$, tada smo u dijagonalizibilnom slučaju, te je rješenje dano s

$$D_n = \frac{a^2}{a-b}a^{n-1} - \frac{b^2}{a-b}b^{n-1} = \frac{1}{a-b}\left(a^{n+1} - b^{n+1}\right).$$

- Ako je $a = b$, tada je rješenje dano s

$$D_n = 2a \cdot a^{n-1} + a^2(n-1)a^{n-2} = (n+1)a^n.$$

∎

3 Unitarni prostori

3.1 Definicije i osnovna svojstva

Definicija 3.1. Neka je U vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. **Skalarni produkt** na U je preslikavanje

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : U \times U \to \mathbb{F}$$

koje ima sljedeća svojstva:

(1) $\langle x, x \rangle \geq 0$ za svaki $x \in U$

(2) $\langle x, x \rangle = 0$ ako i samo ako je $x = 0$

(3) $\langle x_1 + x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \langle x_2, y \rangle$ za sve $x_1, x_2, y \in U$

(4) $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$ za sve $x, y \in U$ i $\alpha \in \mathbb{F}$

(5) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$ za sve $x, y \in U$.

Broj $\langle x, y \rangle$ zovemo **skalarni produkt vektora** x **i** y, a uređeni par $(U, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ **unitaran prostor** nad poljem $\mathbb{F}$.

Prva dva svojstva iz definicije skalarnog produkta zovemo još i svojstvo *pozitivne definitnosti*, svojstvo (3) nazivamo *aditivnost skalarnog produkta u prvoj varijabli*, svojstvo (4) *homogenost skalarnog produkta u prvoj varijabli*, dok je svojstvo (5) zovemo *hermitska simetričnost skalarnog produkta*. Primijetimo kako u slučaju $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ svojstvo (5) glasi $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$; u ovom slučaju kažemo da je skalarni produkt *simetričan*.

Direktno iz definicije unitarnog prostora slijede i ova njegova svojstva:

(a) $\langle x, \beta y \rangle = \overline{\beta} \langle x, y \rangle$ za sve $x, y \in U$ i $\beta \in \mathbb{F}$

(b) $\langle x, y_1 + y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \langle x, y_2 \rangle$ za sve $x, y_1, y_2 \in U$

(c) $\langle x, 0 \rangle = \langle 0, x \rangle = 0$ za sve $x \in U$.

Dakle, skalarni produkt je također aditivan i u drugoj varijabli. Međutim, u slučaju $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ nemamo homogenost u drugoj varijabli, već *antihomogenost*. Također, jednostavno vidimo kako su svojstva (3) i (4) iz definicije ekvivalentna s

$$\langle \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, y \rangle = \alpha_1 \langle x_1, y \rangle + \alpha_2 \langle x_2, y \rangle \qquad \text{za sve } x_1, x_2, y \in U \text{ i } \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{F}.$$

Dakle, skalarni produkt je *linearan u prvoj varijabli*. Koristeći prethodna razmatranja, odmah slijedi i da je skalarni produkt *antilinearan u drugoj varijabli*, odnosno vrijedi

$$\langle x, \beta_1 y_1 + \beta_2 y_2 \rangle = \overline{\beta_1} \langle x, y_1 \rangle + \overline{\beta_2} \langle x, y_2 \rangle \qquad \text{za sve } x, y_1, y_2 \in U \text{ i } \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}.$$

Primjer 3.2. (a) Na prostoru $V^3(O)$ definiramo preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : V^3(O) \times V^3(O) \to \mathbb{R}$ s

$$\left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle := \begin{cases} |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \angle(\vec{a}, \vec{b}), & \vec{a}, \vec{b} \neq \vec{0} \\ 0, & \text{inače} \end{cases}$$

Ovo je skalarni produkt na $V^3(0)$ (pokazuje se također i na kolegiju Elementarna matematika 2).

(b) Na prostoru $\mathbb{F}^n$ definiramo preslikavanje $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ s

$$\langle x, y \rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{F}^n.$$

Pokažimo da je ovo skalarni produkt na $\mathbb{F}^n$. Provjeravamo redom svojstva:

(1) Za proizvoljan $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{F}^n$ imamo

$$\langle x,x\rangle=\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\geq 0.$$

(2) Iz prethodnog odmah vidimo i da je $\langle x,x\rangle=0$ ako i samo ako je $x=0$.

(3) Provjerimo linearnost u prvoj varijabli: za proizvoljne $x=(x_1,\dots,x_n),y=(y_1,\dots,y_n),z=(z_1,\dots,z_n)$ i $\alpha,\beta\in\mathbb{F}$ imamo

$$\langle\alpha x+\beta y,z\rangle=\sum_{i=1}^{n}(\alpha x_i+\beta y_i)\overline{z_i}=\alpha\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{z_i}+\beta\sum_{i=1}^{n}y_i\overline{z_i}=\alpha\langle x,z\rangle+\beta\langle y,z\rangle.$$

(4) Konačno, za proizvoljne $x=(x_1,\dots,x_n),y=(y_1,\dots,y_n)\in\mathbb{F}^n$ je

$$\langle y,x\rangle=\sum_{i=1}^{n}y_i\overline{x_i}=\overline{\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{y_i}}=\overline{\langle x,y\rangle}$$

Dakle, $(\mathbb{F}^n,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitarni prostor.

(c) Na prostoru $M_{mn}(\mathbb{C})$ definiramo preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle:M_{mn}(\mathbb{C})\times M_{mn}(\mathbb{C})\longrightarrow\mathbb{C}$ sa $\langle A,B\rangle=\operatorname{tr}(AB^*)$. Primijetimo prvo kako je

$$\operatorname{tr}(AB^*)=\sum_{i=1}^{m}[AB^*]_{ii}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[A]_{ij}[B^*]_{ji}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}[A]_{ij}\overline{[B]_{ij}}.$$

Dakle, formula za ovaj produkt matrica je analogna onoj iz prethodnog primjera na za $\mathbb{F}^n$, stoga se i dokaz da je ovo zaista skalarni produkt može provesti analogno:

(1) Za $A\in M_{mn}(\mathbb{C})$ je

$$\langle A,A\rangle=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|[A]_{ij}\right|^2\geq 0$$

(2) Ponovno odmah vidimo da je $\langle A,A\rangle=0$ ako i samo ako je $A=0$.

(3) Za $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ i $A,B,C\in M_{mn}(\mathbb{C})$ je

$$\langle\alpha A+\beta B,C\rangle=\operatorname{tr}((\alpha A+\beta B)C^*)=\operatorname{tr}(\alpha AC^*+\beta BC^*)=\alpha\operatorname{tr}(AC^*)+\beta\operatorname{tr}(BC^*)=\alpha\langle A,C\rangle+\beta\langle B,C\rangle.$$

(4) Za $A,B\in M_{mn}(\mathbb{C})$ imamo

$$\langle B,A\rangle=\operatorname{tr}(BA^*)=\operatorname{tr}((AB^*)^*)=\overline{\operatorname{tr}(AB^*)}=\overline{\langle A,B\rangle}.$$

Dakle, $\langle\cdot,\cdot\rangle$ je skalarni produkt i $(M_n(\mathbb{C}),\langle\cdot,\cdot\rangle)$ je unitarni prostor.

(d) Za $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, skup $C([a,b])=\{f:[a,b]\to\mathbb{R}\mid f \text{ je neprekidna }\}$ je potprostor od $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. Na tom prostoru definiramo preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle:C([a,b])\times C([a,b])\longrightarrow\mathbb{R}$ sa:

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)g(t)dt,\quad f,g\in C([a,b]).$$

Ovo je dobro definirano preslikavanje i zadovoljava svojstva skalarnog produkta; provjera svojstava iz definicije se svode na primjenu odgovarajućih svojstava Riemannovog integrala za neprekidne funkcije (Matematička analiza 2), te se ostavljaju za vježbu.

Skalarne produkte iz prethodnog zadatka ćemo zvati standardnim skalarnim produktima (na odgovarajućim prostorima). Naravno, to nisu jedini mogući odabiri skalarnog produkta na danim prostorima. Pogledajmo prvo kroz idućih nekoliko zadataka i neke nestandardne primjere na $\mathbb{R}^n$.

Zadatak 3.1. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja skalarni produkti na $\mathbb{R}^3$:

(a) $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle := 2x_1y_1 + 3x_2y_2 - 2x_3y_3$

(b) $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle := 2x_1y_1 + 3x_2y_2$

(c) $\langle (x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle := 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + 5x_3y_3$.

Rješenje:

(a) Primijetimo kako je za $\langle e_3,e_3\rangle = -2$, pa vidimo da ne vrijedi već pozitivnost skalarnog produkta (odnosno svojstvo (1) iz definicije). Iako je već ovo dovoljno da zaključimo da ovo preslikavanje nije skalarni produkt, napomenimo kako svojstvo (2) iz definicije također ne vrijedi, s obzirom da je $\langle (1,0,1),(1,0,1)\rangle = 0$. Pokažite za vježbu da linearnost i simetričnost ovog preslikavanja ipak vrijede.

(b) Ovdje vidimo da ne vrijedi drugo svojstvo iz definicije: imamo $\langle e_3,e_3\rangle = 0$. Međutim, sva ostala svojstva iz definicije će vrijediti (uključujući i (1)); pokažite ovo.

(c) Pokažimo da je ovo preslikavanje skalarni produkt.
Za $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ imamo

$$\langle x,x\rangle = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 5x_3^2 \geq 0,$$

te je očito $\langle x,x\rangle = 0$ ako i samo ako je $x = 0$. Linearnost i simetričnost se dobiju rutinskom provjerom, pa zaključujemo da ovo zaista je skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.

$\blacksquare$

Nešto općenitiji rezultat navodimo u idućem zadatku.

DZ 3.1. Neka je $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}$ preslikavanje dano s

$$\langle x,y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \overline{y_i},$$

gdje su $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{F}$ fiksni. Dokažite da je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt na $\mathbb{F}^n$ ako i samo ako vrijedi $\lambda_1,\dots,\lambda_n > 0$.

Zadatak 3.2. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja skalarni produkti na $\mathbb{R}^2$:

(a) $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2$

(b) $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$

(c) $\langle (x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$.

Rješenje:

(a) Primijetimo kako je

$$\langle (1,0),(0,1)\rangle = 2 \neq 0 = \langle (0,1),(1,0)\rangle.$$

Stoga ovo preslikvanje nije simetrično, pa nije skalarni produkt.

(b) U ovom slučaju odmah vidimo da je dano preslikvanje simetrično, pa ne možemo zaključiti kao u (a). Nadalje, za $x = (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$\langle x,x\rangle = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 3x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2 + 2x_2^2 \geq 0,$$

te je $\langle x,x\rangle = 0$ ako i samo ako je $2x_1 + x_2 = 0$ te $x_2 = 0$, odnosno ako i samo ako je $x = 0$. Dakle, ovo preslikavanje je pozitivno definitno. Linearnost se jednostavno provjeri, pa slijedi da je ovo preslikavanje zaista skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$.

(c) Za $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ prvo imamo

$$\langle x, x\rangle = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 = (2x_1 + x_2)^2,$$

odakle vidimo da uvrštavanjem $x = (1, -2)$ dobivamo da ne vrijedi svojstvo (2) iz definicije. Stoga ovo nije skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$.

■

U ovom trenutku nemamo još dovoljno alata da bismo okarakterizirali sve moguće skalarne produkte na $\mathbb{F}^n$, ili na općenitom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V. Na tu temu ćemo se vratiti u kasnijim poglavljima. Zasad možemo samo navesti prirodan način kako na općenitom konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V možemo konstruirati (proizvoljno) mnogo skalarnih produkata.

Zadatak 3.3. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor dimenzije n nad poljem $\mathbb{F}$, te neka je $\Phi : V \to \mathbb{F}^n$ izomorfizam. Tada je preslikavanje $[\cdot,\cdot] : V \times V \to \mathbb{F}$ definirano s

$$[x, y] := \langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle, \qquad x, y \in V,$$

skalarni produkt na V, pri čemu $\langle\cdot,\cdot\rangle$ označava standardni skalarni produkt na $\mathbb{F}^n$.

Rješenje: Provjerimo redom svojstva skalarnog produkta:

- Kako je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ skalarni produkt, za svaki $x \in V$ je

$$[x, x] = \langle \Phi(x), \Phi(x)\rangle \geq 0.$$

Dodatno, imamo da je $[x, x] = 0$ ako i samo ako je $\Phi(x) = 0$, pa kako je Φ izomorfizam slijedi da to vrijedi ako i samo ako je $x = 0$. Stoga je ovo preslikavanje pozitivno definitno.

- Kako je Φ posebno linearan operator, te je $\langle\cdot,\cdot\rangle$ linearan u prvoj varijabli, lako dobijemo da je za sve $x, y, z \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$

$$[\alpha x + \beta y, z] = \langle \Phi(\alpha x + \beta y), \Phi(z)\rangle = \alpha\langle \Phi(x), \Phi(z)\rangle + \beta\langle \Phi(y), \Phi(z)\rangle = \alpha[x, z] + \beta[y, z].$$

Dakle, ovo preslikavanje je linearno u prvoj varijabli.

- Konačno, za sve $x, y \in V$ imamo

$$[y, x] = \langle \Phi(y), \Phi(x)\rangle = \overline{\langle \Phi(x), \Phi(y)\rangle} = \overline{[x, y]}.$$

■

Ako je $\{b_1, \ldots, b_n\}$ jedna baza za V, tada možemo zadati izomorfizam $\Phi \in L(V, \mathbb{F}^n)$ s

$$\Phi(b_j) = e_j, \qquad j = 1, \ldots, n,$$

pri čemu je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ kanonska baza za $\mathbb{F}^n$. Tada je za sve $x = \sum_{i=1}^n x_i b_i \in V$

$$\Phi(x) = \sum_{i=1}^n x_i e_i,$$

pa u tom slučaju skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ definiran u prethodnom zadatku glasi

$$[x, y] = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}, \qquad x = \sum_{i=1}^n x_i b_i,\ y = \sum_{i=1}^n y_i b_i.$$

Dakle, skalarne produkte na općenitim konačnodimenzionalnim vektorskim prostorima možemo definirati na način analogan standardnom skalarnom produktu u $\mathbb{F}^n$.

Teorem 3.3. *(nejednakost Cauchy -Schwarz-Bunjakovskog:) Neka je U unitarni prostor. Tada za sve $x, y \in U$ vrijedi*

$$|\langle x,y\rangle| \leq \sqrt{\langle x,x\rangle}\sqrt{\langle y,y\rangle}.$$

Dodatno, jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni.

Navedimo i kako izgleda $C-S-B$ nejednakost na standardnim primjerima unitarnih prostora.

(1) Za sve $(x_1,\dots,x_n),(y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{F}^n$ imamo

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\overline{y_i} \leq \left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|y_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(2) Za sve $f,g \in C([a,b])$ imamo

$$\left|\int_a^b f(t)g(t)dt\right| \leq \left(\int_a^b f(t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b g(t)^2dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(3) Za sve $A,B \in M_{mn}(\mathbb{C})$ imamo

$$|\mathrm{tr}\,(AB^*)| \leq \sqrt{\mathrm{tr}\,(AA^*)}\sqrt{\mathrm{tr}\,(BB^*)}.$$

Zadatak 3.4. Dokažite da za svaka 4 realna broja a,b,c,d vrijede nejednakosti

a) $|a+2b+3c+4d| \leq \sqrt{30(a^2+b^2+c^2+d^2)}$

b) $|a+b+c+d| \leq \sqrt{(a^2+b^2+2)(c^2+d^2+2)}$

Rješenje:

a) Uz standardni sklarani produkt na $\mathbb{R}^4$ uočimo da iz C-S-B nejednakosti slijedi

$$|\langle(a,b,c,d),(1,2,3,4)\rangle| \leq \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2} = \sqrt{30(a^2+b^2+c^2+d^2)},$$

odnosno

$$|a+2b+3c+4d| \leq \sqrt{30(a^2+b^2+c^2+d^2)}$$

b) Ponovno, uz standardni sklarani produkt na $\mathbb{R}^4$ uočimo da iz C-S-B nejednakosti slijedi

$$|\langle(a,b,1,1),(1,1,c,d)\rangle| \leq \sqrt{a^2+b^2+1^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2+c^2+d^2} = \sqrt{(a^2+b^2+2)(c^2+d^2+2)},$$

odnosno

$$|a+b+c+d| \leq \sqrt{(a^2+b^2+2)(c^2+d^2+2)}.$$

■

Definicija 3.4. Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ i $\|\cdot\| : V \longrightarrow \mathbb{R}$ preslikavanje sa svojstvima:

(1) $\|x\| \geq 0$, za svako $x \in V$,

(2) $\|x\| = 0$ ako i samo ako je $x = 0$,

(3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$ za svako $x \in V$,

(4) $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$, za svako $x,y \in V$.

Tada kažemo da je $\|\cdot\|$ **norma** na V, a uređeni par $(V, \|\cdot\|)$ zovemo **normirani prostor**.

Za početak promotrimo vezu između pojmova norme i skalarnog produkta. Neka je $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ unitarni prostor. Tada je sa

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \qquad x \in U$$

definirano preslikavanje $\|\cdot\| : U \longrightarrow \mathbb{R}$ koje je norma na U pa je $(U, \|\cdot\|)$ ujedno i normirani prostor. Za ovako definiranu normu ćemo reći da je **inducirana skalarnim produktom** $\langle\cdot,\cdot\rangle$.

Primjer 3.5. Navedimo i kako izgledaju pripadne norme u nekim od standardnih primjera unitarnih prostora:

(a) Na prostoru $\mathbb{F}^n$ norma inducirana standardnim skalarnim produktom je dana s

$$\|(x_1, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{F}^n$$

(b) Na prostoru $M_{mn}(\mathbb{C})$ je pripadna norma dana s

$$\|A\| = \sqrt{\operatorname{tr}(AA^*)} = \left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} \left|[A]_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad A \in M_{mn}(\mathbb{C}).$$

(c) Na prostoru $C([a,b])$ je pripadna norma dana s

$$\|f\| = \left(\int_a^b f(x)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}, \qquad f \in C([a,b]).$$

Prirodno se pitati je li svaka norma inducirana (nekim) skalarnim produktom. Odgovor je negativan (vidi Primjer 3.7 kasnije). Stoga možemo reći kako je klasa normiranih prostora šira od klase unitarnih prostora.

Zadatak 3.5. Zadan je normirani prostor $(M_2(\mathbb{C}), \|\cdot\|)$, gdje je norma inducirana standardnim skalarnim produktom na $M_2(\mathbb{C})$. Odredite normu matrice

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ 2 & 3. \end{bmatrix}$$

Rješenje: Imamo $\|A\| = \sqrt{|0|^2 + |i|^2 + |2|^2 + |3|^2} = \sqrt{14}$. ■

Zadatak 3.6. Navedite neku bazu prostora simetričnih matrica reda n, a zatim odredite normu svih njenih elemenata.

Rješenje: Jedna baza prostora simetričnih matrica reda n je dana s

$$\{E_{ij} + E_{ji} : 1 \le i < j \le n\} \cup \{E_{ii} : i = 1, \dots, n\}.$$

Sada za $1 \le i < j \le n$ imamo

$$\left\|E_{ij} + E_{ji}\right\| = \sqrt{2},$$

dok je za sve $i = 1, \dots, n$

$$\|E_{ii}\| = 1.$$

■

U terminima norme inducirane skalarnim produktom na unitarnom prostoru U, nejednakost $C-S-B$ poprima oblik

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\|y\|,$$

za svaki izbor $x,y \in U$. Jednakost vrijedi ako i samo ako su vektori x i y linearno zavisni. Dodatno, po uzoru na $V^3(O)$ možemo i u proizvoljnom realnom unitarnom prostoru U definirati **kut vektora** x i y, uz $x,y \neq 0$ sa

$$\cos\angle(x,y) = \frac{\langle x,y\rangle}{\|x\|\|y\|}.$$

Uočimo da je gornja definicija dobra upravo zbog $C-S-B$.

Zadatak 3.7. Pokažite da za sve $f \in C([0,1])$ vrijedi

$$\left(\int_0^1 f(x)dx\right)^2 \leq \int_0^1 f(x)^2dx.$$

Rješenje: Neka je $f \in C([0,1])$ proizvoljna. Primjenom C-S-B nejednakosti (uz standardni skalarni produkt i normu na $C([0,1])$) na funkcije f i konstantnu funkciju 1 slijedi

$$\int_0^1 f(x)dx \leq \left|\int_0^1 f(x)dx\right| = \left|\int_0^1 f(x)\cdot 1\,dx\right| \leq \left(\int_0^1 f(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^1 1^2dx\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^1 f(x)^2dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Kvadriranjem slijedi tražena nejednakost. ■

Definicija 3.6. Neka je U unitarni prostor. Za vektor $a \in U$ kažemo da je **jedinični** ili **normiran** ako je $\|a\| = 1$.

Ukoliko je $a \in U \setminus \{0\}$, tada je $\frac{a}{\|a\|}$ jedinični vektor. Preslikavanje $a \mapsto \frac{a}{\|a\|}$, za $a \neq 0$, ćemo zvati **normiranje** vektora a.

Zadatak 3.8. Odredite sve jedinične vektore $x = (x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ takve da izraz $|\langle x,a\rangle|$ ima maksimalnu moguću vrijednost, pri čemu je $a = (1,2,3)$. Kolika je ta vrijednost?

Rješenje: Iz C-S-B nejednakosti slijedi

$$|\langle x,a\rangle| \leq \|x\|\cdot\|a\| = \|a\| = \sqrt{14}.$$

Jednakost se postiže ako i samo ako su vektori x i a linearno zavisni, odnosno ako i samo ako je

$$(x_1,x_2,x_3) = \lambda(1,2,3),$$

za neki $\lambda \in \mathbb{R}$. Kako je x jedinični vektor, za jednakost je nužno i dovoljno $\lambda = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}$. Dakle, maksimalna vrijednost je $\sqrt{14}$ i ona se postiže za $(x_1,x_2,x_3) = \pm\frac{1}{\sqrt{14}}(1,2,3)$. ■

Zadatak 3.9. Dokažite da u svakom unitarnom prostoru U vrijedi relacija paralelograma, tj. da je

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2, \qquad x,y \in U.$$

Rješenje: Za sve $x,y \in U$ imamo

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y,x+y\rangle + \langle x-y,x-y\rangle \\ &= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle \\ &= 2\langle x,x\rangle + 2\langle y,y\rangle \\ &= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.\end{aligned}$$

■

Primjer 3.7. Pokažimo sada na primjeru da postoje norme koje nisu inducirane skalarnim produktom. Neka je $\|\cdot\|_1 : \mathbb{R}^2 \mapsto [0,\infty)$ preslikavanje definirano s

$$\|(x,y)\|_1 = |x| + |y|.$$

Jednostavno se provjeri da je $\|\cdot\|_1$ zaista norma na $\mathbb{R}^2$. Pokažimo da ova norma ne zadovoljava relaciju paralelograma. Doista, ako stavimo $x = (1,0)$ i $y = (0,1)$, tada je

$$\begin{aligned} \|x+y\|_1^2 + \|x-y\|_1^2 &= \|(1,1)\|_1^2 + \|(1,-1)\|_1^2 = 2^2 + 2^2 = 8 \\ 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 &= 2\|(1,0)\|_1^2 + 2\|(0,1)\|_1^2 = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

Iz prethodnog zadatka sada slijedi da ova norma nije mogla biti inducirana nekim skalarnim produktom.

Iako je na prvu neobično koristiti relaciju paralelograma kao kriterij po kojem ćemo zaključiti da norma nije inducirana skalarnim produktom, to nije slučajno; vrijedi sljedeća karakterizacija takvih normi.

Teorem 3.8. ***(Jordan - von Neumann)*** *Neka je $(U, \|\cdot\|)$ normiran prostor. Tada postoji jedinstveni skalarni produkt $\langle\cdot,\cdot\rangle$ na U takav da je $\|\cdot\| = \sqrt{\langle\cdot,\cdot\rangle}$ ako i samo ako $\|\cdot\|$ zadovoljava relaciju paralelograma. U tom slučaju je taj skalarni produkt dan s*

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$$

ako je U realan, odnosno s

$$\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\sum_{k=0}^{3} i^k \left\|x + i^k y\right\|^2$$

ako je U kompleksan prostor.

Identiteti iz prethodnog teorema se zovu još i **polarizacijske formule**.

DZ 3.2. * Za $p \in [1,\infty]$ definiramo preslikavanje $\|\cdot\|_p : \mathbb{F}^n \to [0,\infty)$ s

$$\|(x_1,\dots,x_n)\|_p = \begin{cases} \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}, & p \in [1,\infty) \\ \max_{1\le i\le n} |x_i|, & p = \infty. \end{cases}$$

Pokažite da je $\|\cdot\|_p$ norma za svaki $p \in [1,\infty]$, te da je inducirana skalarnim produktom ako i samo ako je $p = 2$ (to je ujedno i slučaj standardne norme na $\mathbb{F}^n$).

Promotrimo sada kako u unitarnom prostoru možemo provjeriti linaernu (ne)zavisnost skupa vektora. Neka je U unitarni prostor i $\{a_1,\dots,a_k\}$ proizvoljan skup vektora iz U. Linearna zavisnost ovog skupa ovisi o skupu rješenja vektorske jednadžbe

$$\sum_{j=1}^{k} \lambda_j a_j = 0. \tag{8}$$

Pretpostavimo da je $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)$ rješenje jednadžbe (8). Množenjem ove relacije skalarno s a_i, $i = 1,\dots,k$, dobivamo

$$\sum_{j=1}^{k} \langle a_j,a_i\rangle \lambda_j = 0, \qquad i = 1,\dots,k. \tag{9}$$

Ako označimo s

$$G(a_1,\dots,a_k) = \left(\langle a_j,a_i\rangle\right)_{ij} = \begin{bmatrix} \langle a_1,a_1\rangle & \langle a_2,a_1\rangle & \cdots & \langle a_k,a_1\rangle \\ \langle a_1,a_2\rangle & \langle a_2,a_2\rangle & \cdots & \langle a_k,a_2\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle a_1,a_k\rangle & \langle a_2,a_m\rangle & \cdots & \langle a_k,a_k\rangle \end{bmatrix},$$

tada slijedi da je $(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$ također i rješenje $k\times k$ homogenog sustava (9) čija je matrica upravo $G(a_1,\dots,a_k)$.

Međutim, vrijedi i obrat. Ako je $(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k)$ rješenje ovog homogenog sustava linearnih jednadžbi, onda je to i rješenje vektorske jednadžbe (8). Naime, množenjem i-te jednadžbe u (9) s $\overline{\lambda_i}$ te zbrajanjem svih jednadžbi slijedi

$$0=\sum_{i=1}^{k}\overline{\lambda_i}\sum_{j=1}^{k}\langle a_j,a_i\rangle\lambda_j=\left\langle\sum_{j=1}^{k}\lambda_j a_j,\sum_{i=1}^{k}\lambda_i a_i\right\rangle,$$

iz čega slijedi $\sum_{j=1}^{k}\lambda_j a_j=0$.

Dakle, skup $\{a_1,\dots,a_k\}$ će biti linearno nezavisan ako i samo ako je pripadna matrica $G(a_1,\dots,a_k)$ regularna. Matricu $G(a_1,\dots,a_k)$ zovemo **Grammovom matricom** skupa vektora $\{a_1,\dots,a_k\}$. Uz ovu oznaku uvodimo i oznaku za **Grammovu determinantu** skupa vektora $\{a_1,\dots,a_k\}$

$$\Gamma(a_1,\dots,a_k):=\det G(a_1,\dots,a_k).$$

Posebno, skup $\{a_1,\dots,a_k\}$ je linearno nezavisan ako i samo ako je $\Gamma(a_1,\dots,a_k)\neq 0$.

Zadatak 3.10. Provjerite jesu li vektori $a=(1,2,1)$ i $b=(2,1,-1)\in\mathbb{R}^3$ linearno nezavisni koristeći Grammovu matricu.

Rješenje: Imamo

$$\Gamma(a,b)=\begin{vmatrix}\langle a,a\rangle & \langle b,a\rangle\\ \langle a,b\rangle & \langle b,b\rangle\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}6 & 3\\ 3 & 6\end{vmatrix}=27\neq 0.$$

Prema prethodnoj karakterizaciji slijedi da su vektori a i b linearno nezavisni. ■

Osim algebarske, Grammova determinanta ima i geometrijsku interpretaciju. Neka su $a,b\in\mathbb{R}^3$. Tada je

$$\Gamma(a,b)=|a|^2|b|^2-|a|^2|b|^2(\cos\angle(a,b))^2=|a|^2|b|^2(\sin\angle(a,b))^2$$

što je upravo jednako kvadratu površine paralelograma kojeg razapinju vektori a i b. Dakle, površinu dvodimenzionalnog objekta (paralelograma) u trodimenzionalnom prostoru možemo računati kao

$$P=\sqrt{\Gamma(a,b)}.$$

Primjerice, vektori iz prethodnog zadatka razapinju paralelogram čija je površina $3\sqrt{3}$.

Napomenimo kako je prethodna primjedba ujedno i osnova za generalizaciju pojma k-dimenzionalnog volumena u n-dimenzionalnom prostoru; k-dimenzionalni volumen paralelepipeda kojeg razapinju vektori $a_1,\dots,a_k\in\mathbb{R}^n$ će biti dan s $\sqrt{\Gamma(a_1,\dots,a_k)}$ (ovdje smo prešutno iskoristili i činjenicu da je Grammova determinanta proizvoljnog skupa vektora nenegativna, što ćemo dokazati tek kasnije).

3.2 Ortogonalnost i Gram-Schmidtov postupak ortonormiranja

Definicija 3.9. Neka je U unitaran prostor i $a,b\in U$. Kažemo da je vektor a **ortogonalan (okomit)** na vektor b i pišemo $a\perp b$ ako je $\langle a,b\rangle=0$.

Relacija ortogonalnosti je očito simetrična. Također, za razliku od dosadašnjih geometrijskih definicija koje ne definiraju kut između proizvoljnog vektora i nulvektora, nulvektor je ortogonalan na sve vektore; to je ujedno i jedini vektor s tim svojstvom.

Zadatak 3.11. Zadani su polinomi $p(x)=1+x^2$ i $q(x)=x^2+x-\frac{2}{5}$ u unitarnom prostoru $\mathscr{P}_2$ sa skalarnim produktom

$$\langle p,q\rangle=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)dx.$$

Ispitajte jesu li p i q ortogonalni.

Rješenje: Vrijedi

$$\begin{aligned}\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx &= \int_{-1}^{1}(x^4+x^3+\frac{3}{5}x^2+x-\frac{2}{5})dx \\ &= \frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1} + \frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^{1} + \frac{3}{5}\frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} + \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} - \frac{2}{5}\frac{x^1}{1}\Big|_{-1}^{1} \\ &= \frac{2}{5}+0+\frac{3}{5}\cdot\frac{2}{3}+0-\frac{2}{5}\cdot 2 \\ &= 0.\end{aligned}$$

Dakle, p i q su ortogonalni polinomi. ■

Zadatak 3.12. Neka je U realan unitaran prostor i neka su $x,y\in U$. Dokažite da vrijede sljedeće tvrdnje:

(a) $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ ako i samo ako je $x\perp y$.

(b) $\|x\| = \|y\|$ ako i samo ako je $x+y\perp x-y$.

Rješenje:

(a) Imamo prvo

$$\|x+y\|^2 = \langle x+y,x+y\rangle = \langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle = \|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2.$$

Stoga je $\|x+y\|^2 = \|x\|^2+\|y\|^2$ ako i samo ako je $\langle x,y\rangle = 0$.

(b) Imamo

$$\langle x+y,x-y\rangle = 0 \iff \langle x,x\rangle-\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle-\langle y,y\rangle = 0.$$

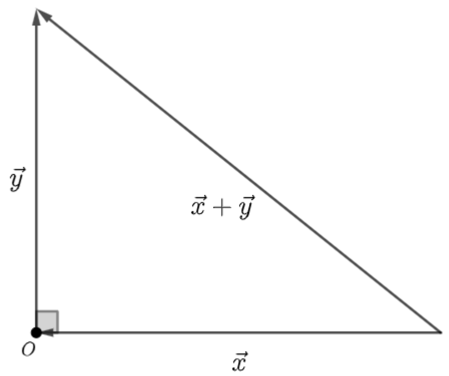
Kako je U realan unitaran prostor, to je $\langle x,y\rangle = \langle y,x\rangle$ pa je

$$\langle x+y,x-y\rangle = 0 \iff \|x\|^2 = \|y\|^2 \iff \|x\| = \|y\|.$$

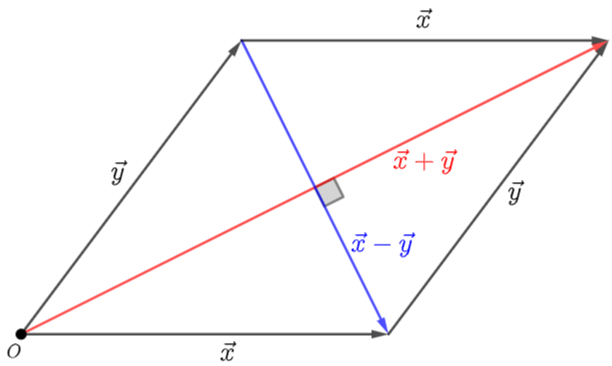
■

Tvrdnje prethodnog zadatka možemo povezati i s odgovarajućim geometrijskim iskazima:

(a) Ovo je zapravo varijanta Pitagorinog poučka u općenitom realnom unitarnom prostoru U: *U trokutu je zbroj kvadrata duljina dvije stranice jednak kvadratu treće ako i samo ako je taj trokut pravokutan (te je treća stranica hipotenuza).*



(b) Ako za vektore $\vec{x}$ i $\vec{y}$ promotrimo paralelogram koji oni razapinju, tada ovaj zadatak možemo iskazati i kao: *paralelogram je romb ako i samo ako su mu dijagonale međusobno okomite.*



Definicija 3.10. Za skup vektora $\{a_1,\dots,a_m\}$ iz unitarnog prostora U kažemo da je

(1) **ortogonalan skup vektora** ako je $a_i \perp a_k$ za sve $i,k \in \{1,\dots,m\}, i \neq k$.

(2) **ortonormiran skup vektora** ako je ortogonalan skup vektora i vrijedi $\|a_i\| = 1$ za sve $i = 1,\dots,m$.

Posebno za ortonormiran skup koji je i baza, kažemo da je **ortonormirana baza**.

Navedimo prije nastavka neke od osnovnih svojstava ovih skupova.

Propozicija 3.11. *Svaki ortogonalan skup vektora netrivijalnih vektora $\{a_1,\dots,a_k\}$ u unitarnom prostoru U je linearno nezavisan. Posebno, ako je $\dim U = n < \infty$, ortogonalni skup netrivijalnih vektora može imati najviše n elemenata.*

Propozicija 3.12. *Neka je U unitaran prostor te $\{e_1,\dots,e_n\}$ ortonormirana baza za U. Tada vrijedi*

(a) $x = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle e_i, \quad x \in U$

(b) $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i\rangle \overline{\langle y, e_i\rangle}, \quad x, y \in U$

(c) $\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\langle x, e_i\rangle|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad x \in U.$

Zadatak 3.13. Neka je $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ ortogonalni skup vektora u U. Dokažite **Pitagorin teorem**:

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i\right\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|^2.$$

Rješenje: Po pretpostavci je $\langle a_i, a_j\rangle = 0$ za $i \neq j$. Stoga je

$$\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i\right\|^2 = \left\langle \sum_{i=1}^{m} a_i, \sum_{j=1}^{m} a_m \right\rangle = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \langle a_i, a_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|^2.$$

■

Neka je sada $\{a_1,\dots,a_m\}$ proizvoljan linearno nezavisan skup vektora unitarnog prostora U. Želimo pronaći ortonormirani sustav vektora $\{e_1,\dots,e_m\}$ iz U takav da vrijedi $[\{a_1,\dots,a_m\}] = [\{e_1,\dots,e_m\}]$, tj. želimo konstruirati ortonormiranu bazu za $[\{a_1,\dots,a_m\}]$.

Teorem 3.13. ***(Gram - Schmidt)*** *Neka je $\{a_1,\dots,a_m\}$ linearno nezavisan skup vektora iz unitarnog prostora U. Tada postoji ortonormiran skup vektora $\{e_1,\dots,e_m\}$ u U, takav da vrijedi*

$$[\{a_1,\dots,a_k\}] = [\{e_1,\dots,e_k\}], \quad \text{za sve } k = 1,\dots,m.$$

Prisjetimo se konstrukcije traženog ortonormiranog skupa iz dokaza teorema: vektore $e_1,\dots,e_m$ definiramo induktivno s

$$e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|}, \quad f_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, e_i\rangle e_i, \quad e_k = \frac{f_k}{\|f_k\|}, \quad k = 2,\cdots,m.$$

Iz gornjeg teorema slijede i sljedeća bitni rezultati.

Korolar 3.14. *Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor.*

(a) Postoji ortonormirana baza za U.

(b) Svaki se ortogonalni sustav netrivijalnih vektora može dopuniti do ortogonalne baze za U.

(c) Svaki se ortonormirani sustav može dopuniti do ortonormirane baze za U.

Zadatak 3.14. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^3$ sa standardnim skalarnim produktom dani su vektori

$$a_1 = (1,2,2), a_2 = (1,-2,0) \text{ i } a_3 = (-1,0,1).$$

Dokažite da su ti vektori linearno nezavisni i ortonormirajte ih.

Prije samog rješenja zadatka, primijetimo sljedeće. Neka je $\{a_1,\dots,a_m\}$ linearno zavisan skup u unitarnom prostoru U, pri čemu niti jedan vektor nije 0 (inače se skup sigurno ne može ortonormirati, pa je diskusija nepotrebna). Tada postoji barem jedan a_j koji se može prikazati kao linearna kombinacija prethodnika. Neka je $k \geq 2$ indeks prvog takvog. Tada je $\{a_1,\dots,a_{k-1}\}$ linearno nezavisan skup, pa se na njega može primijeniti Gram-Schmidtov postupak, čime dobivamo skup $\{e_1,\dots,e_{k-1}\}$. Stoga je zbog $a_k \in [\{a_1,\dots,a_{k-1}\}] = [\{e_1,\dots,e_{k-1}\}]$ i Propozicije 3.12 (a)

$$a_k = \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, e_i\rangle e_i.$$

Kada bismo nastavili s Gram-Schmidtovom konstrukcijom, u prvom idućem koraku bismo dobili

$$f_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \langle a_k, e_i\rangle e_i = 0.$$

Dakle, ukoliko je dani skup vektora linearno zavisan, u nekom koraku ćemo dobiti $f_k = 0$. Drugim riječima, ukoliko možemo provesti Gram-Schmidtov postupak do kraja, onda je polazni skup bio linearno nezavisan, a ujedno smo i dobili traženu ortonormalizaciju.
Rješenje: Imamo $e_1 = \frac{a_1}{\|a_1\|} = \frac{1}{3}(1,2,2)$. Nadalje, $f_2 = a_2 - \langle a_2, e_1\rangle e_1 = \frac{1}{3}(4,-4,2)$ pa je $e_2 = \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{1}{3}(2,-2,1)$. Konačno,

$$f_3 = a_3 - \langle a_3, e_1\rangle e_1 - \langle a_3, e_2\rangle e_2 = \frac{1}{9}(-8,-4,8)$$

pa je $e_3 = \frac{f_3}{\|f_3\|} = \frac{1}{3}(-2,-1,2)$. Kako smo postupak proveli do kraja, to su vektori a_1, a_2, a_3 linearno nezavisni, te je dobivena tražena ortonormalizacija skupa. ■

Zadatak 3.15. U unitarnom prostoru $\mathscr{P}_2$, skupa polinoma s realnim koeficijentima stupnja manjeg ili jednakog dva, sa standardnim skalarnim produktom

$$\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)dt, \quad p,q \in \mathscr{P}_2$$

ortonormirajte standardnu bazu $\{1,t,t^2\}$.

Rješenje: Uvedimo oznake $p_1(t) = 1,\ p_2(t) = t,\ p_3(t) = t^2$. Uočimo da je

$$\|p_1\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} dt} = \sqrt{t\Big|_{-1}^{1}} = \sqrt{1-(-1)} = \sqrt{2}.$$

Stoga je $e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} p_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dalje imamo

$$\begin{aligned}
f_2(t) &= p_2(t) - \langle p_2, e_1\rangle e_1(t) = t - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} t dt\right) = t - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}t^2\Big|_{-1}^{1} = t \\
e_2(t) &= \frac{f_2(t)}{\|f_2\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1} t^2 dt}} f_2(t) = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{3}t^3\Big|_{-1}^{1}}} f_2(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}t \\
f_3(t) &= p_3(t) - \langle p_3, e_1\rangle e_1 - \langle p_3, e_2\rangle e_2 = t^2 - \frac{1}{2}\left(\int_{-1}^{1} t^2 dt\right) - \frac{3}{2}t\left(\int_{-1}^{1} t^3 dt\right) = t^2 - \frac{1}{3} \\
e_3(t) &= \frac{f_3(t)}{\|f_3\|} = \frac{1}{\sqrt{\int_{-1}^{1}(t^2-\frac{1}{3})^2 dt}} f_3(t) = \sqrt{\frac{45}{8}}\left(t^2 - \frac{1}{3}\right)
\end{aligned}$$

■

Zadatak 3.16. U unitarnom prostoru $M_2(\mathbb{C})$ sa standardnim skalarnim produktom

$$\langle A,B\rangle = \operatorname{tr}(AB^*), \quad A,B \in M_2(\mathbb{C})$$

ortonormirajte bazu $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ i prikažite matricu $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ u toj ortonormiranoj bazi.

Rješenje: Uvedimo oznake

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\ A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},\ A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix},\ A_4 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sada je

$$
\begin{aligned}
E_1 &= \frac{A_1}{\|A_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
F_2 &= A_2 - \langle A_2, E_1\rangle E_1 = \begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\\
E_2 &= \frac{F_2}{\|F_2\|} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}\\
F_3 &= A_3 - \langle A_3, E_1\rangle E_1 - \langle A_3, E_2\rangle E_2 = \begin{bmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} - \frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -6 & 3\end{bmatrix}\\
E_3 &= \frac{F_3}{\|F_3\|} = \frac{1}{\sqrt{45}}\begin{bmatrix}0 & 0\\ -6 & 3\end{bmatrix}\\
F_4 &= A_4 - \langle A_4, E_1\rangle E_1 - \langle A_4, E_2\rangle E_2 - \langle A_4, E_3\rangle E_3 = \begin{bmatrix}1 & -1\\ -2 & 1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0 & 0\\ -2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\\
E_4 &= \frac{F_4}{\|F_4\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 0.\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Znamo da je $A = \langle A, E_1\rangle E_1 + \langle A, E_2\rangle E_2 + \langle A, E_3\rangle E_3 + \langle A, E_4\rangle E_4 = \sqrt{2}E_1 + \frac{3}{\sqrt{5}}E_2 - \frac{1}{\sqrt{5}}E_3$. ■

DZ 3.3. U kompleksnom unitarnom prostoru $\mathbb{C}^3$ sa standardnim skalarnim produktom odredite ortonormiranu bazu prostora razapetog vektorima

$$a = (1+i, 1-i, 1), \quad b = (1-i, i, 2+i) \quad \text{i} \quad c = (i, 3-2i, 4).$$

Zadatak 3.17. Neka su $A, B \in M_{mn}(\mathbb{R})$. Što možemo reći o međusobnom odnosu redaka/stupaca ovih matrica ako vrijedi

(a) $AB^T = I$

(b) $A^T B = I$

(c) $AA^T = I$

(d) $A^T A = I$?

Rješenje: Za početak, vidimo da za ulančane matrice $C \in M_{mp}(\mathbb{R})$ i $D \in M_{pn}(\mathbb{R})$ vrijedi

$$[CD]_{ij} = R_i^C S_j^D = \left\langle (R_i^C)^T, S_j \right\rangle = \left\langle R_i^C, (S_j^D)^T \right\rangle,$$

što možemo pomalo neprecizno izreći kao "element (i,j) umnoška CD je skalarni produkt i–tog retka od C i j–tog stupca od D".

(a) S obzirom da je $S_j^{B^T} = (R_j^B)^T$, imamo da je

$$\delta_{ij} = [AB^T]_{ij} = \left\langle R_i^A, R_j^B \right\rangle.$$

Dakle, retci s različitim indeksom matrica A i B su međusobno ortogonalni, dok je $\left\langle R_i^A, R_i^B \right\rangle = 1$, $i = 1, \ldots, n$.

(b) Kako je $A^T B = A^T (B^T)^T$, primjenom zaključka iz (a) dijela na matrice A^T i B^T, te činjenice da su retci od A^T i B^R stupci od A i B, zaključujemo kako su stupci s različitim indeksom matrica A i B međusobno ortogonalni, dok je $\left\langle S_i^A, S_i^B \right\rangle = 1$ za sve $i = 1, \ldots, n$.

(c) Ovo je poseban slučaj (a) dijela zadatka za $B = A$. Zaključujemo da je $\left\langle R_i^A, R_j^A \right\rangle = \delta_{ij},\ i, j \in \{1, \ldots, m\}$, odnosno, retci matrice A čine ortonormirani skup.

(d) Ovo je poseban slučaj (b) dijela zadatka za $B = A$. Zaključujemo da je $\left\langle S_i^A, S_j^A \right\rangle = \delta_{ij},\ i, j \in \{1, \ldots, n\}$, odnosno, stupci matrice A čine ortonormirani skup.

■

Zadatak 3.18. Odredite $a, b, c \in \mathbb{R}$ tako da matrica $Q \in M_3(\mathbb{R})$ bude ortogonalna:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & a \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{3} & b \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{3} & c \end{bmatrix}$$

Rješenje: Matrica Q će biti ortogonalna ako i samo ako je $Q^T Q = I$ (jednakost $QQ^T = I$ onda slijedi zbog regularnosti od Q). Prema prethodnom zadatku, to je ekvivalentno s time da stupci matrice Q čine ortonormiran skup. Uočimo da su prva dva stupca matrice Q već ortonormirana. Dakle, tražimo $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ takve da je

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \quad \frac{\sqrt{2}}{2} a - \frac{\sqrt{2}}{2} c = 0, \quad \frac{\sqrt{3}}{3} a + \frac{\sqrt{3}}{3} b + \frac{\sqrt{3}}{3} c = 0.$$

Rješenja ovog (nelinearnog) sustava su

$$(a, b, c) = \pm \frac{\sqrt{6}}{6} (1, -2, 1).$$

Napomenimo kako smo jednako tako mogli tražiti (a, b, c) takve da retci matrice Q čine ortonormirani skup (odnosno, krenuti od jednakosti $QQ^T = I$). ■

Zadatak 3.19. Neka je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ konačan skup normiranih ili ortogonalan skup netrivijalnih vektora konačnodimenzionalnog unitarnog prostora U. Ekvivalentno je

a) $\{e_1, \ldots, e_m\}$ je ortonormirana baza za U,

b) za sve $a, b \in U$ vrijedi $\langle a, b \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle a, e_i \rangle \overline{\langle b, e_i \rangle}$,

c) za svaki $a \in U$ vrijedi **Parsevalova jednakost**:

$$\langle a, a \rangle = |\langle a, e_1 \rangle|^2 + |\langle a, e_2 \rangle|^2 + \cdots + |\langle a, e_m \rangle|^2.$$

Rješenje:

$\boxed{a) \Rightarrow b)}$ Neka je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormirana baza. Tada je za $a, b \in U$

$$\langle a, b \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \langle a, e_i \rangle e_i, b \right\rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle a, e_i \rangle \langle e_i, b \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle a, e_i \rangle \overline{\langle b, e_i \rangle}.$$

$\boxed{b) \Rightarrow c)}$ Tvrdnja direktno slijedi kada u b) uzmemo $b = a$.

$\boxed{c) \Rightarrow a)}$ Uvrštavanjem $a = e_i$, $i = 1, \ldots, m$, u c), dobijemo da je $\{e_1, \ldots, e_m\}$ ortonormiran sustav. Ako nije baza, postoji $f \in U \setminus [\{e_1, \ldots, e_m\}]$. Tada je $f - \sum_{i=1}^{m} \langle f, e_i \rangle e_i$ netrivijalan i okomit na $e_1, \ldots, e_m$, pa njegovim uvrštavanjem u c) dobijemo kontradikciju.

■

Zadatak 3.20. Neka je $\{e_1,\dots,e_m\}$ konačan skup normiranih vektora konačnodimenzionalnog unitarnog prostora U. Ekvivalentno je

a) $\{e_1,\dots,e_m\}$ je ortonormiran sustav za U,

b) za svaki $a \in U$ vrijedi **Besselova nejednakost**:

$$\langle a,a\rangle \geq |\langle a,e_1\rangle|^2 + |\langle a,e_2\rangle|^2 + \cdots + |\langle a,e_m\rangle|^2.$$

Rješenje:

$\boxed{\text{a)} \Rightarrow \text{b)}}$ Neka je $\{e_1,\dots,e_m\}$ ortonormiran sustav. Možemo ga nadopuniti do ortonormirane baze $\{e_1,\dots,e_m,e_{m+1},\dots,e_n\}$ za U. Sada Besselova nejednakost slijedi iz Parsevalove jednakosti za dobivenu bazu.

$\boxed{\text{b)} \Rightarrow \text{a)}}$ Uvrštavanjem $a = e_i$, $i = 1,\dots,m$, u Besselovu nejednakost, dobijemo da je $\{e_1,\dots,e_m\}$ ortonormiran sustav.

■

Kao posljedicu Gram-Schimdtovog teorema dobivamo i još jedan prigodan način za faktorizaciju matrice. Neka je $A = [S_1\ S_2\ \dots\ S_n] \in M_{mn}$ matrica ranga n. Primijenom Gram-Schmidtovog postupka na stupce $\{S_1,\dots,S_n\}$ dobivamo ortonormirani skup $\{E_1,\dots,E_n\}$. Posebno, imamo

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} \langle S_j,E_i\rangle E_i, \qquad j = 1,\dots,n. \tag{10}$$

Ako označimo s $R \in M_n$ matricu takvu da je

$$[R]_{ij} = \begin{cases} \langle S_j,E_i\rangle, & i \leq j \\ 0, & i > j, \end{cases}$$

tada (10) možemo zapisati matrično kao

$$\begin{bmatrix} S_1 & \dots & S_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 & \dots & E_n \end{bmatrix} R.$$

Stavljanjem $Q = \begin{bmatrix} E_1 & \dots & E_n \end{bmatrix} \in M_{mn}$ dobivamo **QR faktorizaciju** matrice A. Pritom je R gornjotrokutasta matrica, a kako stupci matrice Q čine ortonormirani skup, ona zadovoljava jednakost $Q^T Q = I$. Ako je posebno $m = n$, tada je Q dodatno i ortogonalna matrica.

Napomenimo kako QR faktorizacija matrice nije jedinstvena; s obzirom da skup $\{E_1,\dots,E_n\}$ iz Gram-Schmidtovog postupka nije jedinstveno određen, to nisu niti pripadne matrice Q i R.

DZ 3.4. Neka je $A \in M_n$ regularna matrica. Pokažite da postoje jedinstvene matrice $Q,R \in M_n$ takve da je Q ortogonalna i R gornjotrokutasta s **pozitivnim** dijagonalnim elementima takve da je $A = QR$.

Zadatak 3.21. Nađite QR dekompoziciju regularne matrice $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & 7 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Primjenom Gram–Schmidtovog postupka na stupce S_1, S_2, S_3 dobivamo

$$E_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad E_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} \\ \frac{2}{\sqrt{30}} \\ -\frac{5}{\sqrt{30}} \end{bmatrix}, \quad E_3 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Stoga je

$$Q = [E_1\ E_2\ E_3] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \langle S_1,E_1\rangle & \langle S_2,E_1\rangle & \langle S_3,E_1\rangle \\ 0 & \langle S_2,E_2\rangle & \langle S_3,E_2\rangle \\ 0 & 0 & \langle S_3,E_3\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{5} & \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{6}{\sqrt{30}} & \frac{22}{\sqrt{30}} \\ 0 & 0 & \frac{16}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

■

Ukoliko je $A \in M_{mn}$ matrica proizvoljnog ranga r, tada jednostavnom prilagodbom prethodne diskusije možemo dobiti faktorizaciju od A u obliku $A = QR$, gdje je $Q \in M_{mr}$ takva da je $Q^T Q = I$, a $R \in M_{rn}$ takva da je $[R]_{ij} = 0$ za sve $i > j$. Radi jednostavnosti zapisa, pretpostavimo da je prvih r stupaca od A linearno nezavisno. Tada primjenom Gram-Schmidtovog postupka na skup $\{S_1, \ldots, S_r\}$ dobivamo kao i ranije matricu

$$Q = \begin{bmatrix} E_1 & \ldots & E_r \end{bmatrix} \in M_{mr}.$$

Također i dalje imamo

$$S_j = \sum_{i=1}^{j} \langle S_j, E_i \rangle E_i, \qquad j = 1, \ldots, r.$$

Dodatno, sada je i

$$S_j = \sum_{i=1}^{r} \langle S_j, E_i \rangle E_i, \qquad j = r+1, \ldots, n.$$

Stoga možemo definirati $R \in M_{rn}$ s

$$[R]_{ij} = \begin{cases} \langle S_j, E_i \rangle, & i \le j \\ 0, & i > j, \end{cases}$$

te time dobivamo traženu faktorizaciju. U općenitom slučaju gdje nije nužno prvih r stupaca linearno nezavisno, provodimo redom Gram-Schmidtov postupak na stupce matrice A, te izbacujemo one za koje pripadni korak daje nulstupac; ukoliko se neki stupac mogao prikazati kao linearna kombinacija prethodnika, onda se on posebno može prikazati i kao linearna kombinacija dotad konstruiranih ortonormiranih stupaca, pa će pripadna matrica R i dalje biti gornjotrokutasta.

Zadatak 3.22. Pronađite (neku) QR dekompoziciju matrice $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$.

Rješenje: Uočimo da je $S_2 = -S_1$ pa ćemo vektor S_2 izbaciti. Gram–Schmidtov postupak primijenjen na vektore S_1 i S_3 daje

$$E_1 = \frac{S_1}{\|S_1\|} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

$$B_2 = S_3 - \langle S_3, E_1 \rangle E_1 = -\frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix},$$

$$E_2 = \frac{B_2}{\|B_2\|} = B_2.$$

Dakle,

$$Q = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \langle S_1,E_1\rangle & \langle S_2,E_1\rangle & \langle S_3,E_1\rangle \\ 0 & \langle S_2,E_2\rangle & \langle S_3,E_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

DZ 3.5. Nađite QR faktorizaciju matrica

$$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},\qquad B=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&3&3\\-1&-1&5\\1&3&7\end{bmatrix}.$$

3.3 Ortogonalni komplement. Ortogonalni projektor i najbolja aproksimacija

Definicija 3.15. Neka je U unitaran prostor i $M\le U$. **Ortogonalni komplement** potprostora M je skup

$$M^\perp=\{x\in U : x\perp y,\ \forall y\in M\}.$$

Drugim riječima, ortogonalni komplement potprostora M je najveći skup koji je ortogonalan na M (odnosno, sadrži sve vektore koji su ortogonalni na svaki vektor iz M). Ukoliko je $\{b_1,\dots,b_m\}$ neki sustav izvodnica za M, tada se lako vidi da je

$$M^\perp=\{x\in U : x\perp b_j,\ j=1,\dots,m\}.$$

Zadatak 3.23. U prostoru $\mathbb{R}^5$ dan je potprostor $M=[\{(1,2,3,-1,2),(2,4,7,2,-1)\}]$. Odredite $M^\perp$.

Rješenje: Zbog prethodnog komentara je $x\in M^\perp$ ako i samo ako je $x\perp(1,2,3,-1,2)$ i $x\perp(2,4,7,2,-1)$. Ako označimo $x=(x_1,\dots,x_5)$, tada imamo

$$x\in M^\perp \iff \begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-\ x_4+2x_5=0\\ 2x_1+4x_2+7x_3+2x_4-\ x_5=0\end{cases}$$

odakle slijedi da je

$$M^\perp=[\{-2,1,0,0,0),(13,0,-4,1,0),(-17,0,5,0,1)\}].$$

■

Općenito, ako su $a_1,\dots,a_m\in\mathbb{R}^n$ te $M=[\{a_1,\dots,a_m\}]$, tada, uz identifikaciju $\mathbb{R}^n$ i $M_{n,1}(\mathbb{R})$, vidimo da je

$$x\in M^\perp \iff \langle x,a_i\rangle=0,\quad i=1,\dots,m \iff a_i^Tx=0,\quad i=1,\dots,n.$$

Dakle, ako formiramo matricu $A=\begin{bmatrix}a_1 & \dots & a_m\end{bmatrix}\in M_{nm}(\mathbb{R})$, vidimo da je $x\in M^\perp$ ako i samo ako je x^T rješenje homogenog sustava $A^TX=0$. Stoga možemo reći da je skup rješenja homogenog sustava svojevrsni ortogonalni komplement redaka matrice sustava.

U samoj definiciji je ortogonalni komplement naveden kao *skup*. Međutim, kao što su već i prethodni primjeri sugerirali, pokazuje se da je $M^\perp$ zaista potprostor od U, te da je opravdan naziv *komplement*, odnosno da je

$$M\dotplus M^\perp=U.$$

Općenito ćemo za potprostore L,M unitarnog prostora U reći da su međusobno ortogonalni, i pisati $L\perp M$, ako je $\langle x,y\rangle=0$ za sve $x\in L$ i $y\in M$. Za ortogonalne potprostore je presjek uvijek trivijalan; stoga je suma takvih potprostora uvijek direktna. U tom slučaju ćemo takvu sumu zvati ortogonalnom, te ćemo pisati $L\oplus M$. Posebno, zbog ranijih rezultata imamo

$$M\oplus M^\perp=U.$$

Za razliku od direktnog komplementa, postoji točno jedan potprostor L takav da je $M\oplus L=U$; to je upravo $M^\perp$. Iz toga posebno slijedi i

$$\left(M^\perp\right)^\perp=M,\qquad \text{za svaki } M\le U.$$

Koristeći prethodne rezultate i zapažanja, možemo jednostavno pokazati i sljedeću tvrdnju.

Zadatak 3.24. Neka je $M \leq \mathbb{R}^n$ dimenzije r. Pokažite da postoji homogeni $n-r \times n$ sustav takav da je M skup rješenja tog sustava.

Rješenje: Ukoliko je $r=0$ ili $r=n$, tada očito možemo uzeti sustav $IX=0$, odnosno $0X=0$. Za $0<r<n$, neka je $\{a_1,\dots,a_{n-r}\}$ neka baza za $M^\perp$. Stavljanjem $A=\begin{bmatrix} a_1 & \dots & a_{n-r}\end{bmatrix}^T \in M_{n-r,n}(\mathbb{R})$ iz prethodnih razmatranja tada slijedi da je skup rješenja homogenog sustava $AX=0$ jednak upravo $\left(M^\perp\right)^\perp = M$. ■

Sljedeći rezultat nam daje i alternativan način određivanja direktnog komplementa za dani potprostor M.

Propozicija 3.16. *Neka je U unitaran prostor dimenzije n te $M \leq U$. Neka je $\{e_1,\dots,e_k\}$ neka ortonormirana baza za M, te $\{e_{k+1},\dots,e_n\}$ njeno nadopunjenje do ortonormirane baze za U. Tada je*

$$M^\perp = [\{e_{k+1},\dots,e_n\}].$$

Zadatak 3.25. Koristeći prethodnu propoziciju, riješite Zadatak 3.23.

Rješenje: Ako dane generatore za M označimo redom s b_1 i b_2, tada se lako vidi da za b_3,b_4,b_5 možemo uzeti redom prva tri vektora kanonske baze za $\mathbb{R}^5$, te time dobiti bazu $\{b_1,\dots,b_5\}$ za cijeli $\mathbb{R}^5$. Provođenjem Gram-Schmidtovog postupka na ovoj bazi dobivamo ortonormiranu bazu $\{e_1,\dots,e_5\}$. Pritom je

$$[\{e_1,e_2\}] = [\{b_1,b_2\}] = M,$$

a zbog prethodne propozicije i

$$[\{e_3,e_4,e_5\}] = M^\perp.$$

Provedba ovog postupka je ostavljena za vježbu. ■

Zadatak 3.26. Neka je $P=\{p\in\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) : p(x)=p(-x)\}$ i $N=\{p\in\mathscr{P}_n(\mathbb{R}) : p(x)=-p(-x)\}$. Pokažite da su P i N jedan drugome ortogonalni komplementi, pri čemu prostor $\mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ promatramo s obzirom na skalarni produkt $\langle p,q\rangle = \int_{-1}^{1} p(x)q(x)dx$.

Rješenje: Na LA1 smo pokazali da vrijedi $P \dotplus N = \mathscr{P}_n$, pa preostaje provjeriti da su ovi potprostori međusobno ortogonalni. Međutim, to slijedi direktno iz činjenice da je produkt parne i neparne funkcije neparna funkcija, te činjenice da je integral neparne funkcije po simetričnom segmentu jednak 0. ■

DZ 3.6. Neka su L, M potprostori od U. Dokažite da je:

(a) $(L+M)^\perp = L^\perp \cap M^\perp$,

(b) $(L\cap M)^\perp = L^\perp + M^\perp$.

Rješenje:

(a) Dokazujemo dvije inkluzije.

$\boxed{\subseteq}$ Primijetimo prvo kako za proizvoljne potprostore M_1, M_2 unitarnog prostora U vrijedi

$$M_1 \leq M_2 \iff M_1^\perp \leq M_2^\perp.$$

Naime, očito je svaki vektor ortogonalan na cijeli M_2 ujedno ortogonalan i na M_1, dok druga implikacija slijedi primjenom upravo pokazane na potprostore $M_1^\perp$ i $M_2^\perp$.

Sada imamo $L,M \leq L+M$, odakle slijedi $(L+M)^\perp \leq L^\perp$ i $(L+M)^\perp \leq M^\perp$, odnosno $(L+M)^\perp \leq L^\perp \cap M^\perp$.

$\boxed{\supseteq}$ Ako je $x \in L^\perp \cap M^\perp$, onda je $x \perp L$ i $x \perp M$. Za proizvoljan $y = a + b \in L + M$ je

$$\langle x, y\rangle = \langle x, a+b\rangle = \langle x, a\rangle + \langle x, b\rangle = 0 + 0 = 0.$$

Dakle, $x \in (L+M)^\perp$

(b) Stavimo u (a) $L^\perp$ umjesto L i $M^\perp$ umjesto M. Imamo:

$$\left(L^\perp + M^\perp\right)^\perp = \left(L^\perp\right)^\perp \cap \left(M^\perp\right)^\perp = L \cap M.$$

Uzimanjem ortogonalnog komplementa lijeve i desne strane, dobivamo

$$(L\cap M)^\perp = \left(\left(L^\perp + M^\perp\right)^\perp\right)^\perp = L^\perp + M^\perp.$$

■

DZ 3.7. Nađite ortogonalni komplement u $\mathbb{R}^3$ potprostora $[\{(1,0,1),(1,2,-2)\}]$.

DZ 3.8. U unitarnom prostoru $M_3(\mathbb{R})$ sa standardnim skalarnim produktom dan je potprostor $M = \{X \in M_3(\mathbb{R}) : XA = X\}$, pri čemu je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite $M^\perp$.

Rješenje: Odredimo najprije bazu za potprostor M. Kako je $X \in M$ ako i samo ako je $X(A-I) = 0$, jednostavno se dobije da je jedna baza za M dana sa

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}.$$

Ako označimo te matrice redom s $B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6$, tada je

$$Y \in M^\perp \iff Y \perp B_j,\ j = 1, \ldots, 6,$$

odakle slijedi

$$M^\perp = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \right\}\right].$$

■

Prisjetimo se kako smo za direktnu sumu $M \dot{+} L = V$ u vektorskom prostoru V definirali projektor na M u smjeru L s

$$P_M(x_M + x_L) = x_M, \qquad x_M \in M, x_L \in L.$$

Poseban slučaj ovog linearnog operatora je onaj kada imamo ortogonalnu sumu $M \oplus M^\perp = U$ u unitarnom prostoru U. Za pripadni projektor P_M ćemo reći da je **ortogonalni projektor** na M (primijetimo kako ovdje nije potrebno posebno navoditi smjer projekcije, on je već sadržan u nazivu *ortogonalni*). Sljedeći rezultat daje eksplicitnu formulu za djelovanje takvog operatora.

Propozicija 3.17. *Neka je M potprostor konačnodimenzionalnog unitarnog prostora U te $\{e_1,\dots,e_k\}$ neka ortonormirana baza za M. Tada je*

$$P_M x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, e_i\rangle e_i.$$

Napomenimo i sljedeću jednostavnu posljedicu činjenice da je $\left(M^\perp\right)^\perp = M$: ako je P_M ortogonalni projektor na M, tada je $I - P_M$ ortogonalni projektor na $M^\perp$.

Zadatak 3.27. U unitarnom prostoru $\mathbb{R}^4$ (sa standardnim skalarnim produktom) zadan je vektor $x = (1,1,2,2)$ i potprostor M svojom bazom $a = (1,1,1,0)$ i $b = (1,0,1,1)$. Prikažite vektor x u obliku $x = y+z$, gdje je $y \in M$ i $z \in M^\perp$.

Rješenje: Dovoljno je odrediti $y := P_M x$, gdje je P_M ortogonalni projektor na M. Tada je traženi z jednak $(I - P_M)x = x - y$. Za pronalazak $P_M x$ ćemo koristiti prethodnu propoziciju, pa nam je potrebna jedna ortonormirana baza za M. Primjenom Gram-Schmidtovog postupka na $\{a,b\}$ dobivamo

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{a}{\|a\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0)\\
f_2 &= b - \langle b, e_1\rangle e_1 = (1,0,1,1) - \frac{2}{\sqrt{3}}\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right)\\
e_2 &= \frac{f_2}{\|f_2\|} = \frac{3}{\sqrt{15}}\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, 1\right) = \frac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,1,3).
\end{aligned}$$

Sada je

$$y = \langle x, e_1\rangle e_1 + \langle x, e_2\rangle e_2 = \frac{4}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1,0) + \frac{7}{\sqrt{15}}\cdot\frac{1}{\sqrt{15}}(1,-2,1,3) = \frac{1}{5}(9,2,9,7)$$

pa je

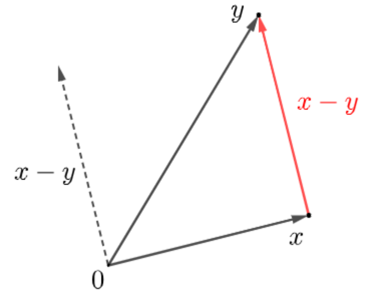
$$z = x - y = \frac{1}{5}(-4,3,1,3).$$

■

Primijetimo razliku u određivanju rastava proizvoljnog vektora s obzirom na ortogonalnu sumu u odnosu na određivanje rastava vektora u odnosu na (općenitu) direktnu sumu. Dok smo za određivanje rastava $x = x_M + x_L$ u slučaju $L \dot{+} M = U$ morali pronaći baze i za M i za L da bismo dobili traženi rastav, ovdje je dovoljno pronaći samo ortonormiranu bazu za M; propozicija koja prethodi zadatku garantira da je to dovoljno informacija za odrediti x_M, a onda naravno i $x_{M^\perp}$.

U unitarnom prostoru možemo na prirodan način uvesti i pojam **udaljenosti**; udaljenost dva vektora $x, y \in U$ označavamo s $d(x,y)$ te definiramo s

$$d(x,y) := \|x - y\|.$$



Slika 6: Udaljenost vektora x i y kao norma vektora $x - y$

Nadalje, prirodno se nameće i definicija udaljenosti vektora x od skupa $S \subseteq U$ kao

$$d(x,S) := \inf_{y \in S} \|x-y\|,$$

te sljedeće pitanje: postoji li za zadani $x \in U$ neki $x_0 \in S$ takav da se gornji infimum ujedno i postiže, odnosno takav da je

$$\|x-x_0\| \leq \|x-y\| \text{ za svaki } y \in S,$$

te ako postoji, je li takav x_0 jedinstven? Općenito odgovor na niti jedno od ova dva pitanja ne mora biti potvrdan.

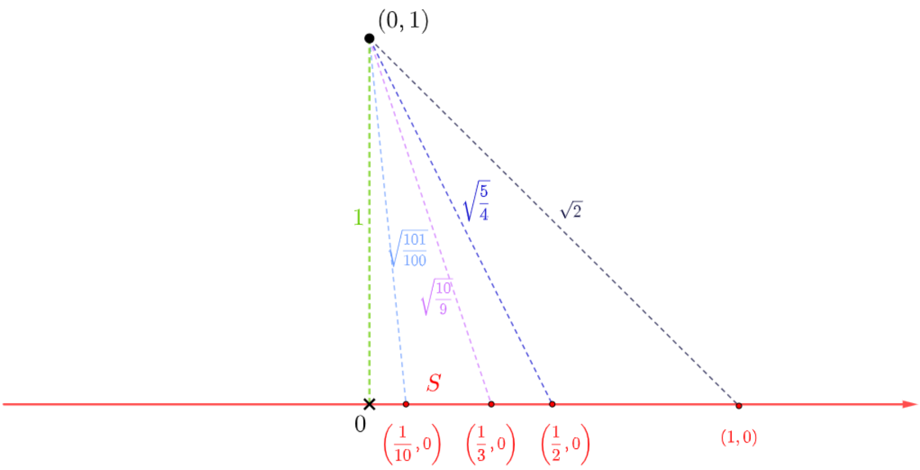
Primjer 3.18. (a) Neka je dan vektor $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ i skup $S = \{(x,0) : x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. Zbog Pitagorinog teorema je

$$\|(0,1)-(x,0)\|^2 = \|(0,1)\|^2 + \|(x,0)\|^2 \geq 1,$$

odnosno $d((0,1),S) \geq 1$. S druge strane, za niz $\left(\frac{1}{n},0\right) \in S$ slijedi

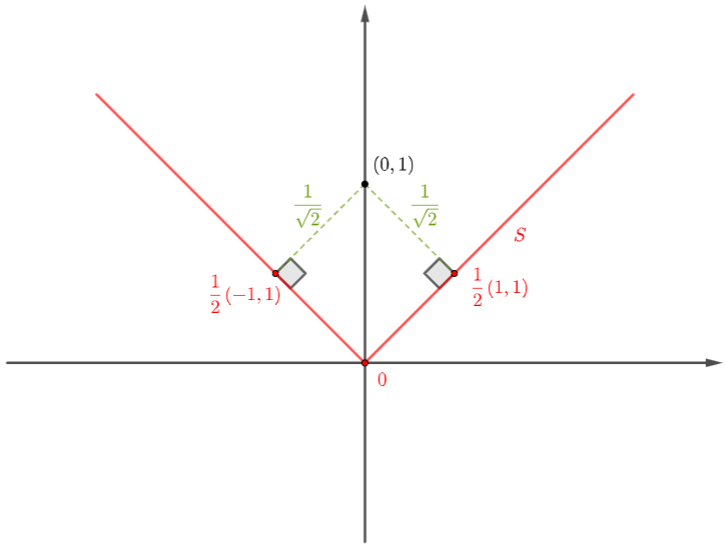
$$\left\|(0,1)-\left(\frac{1}{n},0\right)\right\| = \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \to 1,$$

pa vidimo da je $d((0,1),S) = 1$. S druge strane, ne postoji niti jedan element S za koji se ta udaljenost postiže (najbliže je ishodište koje je izbačeno iz S).



Slika 7: Udaljenost $(0,1)$ od nekih vektora iz S i ishodišta

(b) Neka je dan vektor $(0,1) \in \mathbb{R}^2$ i skup $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = |x|\}$. Sličnim razmatranjima kao u (a) dijelu možemo vidjeti da je $d((0,1),S) = \frac{1}{\sqrt{2}}$, te se ta vrijednost postiže, ali ne za jedan, već za dva vektora iz S: za $\frac{1}{2}(1,1)$ i $\frac{1}{2}(-1,1)$.



Slika 8: Dva vektora iz S za koje se minimalna udaljenost postiže

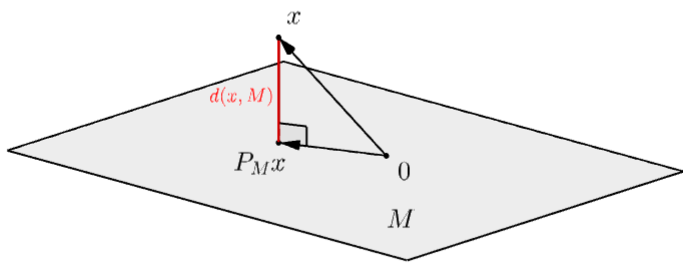
U nastavku se fokusiramo na poseban slučaj, onaj kada S nije proizvoljan skup, već potprostor danog unitarnog prostora. U tom slučaju imamo idući rezultat, koji daje potvrdan odgovor na oba ranije postavljena pitanja.

Propozicija 3.19. *Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor, $x \in U$ te $M \leq U$. Tada postoji jedinstveni $x_0 \in M$ takav da je*

$$\|x - x_0\| \leq \|x - y\| \text{ za svaki } y \in M.$$

Štoviše, vrijedi da je x_0 upravo ortogonalna projekcija x na M, odnosno $x_0 = P_M x$.

Dakle, za dane $x \in U$ i $M \leq U$ postoji vektor iz M takav da je gornji infimum ujedno i minimum, te je taj vektor ortogonalna projekcija x na M, odnosno $P_M x$. U tom slučaju ćemo vektor $P_M x$ zvati **najboljom aproksimacijom vektora x vektorima iz M** (dok je iznos $d(x,M) = \|x - P_M x\|$ udaljenost x od M).



Slika 9: Ortogonalna projekcija kao najbolja aproksimacija x elementima iz M

Zadatak 3.28. Neka je $M = [\{(1,1,0,0),(0,1,1,0)\}]$ potprostor unitarnog prostora $\mathbb{R}^4$ sa standardnim skalarnim produktom. Odredite najbolju aproksimaciju vektora $x = (2,0,0,7)$ vektorima iz M. Kolika je udaljenost vektora x od potprostora M?

Rješenje: Stavimo $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (0,1,1,0)$ i ortonormirajmo skup $\{a_1, a_2\}$. Dobivamo vektore

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1,0,0), \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,1,2,0).$$

Odredimo a, gdje je $x = a + b$, $a \in M$, $b \in M^\perp$:

$$a = \langle x, u_1 \rangle u_1 + \langle x, u_2 \rangle u_2 = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right).$$

Također je

$$\|x-a\| = \|b\| = \left\|(2,0,0,7) - \left(\frac{4}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3},0\right)\right\| = \sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 7^2} = \frac{\sqrt{453}}{3}.$$

■

Zadatak 3.29. Odredite $p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ takav da je $p(0) = p'(0) = 0$ i da je vrijednost

$$\int_0^1 (x^2+1-p(x))^2 dx$$

najmanja moguća.

Rješenje: Neka je $M = \{p \in \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) : p(0) = p'(0) = 0\}$. Tada je $M \leq \mathscr{P}_3(\mathbb{R})$. Označimo $p_0(x) = x^2+1$. Prostor $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ promatramo uz skalarni produkt $\langle p,q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$.

Sada zadatak možemo reformulirati: odredite $p \in M$ takav da je

$$\|p_0 - p\| \leq \|p_0 - q\|, \quad \forall q \in M.$$

Dakle, tražimo najbolju aproksimaciju vektora p_0 vektorima iz M. Uočimo da je $M = \{p(x) = ax^3 + bx^2 \,|\, a,b \in \mathbb{R}\}$, odnosno $M = [\{x^3, x^2\}]$. Stavimo $p_1(x) = x^3$, $p_2(x) = x^2$. Primjenom G-S postupka na vektore p_1 i p_2 dobijemo vektore

$$e_1(x) = \sqrt{7}x^3,\ e_2(x) = 6\sqrt{5}\left(x^2 - \frac{7}{6}x^3\right).$$

Najbolja aproksimacija je dana s $p_M = \langle p_0, e_1\rangle e_1 + \langle p_0, e_2\rangle e_2$ (dovršite za DZ). ■

4 Linearni operatori na unitarnim prostorima

4.1 Linearni funkcionali na unitarnim prostorima

Započet ćemo s najjednostavnijim tipom linearnog operatora: linearnim funkcionalima na unitarnim prostorima. Neka je U unitaran prostor nad poljem $\mathbb{F} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$, te neka je $\{e_1,\ldots,e_n\}$ neka ortonormirana baza za U. Tada za proizvoljan $f \in U^*$ i $x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle e_i$ vrijedi

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i\rangle f(e_i) = \left\langle x, \sum_{i=1}^n \overline{f(e_i)} e_i \right\rangle.$$

Stavljanjem $a = \sum_{i=1}^n \overline{f(e_i)} e_i$ vidimo da se svaki $f \in U^*$ može zapisati u obliku

$$f(x) = \langle x, a\rangle.$$

Dakle, svaki linearan funkcional na konačnodimenzionalnom prostoru je oblika $f = \langle \cdot, a\rangle$ za neki $a \in U$. S obzirom da je skalarni produkt linearan u prvoj varijabli, očito je za svaki $a \in U$ ovako definirano preslikavanje jedan linearan funkcional na U, pa vidimo da su zapravo svi funkcionali na unitarnom prostoru reprezentirani skalarnim produktom s fiksnim vektorom. Precizniji rezultat je dan idućim teoremom.

Teorem 4.1 (Rieszov teorem o reprezentaciji funkcionala)**.** *Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor i f linearan funkcional na U. Tada postoji jedinstven vektor $a \in U$ takav da je*

$$f(x) = \langle x, a\rangle, \quad x \in U.$$

Prethodna diskusija nam ujedno daje i eksplicitnu formulu za reprezentant funkcionala f: to je vektor $a = \sum_{i=1}^{n} \overline{f(e_i)} e_i$, gdje je $\{e_1, \ldots, e_n\}$ neka ortonormirana baza za U. U slučaju da već nemamo "spremnu" ortonormiranu bazu za dani unitarni prostor, dovoljno je uzeti proizvoljnu bazu $\{b_1, \ldots, b_n\}$ za U: tada nam jednakosti

$$f(b_j) = \langle b_j, a \rangle, \qquad j = 1, \ldots, n$$

daju sustav n linearnih jednadžbi s n nepoznanica za vektor $a = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ (odnosno, za njegove koordinate $a_1, \ldots, a_n$), čijim rješavanjem dobijemo traženi reprezentant.

Zadatak 4.1. Zadan je unitaran prostor $\mathbb{R}^3$ sa skalarnim produktom

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + 3x_2y_2 + x_3y_3.$$

Za funkcional $f(x, y, z) = x - 2y + 4z$ odredite $a \in \mathbb{R}^3$ takav da je $f(x) = \langle x, a \rangle$, za sve $x \in \mathbb{R}^3$.

Rješenje: Neka je $\{b_1, b_2, b_3\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Primijetimo kako to nije ortonormirana baza s obzirom na zadani skalarni produkt (skup je ortogonalan, ali vektori nisu normirani). Neka je $a = (a_1, a_2, a_3)$ traženi reprezentant. Tada imamo

$$\begin{aligned} 2a_1 &= \langle b_1, a \rangle = f(b_1) = 1 \\ 3a_2 &= \langle b_2, a \rangle = f(b_2) = -2 \\ a_3 &= \langle b_3, a \rangle = f(b_3) = 4, \end{aligned}$$

odakle slijedi

$$a = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 4 \right).$$

Alternativno, mogli smo prvo normirati skup $\{b_1, b_2, b_3\}$ te tako dobiti ortonormiranu bazu $\{e_1, e_2, e_3\}$, gdje je $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,0), e_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(0,1,0)$ i $e_3 = (0,0,1)$. Sada možemo koristiti formulu prema kojoj je

$$a = f(e_1)e_1 + f(e_2)e_2 + f(e_3)e_3 = \left(\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 4 \right).$$

■

DZ 4.1. Umjesto standardnog skalarnog produkta, promotrimo $\mathbb{R}^3$ sa skalarnim produktom (nije potrebno provjeravati)

$$\langle (x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3) \rangle = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + x_3y_3 - x_1y_2 - x_2y_1 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

Odredite reprezentant funkcionala f iz prethodnog zadatka (uz ovaj skalarni produkt).

Zadatak 4.2. U unitarnom prostoru $\mathscr{P}_2$ sa skalarnim produktom

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(t)q(t)\mathrm{d}t$$

zadan je funkcional $f(p) = \dfrac{p(0) + p'(0)}{2}$. Odredite $r \in \mathscr{P}_2$ takav da je $f(p) = \langle p, r \rangle$, za sve $p \in \mathscr{P}_2$.

Rješenje: Neka je $r(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2$ i uzmimo $p_0(t) = 1$, $p_1(t) = t$, $p_2(t) = t^2$, kanonsku bazu za $\mathscr{P}_2$. Imamo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &= f(p_0) = \langle p_0, r \rangle = 2a_0 + \frac{2}{3}a_2 \\ \frac{1}{2} &= f(p_1) = \langle p_1, r \rangle = \frac{2}{3}a_1 \\ 0 &= f(p_2) = \langle p_2, r \rangle = \frac{2}{3}a_0 + \frac{2}{5}a_2. \end{aligned}$$

Rješavanjem sustava dobijemo $r(t) = \frac{9}{16} + \frac{3}{4}t - \frac{15}{16}t^2$. ■

Zadatak 4.3. Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor, $f \in U^*$ te $a \in U$ njegov reprezentant. Tada je
$$\operatorname{Ker} f = [\{a\}]^{\perp}.$$

Rješenje: Imamo sljedeći niz ekvivalencija
$$x \in \operatorname{Ker} f \iff \langle x, a\rangle = 0 \iff x \perp [\{a\}] \iff x \in [\{a\}]^{\perp}.$$
■

4.2 Hermitski adjungirani operator

Teorem 4.2. *Neka su U i V konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(U,V)$. Tada postoji jedinstveni operator $A^* \in L(V,U)$ takav da je*
$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle, \quad \forall x \in U, y \in V.$$
*Kažemo da je operator A^* **hermitski adjungiran** operatoru A.*

Zadatak 4.4. Zadan je linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ s
$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2, x_2, x_1+x_2+x_3).$$
Odredite A^*.

Rješenje: Neka su $x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$ proizvoljni. Tada je
$$\begin{aligned}\langle Ax, y\rangle &= \langle (x_1+x_2,x_2,x_1+x_2+x_3),(y_1,y_2,y_3)\rangle\\ &= (x_1+x_2)y_1 + x_2y_2 + (x_1+x_2+x_3)y_3\\ &= x_1(y_1+y_2) + x_2(y_1+y_2+y_3) + x_3y_3 = \langle x, (y_1+y_2, y_1+y_2+y_3, y_3)\rangle.\end{aligned}$$
Kako su $x, y \in \mathbb{R}^3$ bili proizvoljni, zbog jedinstvenosti adjungiranog operatora slijedi
$$A^*(y_1,y_2,y_3) = (y_1+y_2, y_1+y_2+y_3, y_3).$$
■

Zadatak 4.5. Neka je $A \in M_{mn}$, te $L_A \in L(M_{np}, M_{mp})$ linearni operator dan s $L_AX = AX$ te $R_A \in L(M_{pm}, M_{pn})$ dan s $R_A(X) = XA$. Odredite $(L_A)^*$ i $(R_A)^*$.

Rješenje: Za sve $X \in M_{np}$ i $Y \in M_{mp}$ imamo
$$\langle L_AX, Y\rangle = \langle AX, Y\rangle = \operatorname{tr}((AX)Y^*) = \operatorname{tr}(A(XY^*)) = \operatorname{tr}((XY^*)A) = \operatorname{tr}(X(A^*Y)^*) = \langle X, A^*Y\rangle,$$
pri čemu smo u četvrtoj jednakosti koristili komutativnost traga za matrice A i XY^*. Zaključujemo da je $(L_A)^* = L_{A^*}$.

Potpuno analogno slijedi i da je $(R_A)^* = R_{A^*}$. ■

Zadatak 4.6. Neka je U konačnodimenzionalni vektorski prostor, $M \leq U$ i P_M ortogonalni projektor na M. Odredite P_M^*.

Rješenje: Neka su $x = x_M + x_{M^\perp}$ i $y = y_M + y_{M^\perp}$ proizvoljni. Tada je

$$\langle Px, y\rangle = \langle x_M, y_M + y_{M^\perp}\rangle = \langle x_M, y_M\rangle = \langle x_M + x_{M\perp}, y_M\rangle = \langle x, Py\rangle.$$

Stoga je $P^* = P$ (kasnije ćemo vidjeti da su ortogonalni projektori točno oni projektori za koje je $P^* = P$).
■

Navedimo sada i neke od rezultata koji nam govore kako se hermitsko adjungiranje ponaša s obzirom na neke od standardnih operacija nad linearnim operatorima.

Propozicija 4.3. *Neka su U, V, W končnodimenzionalni unitarni prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Tada vrijedi:*

(a) $(A+B)^* = A^* + B^*$ *za sve* $A, B \in L(U,V)$

(b) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha}A^*$ *za sve* $\alpha \in \mathbb{F}$ *i* $A \in L(U,V)$

(c) $(AB)^* = B^*A^*$ *za sve* $A \in L(U,V)$ *i* $B \in L(V,W)$

(d) $(A^*)^* = A$ *za sve* $A \in L(U,V)$

(e) Ako je $A \in L(U,V)$ regularan, tada je i A^* regularan te vrijedi $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Zadatak 4.7. Neka su $A, B \in M_n$, te $T, S \in L(M_n)$ linearnii operatori zadani s $T(X) = AXB$ i $S(X) = AX - XB$. Odredite T^* i S^*.

Rješenje: Primijetimo kako zadane operatore možemo zapisati kao

$$T = L_A R_B, \qquad S = L_A - R_B,$$

pri čemu su $L_A, R_A \in L(M_n)$ linearni operatori kao u prethodnom zadatku. Sada je zbog prethodne propozicije

$$\begin{aligned} T^* &= (L_A R_B)^* = (R_B)^*(L_A)^* = R_{B^*}L_{A^*} \\ S^* &= (L_A - R_B)^* = (L_A)^* - (R_B)^* = L_{A^*} - R_{B^*}, \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} T^*(X) &= A^*XB^*, \qquad X \in M_n \\ S^*(S) &= A^*X - XB^*, \qquad X \in M_n. \end{aligned}$$

■

Zadatak 4.8. Neka je U unitaran prostor, te $x, y \in U$. Zadano je preslikavanje $f_{x,y} : U \to U$ s $f_{x,y}(z) = \langle z, y\rangle x$.

(a) Dokažite da je $f_{x,y}$ linearan operator.

(b) Dokažite da je $f_{x,y} \circ f_{y,z} = \|y\|^2 f_{x,z}$.

(c) Odredite $(f_{x,y})^*$.

Rješenje:

(a) Za $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ i $z, w \in U$ vrijedi

$$f_{x,y}(\alpha z + \beta w) = \langle \alpha z + \beta w, y\rangle x = \alpha\langle z, y\rangle x + \beta\langle w, y\rangle x = \alpha f_{x,y}(z) + \beta f_{x,y}(w).$$

(b) Za svaki $w \in U$ vrijedi

$$(f_{x,y} \circ f_{y,z})(w) = f_{x,y}(\langle w,z\rangle y) = \langle w,z\rangle f_{x,y}(y) = \langle w,z\rangle\langle y,y\rangle x = \|y\|^2\langle w,z\rangle x = \|y\|^2 f_{x,z}(w).$$

(c) Za svaki $z,w \in U$ imamo

$$\langle f_{x,y}(z),w\rangle = \langle\langle z,y\rangle x,w\rangle = \langle z,y\rangle\langle x,w\rangle = \left\langle z,\overline{\langle x,w\rangle}y\right\rangle = \langle z,\langle w,x\rangle y\rangle = \langle z,f_{y,x}(w)\rangle.$$

Dobili smo da je $f_{x,y}^* = f_{y,x}$.

■

Kao poseban slučaj prethodnog zadatka, neka je $U = \mathbb{F}^n$ te $x = (x_1,\dots,x_n), y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{F}^n$. Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{F}^n$. Tada je

$$f_{x,y}(e_j) = \langle e_j,y\rangle x = \overline{y_j}x, \qquad j = 1,\dots,n,$$

odakle odmah slijedi da za matrični zapis operatora $f_{x,y}$ u bazi (e) imamo

$$[f_{x,y}(e)]_{ij} = x_i\overline{y_j},$$

odnosno imamo

$$f_{x,y}(e) = x(e)y(e)^*.$$

Iz ove jednakosti se i jednostavnije očitavaju identiteti iz (b) i (c) podzadatka, odnosno

$$(f_{x,y} \circ f_{y,z})(e) = f_{x,y}(e)f_{y,z}(e) = x(e)\underbrace{y(e)^*y(e)}_{\|y(e)\|^2}z(e)^* = \|y(e)\|^2 f_{x,z}(e)$$

$$(f_{x,y})^*(e) = f_{x,y}(e)^* = y(e)x(e)^* = f_{y,x}(e).$$

Spomenimo i kako se preslikavanje koje vektorima $x,y \in \mathbb{F}^n$ pridružuje linearan operator na $\mathbb{F}^n$ (ili matricu iz $M_n(\mathbb{F})$ po odgovarajućoj identifikaciji) na ovakav način zove još i **tenzorski produkt** x **i** y i označava s $x \otimes y$.

Navedimo sada i vezu matričnih zapisa operatora $A \in L(U,V)$ i operatora $A^* \in L(V,U)$.

Propozicija 4.4. *Neka su U,V konačnodimenzionalni unitarni prostori nad poljem $\mathbb{F}$, te (e) i (f) redom ortonormirane baze za U i V. Tada je*

$$(A^*)(e,f) = A(f,e)^*.$$

Istaknimo kako je ključno za prethodnu propoziciju da promatramo matrične zapise u paru ortonormiranih baza, što možemo vidjeti i na sljedećem primjeru.

Primjer 4.5. Neka su $b_1 = (1,0)$ i $b_2 = (1,1)$ te $P \in L(\mathbb{R}^2)$ (kosi) projektor na $[\{b_1\}]$ u smjeru $[\{b_2\}]$. Ako s (b) označimo (neortonormiranu) bazu $\{b_1,b_2\}$, tada je

$$P(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Nadalje, jednostavno se dobije formula za eksplicitno djelovanje operatora P; vrijedi

$$P(x_1,x_2) = (x_1 - x_2, 0), \qquad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Odredimo sada P^*. Za sve $(x_1,x_2),(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ imamo

$$\langle P(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle = \langle (x_1-x_2,0),(y_1,y_2)\rangle = (x_1-x_2)y_1 = \langle (x_1,x_2),(y_1,-y_1)\rangle.$$

Stoga je $P^*(y_1,y_2) = (y_1,-y_1)$, pa vidimo da je P^* projektor na $[\{(1,-1)\}]$ u smjeru $[\{(0,1)\}]$. Posebno, vidimo da je $P^* \neq P$. Konačno, matrični zapis ovog operatora u bazi (b) je dan s

$$P^*(b) = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix},$$

pa vidimo i da je $P^*(b) \neq P(b)^*$.

Zadatak 4.9. (a) Definiramo preslikavanje $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathscr{P}_1 \times \mathscr{P}_1 \to \mathbb{R}$ s

$$\langle p,q\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1), \quad p,q \in \mathscr{P}_1.$$

Pokažite da je time dan jedan skalarni produkt na $\mathscr{P}_1$.

(b) Promatramo sada $\mathscr{P}_1$ uz skalarni produkt kao u (a). Neka je $A : \mathscr{P}_1 \to \mathscr{P}_1$ linearan operator zadan s

$$Ap(t) = 2p(t) - p'(t), \quad p \in \mathscr{P}_1$$

Odredite matricu hermitski adjungiranog operatora operatoru A u bazi $\{1,t\}$.

Rješenje:

(a) Linearnost preslikavanja u prvoj varijabli te simetričnost su očite. Nadalje, za proizvoljni $p \in \mathscr{P}_1$ imamo

$$\langle p,p\rangle = p(0)^2 + p(1)^2 \geq 0,$$

te je $\langle p,p\rangle = 0$ ako i samo ako je $p(0) = p(1) = 0$. Kako je $p \in \mathscr{P}_1$, to je ekvivalentno s time da je $p \equiv 0$. Dakle, ovo je zaista skalarni produkt na $\mathscr{P}_1$.

(b) Riješimo prvo ovaj zadatak koristeći prethodnu propoziciju. Označimo $f_1(t) = 1, f_2(t) = t$. Ortonormiranjem baze $(f) = (f_1, f_2)$ po G-S postupku dobivamo

$$e_1(t) = \frac{1}{\sqrt{2}},\ e_2(t) = \sqrt{2}\left(t - \frac{1}{2}\right).$$

Uvedimo oznaku $(e) = \{e_1, e_2\}$. Imamo

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Kako je baza (e) ortonormirana, to je

$$A^*(e) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sada je $A^*(f) = I(f,e)A^*(e)I(e,f) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}.$

Alternativno, možemo prvo odrediti eksplicitno djelovanje operatora A^*, te zatim jednostavno izračunati $A^*(f)$ direktno. Vidimo kako A možemo zapisati kao

$$A = 2I - D,$$

gdje je D operator deriviranja. Tada je $A^* = 2I - D^*$, pa preostaje odrediti D^*. Neka su $p,q \in \mathscr{P}_1$ proizvoljni. Tada je

$$\langle Dp,q\rangle = p'(0)q(0) + p'(1)q(1).$$

Označimo nadalje $p(t) = at + b$. Tada je $p'(t) = a = p(1) - p(0)$ za svaki $t \in \mathbb{R}$, pa uvrštavanjem u gornju jednakost dobivamo

$$\begin{aligned}
\langle Dp,q\rangle &= \Big(p(1) - p(0)\Big)q(0) + \Big(p(1) - p(0)\Big)q(1) \\
&= p(0)\underbrace{\Big(-q(0) - q(1)\Big)}_{D^*q(0)} + p(1)\underbrace{\Big(q(0) + q(1)\Big)}_{D^*q(1)} \\
&= \langle p, D^*q\rangle,
\end{aligned}$$

gdje je
$$(D^*q)(t) = 2\big(q(0)+q(1)\big)t - \big(q(0)+q(1)\big).$$
Sada je, uz iste oznake kao na početku prve varijante rješenja,
$$D^*f_1(t) = 4t-2, \qquad D^*f_2(t) = 2t-1,$$
pa je
$$A^*f_1(t) = 2f_1(t) - D^*f_1(t) = -4t+4, \qquad A^*f_2(t) = 2f_2(t) - D^*f_2(t) = 1,$$
odakle odmah dobivamo već dobiveni matrični zapis $A^*(f)$.

■

DZ 4.2. Neka je $n \in \mathbb{N}$ te $x_0,\dots,x_n \in \mathbb{R}$ međusobno različiti. Tada je sa
$$\langle p,q\rangle = \sum_{i=0}^{n} p(x_i)q(x_i), \qquad p,q \in \mathscr{P}_n$$
dan jedan skalarni produkt na $\mathscr{P}_n$.

Zadatak 4.10. Neka su U i V konačnodimenzionalni unitarni prostori te $A \in L(U,V)$. Tada vrijedi

(a) $\operatorname{Ker} A^*A = \operatorname{Ker} A$

(b) $r(A^*A) = r(A)$.

Nadalje, primjerom pokažite da niti u slučaju $U = V$ ne mora vrijediti $\operatorname{Im} A^*A = \operatorname{Im} A$.

Rješenje:

(a) Očito je $\operatorname{Ker} A \leq \operatorname{Ker} A^*A$. S druge strane, ako je $x \in \operatorname{Ker} A^*A$, tada je posebno
$$0 = \langle A^*Ax, x\rangle = \|Ax\|^2,$$
pa vidimo da je $x \in \operatorname{Ker} A$.

(b) Prema teoremu o rangu i defektu i upravo dokazanom (a) dijelu, imamo
$$r(A^*A) = \dim U - d(A^*A) = \dim U - d(A) = r(A).$$

Za posljednji dio možemo uzeti $U = \mathbb{R}^2$ i operator A dan matričnim zapisom u kanonskoj bazi
$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$
Tada je $(A^*A)(e) = A(e)^*A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, pa je
$$\operatorname{Im} A^*A = [\{e_2\}] \neq [\{e_1\}] = \operatorname{Im} A.$$

■

Zadatak 4.11. Neka je $R_\varphi \in L(\mathbb{R}^2)$ operator rotacije za kut φ. Odredite $(R_\varphi)^*$.

Rješenje: Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^2$. Tada je

$$(R_\varphi^*)(e) = R_\varphi(e)^* = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} = R_{-\varphi}(e),$$

pa zaključujemo da je $(R_\varphi)^* = R_{-\varphi}$. ■

Zadatak 4.12. Neka je $R_{e_3,\varphi} \in L(\mathbb{R}^3)$ operator rotacije oko z–osi za kut φ. Odredite $(R_{e_3,\varphi})^*$.

Rješenje: Slično kao u prethodnom zadatku vidimo da je $(R_{e_3,\varphi})^* = R_{e_3,-\varphi}$. ■

Zadatak 4.13. Neka je $v \in \mathbb{R}^3$ jedinični vektor te $A \in L(\mathbb{R}^3)$ operator osne simetrije s obzirom na pravac kroz ishodište smjera v. Odredite A^*.

Rješenje: Vektor v možemo dopuniti do ortonormirane baze $(f) = \{v, f_1, f_2\}$ za $\mathbb{R}^3$. Kako su f_1 i f_2 okomiti na v, za njihove osne simetrije s obzirom na pravac smjera v vrijedi

$$Af_1 = -f_1, \quad Af_2 = -f_2.$$

Tada je $A(f) = \operatorname{diag}(1,-1,-1)$. Posebno, to je hermitska matrica, pa zaključujemo da je $A^* = A$. ■

U Zadatku 3.23 i naknadnoj diskusiji smo već vidjeli vezu matrice A i homogenog sustava $A^TX = 0$: potprostor kojeg razapinju stupci te matrice je ortogonalni komplement rješenja homogenog sustava $A^TX = 0$. Sada navodimo rezultat koji daje poopćenje te primjedbe.

Propozicija 4.6. *Neka su U i V konačnodimenzionalni unitarni prostori te $A \in L(U,V)$. Tada je*

$$V = \operatorname{Ker} A \oplus \operatorname{Im} A^* \quad i \quad W = \operatorname{Ker} A^* \oplus \operatorname{Im} A.$$

Zadatak 4.14. Neka je $S \in L(M_2)$ takav da je $\operatorname{Ker} S = \left\{ \begin{bmatrix} a+b & 2a \\ 2b & 0 \end{bmatrix} : a,b \in \mathbb{F} \right\}$. Odredite $\operatorname{Im} S^*$.

Rješenje: Iz prethodne propozicije slijedi da je $\operatorname{Im} S^* = (\operatorname{Ker} S)^\perp$. Lako vidimo da je

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

jedna baza za $\operatorname{Ker} S$. Zato je $\dim(\operatorname{Ker} S)^\perp = 2$, pa je dovoljno naći dva linearno nezavisna elementa iz M_2 koji su ortogonalni na F_1 i F_2. Na primjer, možemo uzeti

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Slijedi da je $\operatorname{Im} S^* = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \right]$. ■

Uvedimo sada posebne klase linearnih operatora na danom konačnodimenzionalnom unitarnom prostoru U.

Definicija 4.7. Operator $A \in L(U)$ je **hermitski** (**antihermitski**) ako je $A^* = A$ ($A^* = -A$).

Primjer 4.8. (a) Jedinični operator $I_U \in L(U)$ je hermitski. Nuloperator je i hermitski i antihermitski (i to je jedini takav operator).

(b) Ortogonalni projektori na unitarnim prostorima su hermitski operatori.

(c) Ako je $A \in L(U)$ proizvoljan, tada su A^*A i $A + A^*$ hermitski operatori, dok je $A - A^*$ antihermitski operator. Štoviše, imamo analogan rezultat kao i za matrice: svaki se operator $A \in L(U)$ može na jedinstven način prikazati kao zbroj jednog hermitskog i jednog antihermitskog, te je taj rastav dan s

$$A = \frac{1}{2}(A + A^*) + \frac{1}{2}(A - A^*).$$

(d) Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ hermitska matrica, te $L_A \in L(M_{n1}(\mathbb{C}))$. Tada imamo sljedeći niz ekvivalencija

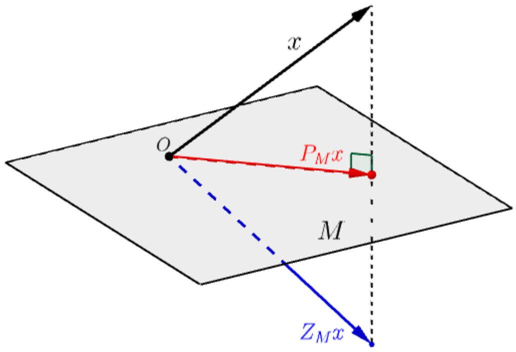
$$\begin{aligned} L_A \text{ je hermitski operator } &\iff (L_A)^* = L_A \\ &\iff L_{A^*} = L_A \\ &\iff A^* = A \\ &\iff A \text{ je hermitska matrica.} \end{aligned}$$

Analogno se vidi i da je L_A antihermitski operator ako i samo ako je A antihermitska matrica, a isto možemo zaključiti i za operator $R_A \in L(M_{1n}(\mathbb{C}))$.

(e) U zadatku 4.13 smo vidjeli da je operator osne simetrije hermitski operator. Općenito, ako je U konačnodimenzionalni unitarni prostor te $M \leq U$, tada možemo definirati linearni operator **zrcaljenja s obzirom na potprostor** M sa

$$Z_M = 2P_M - I,$$

gdje je $P_M \in L(U)$ ortogonalni projektor na M.



Slika 10: Odnos vektora $x, P_M x$ i $Z_M x$

Posebno, tada je

$$Z_M x = \begin{cases} x, & x \in M \\ -x, & x \in M^\perp. \end{cases}$$

Sada vidimo da je $(Z_M)^* = 2(P_M)^* - I^* = 2P_M - I = Z_M$, pa je zrcaljenje s obzirom na proizvoljan potprostor hermitski operator.

Pokažimo sada i najavljenu karakterizaciju ortogonalnih projektora na unitarnom prostoru.

Zadatak 4.15. Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor te $P \in L(U)$. Pokažite da je P ortogonalni projektor ako i samo ako je $P^2 = P = P^*$.

Rješenje: Već smo vidjeli da je P projektor ako i samo ako je $P^2 = P$, te da za ortogonalne projektore vrijedi $P^* = P$. Stoga preostaje samo pokazati da je hermitski projektor ujedno i ortogonalan. To pak slijedi direktno iz Propozicije 4.6; kako je $P^* = P$, to je $\operatorname{Ker} P \perp \operatorname{Im} P$. ■

Veza hermitskih operatora i hermitskih matrica je očekivana:

Propozicija 4.9. *Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor te $A \in L(U)$. Tada je ekvivalentno:*

(a) A je hermitski operator

(b) Postoji ortonormirana baza (e) za U takva da je $A(e)$ hermitska matrica

(c) Matrica $A(e)$ je hermitska za svaku ortonormiranu bazu (e).

4.3 Metoda najmanjih kvadrata

Ortogonalna dekompozicija iz Propozicije 4.6 nam daje i metodu aproksimativnog rješavanja vektorskih jednadžbi oblika

$$Ax = b,$$

gdje su $A \in L(U,V)$ i $b \in V$ zadani. Ova jednadžba ima rješenje ako i samo ako je $b \in \operatorname{Im} A$. Ukoliko to nije slučaj, možemo tražiti najbolju aproksimaciju b elementima iz $\operatorname{Im} A$, odnosno $x_0 \in U$ takav da je

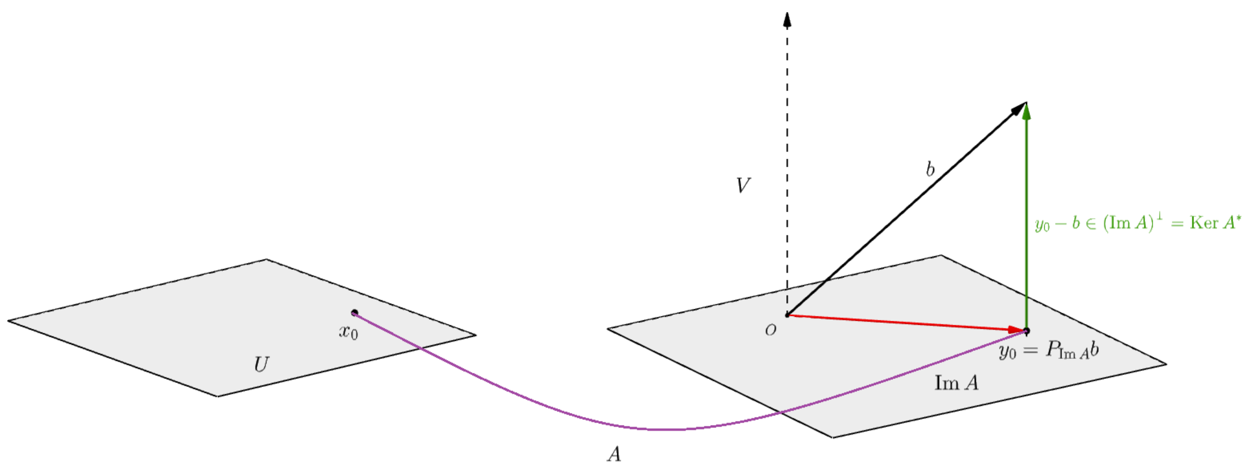
$$\|Ax_0 - b\| \leq \|Ax - b\|, \qquad \text{za sve } x \in U.$$

Sljedeći rezultat daje način kako pronaći takav x_0.

Teorem 4.10. *Neka su U i V konačnodimenzionalni unitarni prostori, $A \in L(U,V)$ i $b \in V$. Tada vrijedi*

(a) Postoji $x_0 \in U$ takav da je $A^*Ax_0 = A^*b$

(b) Neka je $x_0 \in U$ takav da je $A^*Ax_0 = A^*b$. Tada je Ax_0 ortogonalna projekcija b na $\operatorname{Im} A$, odnosno Ax_0 je najbolja aproksimacija b elementima iz $\operatorname{Im} A$.



Slika 11: Grafički prikaz relacije $A^*(Ax_0 - b) = 0$ (uz $\dim U < \dim V$ i A punog ranga).

Najčešća primjena prethodnog teorema je sljedeća.

Korolar 4.11. *Zadan je sustav $AX = B$, pri čemu su $A \in M_{mn}$ i $b \in M_{m1}$. Tada*

(a) Sustav $A^*AX = A^*B$ ima rješenje

(b) Ako je $X_0 = \begin{bmatrix} \gamma_1 & \dots & \gamma_n \end{bmatrix}^T$ rješenje sustava $A^*AX = A^*B$, tada je AX_0 ortogonalna projekcija B na $[\{S_1^A, \dots, S_n^A\}]$ te vrijedi

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\gamma_j - b_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^{m} \left| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i \right|^2 \qquad \text{za sve } x_1, \dots, x_n \in \mathbb{F}.$$

Za takav X_0 kažemo da je ***rješenje u smislu najmanjih kvadrata*** *sustava $AX = B$.*

Zadatak 4.16. Neka su U i V konačnodimenzionalni unitarni prostori takvi da je $\dim U \leq \dim V$ te $A \in L(U,V)$. Tada je $A^*A \in L(U)$ regularan operator ako i samo ako je A monomorfizam.

Rješenje: Napomenimo prije svega kako je pretpostavka $\dim U \leq \dim V$ nužna da bi A uopće mogao biti monomorfizam. Nadalje, kada bi bilo $\dim U > \dim V$, tada bi posebno imali $r(A^*A) \leq r(A) \leq \dim V < \dim U$, pa A^*A nikako ne može biti regularan u tom slučaju.

Sama tvrdnja je sada direktna posljedica Zadatka 4.10 i karakterizacija injektivnosti za A, odnosno regularnosti od A^*A:

$$A^*A \text{ je regularan} \iff \operatorname{Ker}(A^*A) = \{0\} \iff \operatorname{Ker} A = \{0\} \iff A \text{ je monomorfizam.}$$

■

Prethodni zadatak možemo također iskazati i u terminu matrica.

Zadatak 4.17. Neka je $A \in M_{mn}$, pri čemu je $m \geq n$. Tada je $A^*A \in M_n$ regularna matrica ako i samo ako je $r(A) = n$.

Kao posljedicu prethodnih zadataka vidimo da metoda najmanjih kvadrata daje jedinstveno rješenje ako i samo ako je A bio monomorfizam, odnosno ako i samo ako je $r(A) = n$. U tom slučaju je pripadno rješenje dano s

$$X_0 = (A^*A)^{-1}A^*B.$$

Zadatak 4.18. Odredite rješenje u smislu najmanjih kvadrata sustava

$$\begin{cases} 2x_1 + \ \ x_2 = 1 \\ \ \ x_1 + 2x_2 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Rješenje: Stavimo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Vidimo da je $r(A) = 2$, pa je jedinstveno rješenje u smislu najmanjih kvadrata dano s

$$X_0 = (A^TA)^{-1}A^TB = \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

■

Zadatak 4.19. Metodom najmanjih kvadrata odredite pravac koji najbolje aproksimira točke $(x_1,y_1) = (-6,-1)$, $(x_2,y_2) = (-2,2)$, $(x_3,y_3) = (1,1)$ i $(x_4,y_4) = (7,6)$.

Rješenje: Neka je traženi pravac dan jednadžbom $y = kx + l$ za neke $k,l \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem uvjeta $y_i = kx_i + l$ za $i = 1,\ldots,4$ dobivamo sustav

$$\begin{aligned} -6k + l &= -1 \\ -2k + l &= 2 \\ k + l &= 1 \\ 7k + l &= 6 \end{aligned}$$

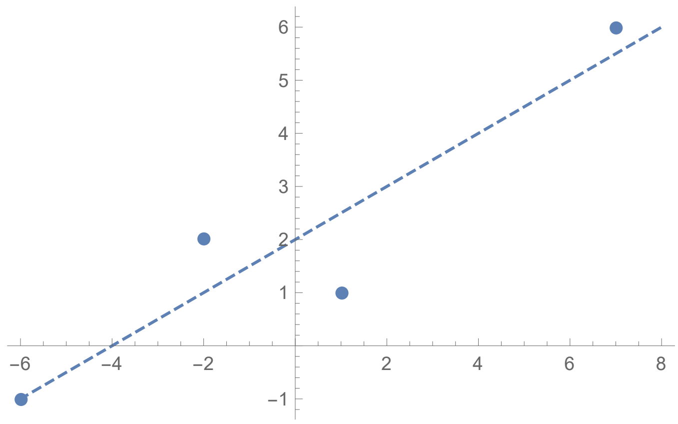
koji možemo matrično zapisati kao $AX = B$, gdje je

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 7 & 1 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Matrica A je ranga 2, pa je jedinstveno rješenje u smislu najmanjih kvadrata dano s

$$\begin{bmatrix} k \\ l \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T B = \begin{bmatrix} 90 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 45 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Stoga je traženi pravac $y = \frac{1}{2}x + 2$.



Slika 12: Pravac $y = \frac{1}{2}x + 2$ i točke $(x_1, y_1), \ldots, (x_4, y_4)$

■

4.4 Unitarni operatori

Definicija 4.12. Neka su U i V konačnodimenzionalni unitarni prostori istih dimenzija. Za $A \in L(U,V)$ kažemo da je **unitaran operator** ako vrijedi

$$\langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall x \in U, y \in V.$$

Kako i samo ime sugerira, unitarni operatori su oni operatori koji "čuvaju strukturu unitarnog prostora". Navedimo sada i nekoliko karakterizacija unitarnih operatora koje ćemo koristiti.

Propozicija 4.13. *(Karakterizacije unitarnih operatora) Neka su U i V konačnodimenzionalni unitarni prostori te $A \in L(U,V)$. Ekvivalentno je*

(a) A je unitaran operator

(b) A je regularan i vrijedi $A^{-1} = A^*$

(c) $\|Ax\| = \|x\|$ za svaki $x \in U$

(d) Postoji ortonormirana baza $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za U takva da je $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ ortonormirana baza za V

(e) Za svaku ortonormiranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za U je $\{Ae_1, \ldots, Ae_n\}$ ortonormirana baza za V.

DZ 4.3. (a) Neka su U i V konačnodimenzionalni unitarni prostori istih dimenzija te $A : U \to V$ funkcija takva da je $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ za sve $x \in U$ i $y \in V$. Dokažite da je A unitaran operator.

Dakle, pretpostavka linearnosti u definiciji unitarnog operatora je zapravo suvišna: funkcije koje čuvaju skalarni produkt nužno moraju biti linearne.

(b) Neka su U i V konačnodimenzionalni unitarni prostori istih dimenzija te $A : U \to V$ funkcija takva da je $\|Ax\| = \|x\|$ za sve $x \in U$. Mora li A biti unitaran operator?

Primjer 4.14. (a) Neka je $R_\varphi \in L(\mathbb{R}^2)$ operator rotacije za kut φ. Tada je R_φ unitaran operator. Ovo slijedi direktno iz zadatka 4.11 jer je

$$(R_\varphi)^* = R_{-\varphi} = (R_\varphi)^{-1}.$$

(b) Slično, operator $R_{e_3,\varphi} \in L(\mathbb{R}^3)$ je također unitaran operator.

(c) Neka je M potprostor unitarnog prostora U te Z_M zrcaljenje s obzirom na M. Tada je $(Z_M)^2 = I$, pa vidimo da je $(Z_M)^{-1} = Z_M = (Z_M)^*$, odakle slijedi da je Z_M unitaran operator.

(d) Neka je $A \in M_n$. Tada je $L_A \in L(M_{n1})$ unitaran operator ako i samo ako je A unitarna matrica. Slijedi direktno iz jednakosti $(L_A)^* L_A = L_{A^*A}$.

Propozicija 4.15. *Neka su U, V konačnodimenzionalni unitarni prostori i $A \in L(U,V)$. Sljedeće tri tvrdnje su ekvivalentne:*

(a) A je unitaran operator

(b) Postoje ortonormirane baze (e) za U i (f) za V takve da je $A(f,e)$ unitarna matrica

(c) Matrica $A(f,e)$ je unitarna matrica za sve ortonormirane baze (e) za U i (f) za V.

Zadatak 4.20. Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor te (e) i (f) dvije ortonormirane baze za U. Tada je $I(e,f)$ unitarna matrica.

Rješenje: S obzirom da je I unitaran, prema prethodnoj propoziciji je $I(e,f)$ unitarna matrica. ■

DZ 4.4. Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$ ortogonalna matrica. Tada postoji $\varphi \in \mathbb{R}$ takav da je

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \text{ili} \quad A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ \sin\varphi & -\cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Posebno, jedini unitarni operatori na $\mathbb{R}^2$ su rotacije i osne simetrije.

4.5 Dijagonalizacija u ortonormiranoj bazi

U drugom poglavlju smo se već bavili temom dijagonalizacije linearnih operatora na vektorskim prostorima, pa je prirodno isto pitanje postaviti i za operatore na unitarnim prostorima. Osim pitanja postojanja *bilo kakve* baze za unitaran prostor U u kojoj se dani operator $A \in L(U)$ dijagonalizira (što je u potpunosti okarakterizirano ranije), sada ima smisla i pitanje postoji li *ortonormirana* baza za U u kojoj se dani operator dijagonalizira.

Prije nastavka, pokažimo prvo neke dodatne rezultate o spektru linearnih operatora na unitarnim prostorima.

Zadatak 4.21. Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor te $A \in L(U)$. Tada je

$$\lambda \in \sigma(A) \iff \overline{\lambda} \in \sigma(A^*),$$

odnosno

$$\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)} := \{\overline{\lambda} : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Rješenje: Imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(A) &\iff \operatorname{Ker}(A-\lambda I) \neq \{0\} \\
&\iff \operatorname{Ker}(A-\lambda I)^{\perp} \neq U \\
&\iff \operatorname{Im}(A^{*}-\overline{\lambda} I) \neq U \\
&\iff A^{*}-\overline{\lambda} I \text{ nije epimorfizam} \\
&\iff A^{*}-\overline{\lambda} I \text{ nije monomorfizam} \\
&\iff \overline{\lambda} \in \sigma(A^{*}).
\end{aligned}$$

■

Zadatak 4.22. Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor te $A \in L(U)$ hermitski operator. Pokažite:

(a) $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ za sve $x \in U$

(b) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Naravno, tvrdnja ovog zadatka je trivijalna u slučaju da je U realan prostor; poanta je da vrijede i u kompleksnom slučaju.
Rješenje: Primijetimo prvo da zbog $A^{*} = A$ je za svaki $x \in U$

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle},$$

odnosno $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$. Neka je sada $\lambda \in \sigma(A)$ proizvoljan te x pripadni svojstveni vektor. Tada je zbog prethodno pokazanog

$$\lambda \|x\|^2 = \langle \lambda x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R},$$

odakle slijedi $\lambda \in \mathbb{R}$. ■

Zadatak 4.23. Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor te $A \in L(U)$ antihermitski operator. Pokažite:

(a) $\langle Ax, x\rangle \in i\mathbb{R} := \{i\alpha : \alpha \in \mathbb{R}\}$ za sve $x \in U$

(b) $\sigma(A) \subseteq i\mathbb{R}$.

Rješenje: Slično kao i u prethodnom zadatku, za sve $x \in U$ imamo

$$\langle Ax, x\rangle = \langle x, -Ax\rangle = -\overline{\langle Ax, x\rangle},$$

odakle slijedi $\langle Ax, x\rangle \in i\mathbb{R}$. Sada analogno slijedi i da je $\sigma(A) \subseteq i\mathbb{R}$. ■

Primijetimo kako u slučaju da je prostor realan za antihermitske operatore vrijedi da je $\langle Ax, x\rangle = 0$ za sve $x \in U$ te da je $\sigma(A) \subseteq \{0\}$.

Zadatak 4.24. Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor te $A \in L(U)$ unitaran operator. Tada je $\sigma(A) \subseteq \{\lambda \in \mathbb{F} : |\lambda| = 1\}$.

Rješenje: Kako za unitarne operatore imamo $\|Ax\| = \|x\|$ za sve $x \in U$, za proizvoljni $\lambda \in \sigma(A)$ i pripadni svojstveni vektor x imamo

$$|\lambda| \|x\| = \|\lambda x\| = \|Ax\| = \|x\|,$$

odakle slijedi tvrdnja. ■

Rezultate dijagonalizacije linearnih operator na unitarnim prostorima ćemo razdvojiti na dva slučaja: realni i kompleksni.

Teorem 4.16. *Neka je U realan konačnodimenzionalan unitaran prostor te $A \in L(U)$. Tada postoji ortonormirana baza (e) za U takva da je $A(e)$ dijagonalna matrica ako i samo ako je A hermitski operator.*

Postupak pronalaženja takve ortonormirane baze za hermitski operator A je sličan već nam poznatom postupku dijagonalizacije u (proizvoljnoj) bazi: u prva dva korak odredimo $\sigma(A)$ te baze pripadnih svojstvenih potprostora. Međutim, unija tih baza ne mora biti ortonormiran skup. Pomoć pri tom zadnjem koraku nam daje i idući rezultat s predavanja.

Propozicija 4.17. *Neka je U konačnodimenzionalni vektorski prostor te $A \in L(U)$ hermitski operator. Tada su različitim svojstvenim vrijednostima pridruženi međusobno ortogonalni vektori.*

Dakle, ukoliko smo odredili $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$, te pripadne baze $(b^{(j)})$ za $V_A(\lambda_j)$, $j = 1, \dots, k$, tada preostaje samo Gram-Schmidtovim postupkom ortonormirati svaku pojedinu bazu $(b^{(1)}), \dots, (b^{(k)})$; prethodna propozicija garantira da je onda unija svih tih baza ortonormirana baza za U u kojoj se A dijagonalizira.

Zadatak 4.25. Zadani su linearni operatori $A, B \in L(\mathbb{R}^3)$ s

$$\begin{aligned} A(x,y,z) &= (2x+2y-2z, 2x+5y-4z, -2x-4y+5z) \\ B(x,y,z) &= (x+y, y, x+y+z). \end{aligned}$$

Provjerite mogu li se ovi operatori dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi, te u slučaju potvrdnog odgovora odredite jednu takvu.

Rješenje: Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Tada je

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{bmatrix} \qquad B(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Sada vidimo da je $B(e)^* \neq B(e)$, pa B nije hermitski operator, te se prema tome ne može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi. S druge strane, kako je $A(e)^* = A(e)^T = A(e)$, $A(e)$ je hermitska matrica, pa je A hermitski operator. Stoga se on može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi. Odredimo najprije svojstvene vrijednosti od A:

$$0 = k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 5-\lambda & -4 \\ -2 & -4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-10)$$

pa je $\sigma(A) = \{1, 10\}$. Rješavanjem sustava $(A(e)-I)X = 0$, odnosno $(A(e)-10I)X = 0$, dobijemo

$$V_A(1) = [\{(-2,1,0), (2,0,1)\}], \qquad V_A(10) = [\{(1,2,-2)\}].$$

Sada preostaje ortonormirati dobivene baze za $V_A(1)$ i $V_A(10)$, čime dobivamo

$$V_A(1) = \left[\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0), \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5)\right\}\right], \qquad V_A(10) = \left[\left\{\frac{1}{3}(1,2,-2)\right\}\right].$$

Dakle, A se dijagonalizira u ortonormiranoj bazi

$$(f) = \left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1,0), \frac{1}{3\sqrt{5}}(2,4,5), \frac{1}{3}(1,2,-2)\right\}.$$

■

Prije nego navedemo rezultat karakterizacije dijagonalizibilnosti u ortonormiranoj bazi za kompleksne prostore, potrebno je uvesti još jednu klasu linearnih operatora.

Definicija 4.18. Neka je U konačnodimenzionalan unitaran prostor. Kažemo da je $A \in L(U)$ **normalan** ako je

$$A^*A = AA^*.$$

Primijetimo za početak kako normalni operatori obuhvaćaju hermitske, antihermitske i unitarne operatore. Naravno, postoje operatori koji su normalni, a da ne spadaju u niti jednu od ove tri klase: jedan takav primjer je operator $A \in L(\mathbb{C}^2)$ dan s $A(z_1, z_2) = (2z_1, iz_2)$ (promotrite $\sigma(A)$). Navedimo i jednu korisnu karakterizaciju normalnih operatora.

Propozicija 4.19. *Neka je U konačnodimenzionalni unitarni prostor te $A \in L(U)$. Tada je A normalan ako i samo ako je*

$$\|Ax\| = \|A^*x\| \qquad \text{za svaki } x \in U.$$

Sada ćemo iskazati i najavljeni rezultat o dijagonalizibilnosti u ortonormiranoj bazi u kompleksnom slučaju.

Teorem 4.20. *Neka je U kompleksan konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(U)$. Tada postoji ortonormirana baza (e) za U takva da je $A(e)$ dijagonalna matrica ako i samo ako je A normalan operator.*

Zadatak 4.26. Neka je $A \in L(\mathbb{C}^3)$ dan svojim matričnim prikazom u kanonskoj bazi s

$$A(e) = \begin{bmatrix} 8 & -3 & -1 \\ 12 & -4 & -2 \\ -6 & 3 & 3 \end{bmatrix}.$$

Postoji li ortonormirana baza (e) za $\mathbb{C}^3$ takva da je $A(e)$ dijagonalna matrica?

Rješenje: Primijetimo kako je

$$\|Ae_1\| = \|(8, 12, -6)\| \neq \|(8, -3, -1)\| = \|A^*e_1\|.$$

Prema karakterizaciji normalnih operatora, slijedi da A nije normalan operator. ■

Ukoliko pak imamo normalan operator, tada je proces pronalaska odgovarajuće ortonormirane baze identičan ranije opisanom postupku za hermitske operatore na realnim prostorima. Pritom treba napomenuti kako vrijedi analogon Propozicije 4.17 i za normalne operatore na proizvoljnom unitarnom prostoru.

Zadatak 4.27. Neka je $A \in L(\mathbb{C}^3)$ zadan svojim matričnim prikazom u kanonskoj bazi s

$$A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -2 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Pokažite da se A može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi, te odredite jednu takvu.

Rješenje: Vidimo da je $A(e)$ antihermitska matrica, pa je A antihermitski operator. Posebno je tada A i normalan, te se može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi. Dalje standardnim postupkom dobijemo $\sigma(A) = \{0, \pm 3i\}$, te (normirane) baze

$$V_A(0) = \left[\left\{\frac{1}{3}(1,2,2)\right\}\right]$$

$$V_A(3i) = \left[\left\{\frac{\sqrt{10}}{30}(-2+6i, -4-3i, 5)\right\}\right]$$

$$V_A(-3i) = \left[\left\{\frac{\sqrt{10}}{30}(-2-6i, -4+3i, 5)\right\}\right].$$

Kako imamo tri različite svojstvene vrijednosti, pripadni svojstveni vektori već čine ortogonalan skup, pa gornja tri vektora daju traženu ortonormiranu bazu. ■

Osim što normalni operatori zadovoljavaju tvrdnju Zadatka 4.21, odnosno, vrijedi $\sigma(A^*) = \overline{\sigma(A)}$, za njih vrijedi i nešto više: vektor $x \in U$ je svojstveni vektor od A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ ako i samo ako je x svojstveni vektor od A^* pridružen $\overline{\lambda}$. Drugim riječima, imamo

$$V_A(\lambda) = V_{A^*}(\overline{\lambda}), \qquad \lambda \in \mathbb{F}.$$

Zadatak 4.28. Neka je U konačnodimenzionalan kompleksan unitaran prostor. Neka je $A \in L(U)$ takav da vrijedi $\langle Ax, x\rangle \in \mathbb{R}$ za svaki $x \in U$. Pokažite da je A hermitski operator.

Rješenje: Označimo $T = A - A^*$. Kako je T antihermitski operator, on se može dijagonalizirati u nekoj ortonormiranoj bazi (e). Iz uvjeta zadatka slijedi da je za sve $x \in U$

$$\langle Tx, x\rangle = \langle (A - A^*)x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \langle A^*x, x\rangle = \langle Ax, x\rangle - \overline{\langle Ax, x\rangle} = 0.$$

Stoga, ako je $\lambda \in \sigma(T)$, uzimanjem svojstvenog vektora $x \in V_T(\lambda)$ slijedi

$$\lambda \|x\|^2 = \langle Tx, x\rangle = 0,$$

odnosno $\lambda = 0$. Dakle, jedina svojstvena vrijednost operatora T je 0. Stoga je navedena matrica koja dijagonalizira T nulmatrica, pa je $T = 0$, odnosno $A = A^*$. ■

Naravno, tvrdnja prethodnog zadatka nema niti previše smisla u realnom slučaju: naime, tada bi dobili da je svaki operator na realnom prostoru hermitski. Međutim, napomenimo ni kako ključan argument u prethodnom dokazu također nije validan u realnom slučaju, a to je

$$\langle Tx, x\rangle = 0 \text{ za sve } x \in U \implies T = 0.$$

Naime, za operator rotacije ravnine za kut $\frac{\pi}{2}$ očito vrijedi $\left\langle R_{\frac{\pi}{2}}x, x\right\rangle = 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^2$.

Zadatak 4.29. Neka je U konačnodimenzionalan kompleksan unitaran prostor. Neka je $A \in L(U)$ takav da vrijedi $\langle Ax, x\rangle \in i\mathbb{R}$ za svaki $x \in U$. Pokažite da je A antihermitski operator.

Rješenje: Rješenje ide analogno kao za prethodni zadatak, promatranjem operatora $T = A + A^*$. ■

Naravno, kao i u drugom poglavlju, možemo dati odgovarajuće rezultate dijagonalizacije za matrice. Pritom ćemo za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$ očekivano reći da je **normalna** ako je $A^*A = AA^*$.

Teorem 4.21. *(1) Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica. Tada je A ortogonalno slična dijagonalnoj matrici, odnosno, postoje ortogonalna matrica $Q \in M_n(\mathbb{R})$ i dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{R})$ takve da je*

$$A = QDQ^T.$$

(2) Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ normalna matrica. Tada je A unitarno slična dijagonalnoj matrici, odnosno, postoje unitarna matrica $U \in M_n(\mathbb{C})$ i dijagonalna matrica $D \in M_n(\mathbb{C})$ takve da je

$$A = UDU^*.$$

Pritom su, naravno, elementi dijagonalne matrice svojstveni vektori, a stupci matrica Q, odnosno U, ortonormirani skupovi pripadnih svojstvenih vektora.

Zadatak 4.30. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ hermitska matrica takva da vrijedi

$$A^5 + A^3 + A = 3I.$$

Dokažite da mora vrijediti $A = I$.

Rješenje: Kako je A hermitska matrica, može se dijagonalizirati, tj. postoje unitarna matrica U i dijagonalna matrica D takve da je $A = UDU^*$. Posebno su A i D slične matrice, pa je prema Zadatku 2.15

$$A^5 + A^3 + A - 3I = 0 \iff D^5 + D^3 + D - 3I = 0$$

Neka je sada $\lambda \in \sigma(A)$. Iz posljednje jednakosti slijedi da je

$$\lambda^5 + \lambda^3 + \lambda - 3 = 0.$$

Polinom $p(\lambda) = \lambda^5 + \lambda^3 + \lambda - 3$ je neparnog stupnja te je neprekidna strogo rastuća funkcija (derivacija je $p'(\lambda) = 5\lambda^4 + 3\lambda^2 + 1 > 0$), pa ima točno jednu realnu nultočku. Očito je ta nultočka jednaka 1. Dakle, slijedi da je $\sigma(A) = \{1\}$, pa zaključujemo da je $D = I$. Stoga je i $A = I$. ∎

Zadatak 4.31. Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ unitarne matrice. Dokažite da je

$$|\det(A+B)| \leq 2^n.$$

Rješenje: S obzirom da su brojevi nenegativni, kvadriranjem dobijemo ekvivalentnu nejednakost, koju dalje zbog Binet-Cauchyjevog teorema možemo zapisati na sljedeći način

$$\begin{aligned} |\det(A+B)|^2 \leq 4^n &\iff \det(A+B)\overline{\det(A+B)} \leq 4^n \\ &\iff \det[(A+B)(A^*+B^*)] \leq 4^n. \end{aligned}$$

Kako su A i B unitarne matrice, izraz unutar determinante je jednak

$$(A+B)(A^*+B^*) = AA^* + BB^* + AB^* + BA^* = AB^* + BA^* + 2I.$$

S obzirom da je produkt unitarnih matrica ponovno unitarna matrica, slijedi da je AB^* unitarno slična nekoj dijagonalnoj matrici, odnosno postoje U unitarna i D dijagonalna takve da je $AB^* = UDU^*$. Kako je $BA^* = (AB^*)^*$, slijedi $BA^* = U\overline{D}U^*$. Označimo svojstvene vrijednosti AB^* s $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Posebno vrijedi i $|\lambda_1| = \cdots = |\lambda_n| = 1$. Sada je

$$AB^* + BA^* + 2I = U \operatorname{diag}(\lambda_1 + \overline{\lambda_1} + 2, \ldots, \lambda_n + \overline{\lambda_n} + 2)\, U^*.$$

Kako je determinanta (unitarno) sličnih matrica jednaka, imamo

$$\begin{aligned} \det[(A+B)(A^*+B^*)] &= \prod_{k=1}^{n} \underbrace{(\lambda_k + \overline{\lambda_k} + 2)}_{2\operatorname{Re}\lambda_k + 2 \in \mathbb{R}} \\ &\leq \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k + \overline{\lambda_k} + 2| \\ &\leq \prod_{k=1}^{n} (\underbrace{|\lambda_k|}_{=1} + \underbrace{|\overline{\lambda_k}|}_{=1} + 2) \\ &= 4^n \end{aligned}$$

∎

DZ 4.5. Odredite ONB u kojoj se linearni operator $A \in L(\mathbb{C}^2)$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi dan sa $A(e) = \begin{bmatrix} \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \\ \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{C})$ dijagonalizira.

DZ 4.6. Odredite ONB u kojima se dijagonaliziraju operatori $A \in L(\mathbb{C}^2)$, odnosno $B \in L(\mathbb{C}^3)$ čiji su matrični prikazi u kanonskoj bazi za $\mathbb{C}^2$, odnosno $\mathbb{C}^3$ dan sa

$$\text{a)}\, A(e) = \begin{bmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{b)}\, B(e) = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1+i & 1+5i & 2-2i \\ 1+5i & -1+i & -2+2i \\ 2-2i & -2+2i & -4-2i \end{bmatrix}.$$

DZ 4.7. Neka je V konačnodimenzionalan unitaran prostor i $A \in L(V)$ unitaran hermitski operator. Što su moguće svojstvene vrijednosti za A? Dodatno, pokažite da uz dodatnu pretpostavku $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za sve $x \in V$, nužno slijedi $A = I$.

5 Bilinearne i kvadratne forme

5.1 Definicije, svojstva i veza sa skalarnim produktom na $\mathbb{R}^n$

Iako bi općenitiju teoriju i rezultate kojima ćemo se baviti u ovom poglavlju mogli iskazati i u terminima općenitog konačnodimenzionalnog unitarnog prostora U, mi ćemo se radi jasnoće izlaganja i skorijih primjena istih usredotočiti samo na prostor $\mathbb{R}^n$ sa standardnim skalarnim produktom koji će odsad na dalje uvijek biti označavan s $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Vratimo se ponovno na primjere iz Zadatka 3.2 gdje smo se pitali definiraju li dana preslikavanja skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$ (uz promijenjenu oznaku $[\cdot, \cdot]$):

(a) $[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2$

(b) $[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 3x_2y_2$

(c) $[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + x_2y_2$.

Prije svega, lako se vidi da je svako od ovih preslikavanja linearno u obje varijable. Međutim, možemo primijetiti i nešto više. Za početak, za primjer iz (a) dijela vidimo da ga možemo zapisati u obliku

$$[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 3x_2y_2 = 4x_1y_1 + (2x_1 + 3x_2)y_2 = \langle A(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle,$$

pri čemu je $\langle \cdot, \cdot \rangle$ standardni skalarni produkt na $\mathbb{R}^2$ te $A \in L(\mathbb{R}^2)$ dan s $A(e) = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Na sličan način možemo postupiti i u preostala dva primjera, te vidimo da dana preslikavanja možemo zapisati u obliku

(b) $[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = \langle A(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle$, gdje je $A \in L(\mathbb{R}^2)$ dan s $A(e) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(c) $[(x_1,x_2),(y_1,y_2)] = \langle A(x_1,x_2),(y_1,y_2)\rangle$, gdje je $A \in L(\mathbb{R}^2)$ dan s $A(e) = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

U rješenju navedenog zadatka smo zaključili kako preslikavanje pod (a) ne definira skalarni produkt: jednostavno smo zaključili da ne vrijedi simetričnost. Primijetimo kako to možemo povezati sa pitanjem hermitičnosti navedenog operatora A: naime, očito u ovom slučaju vidimo da je $A^* \neq A$, pa će generalno biti

$$[x,y] = \langle Ax, y\rangle = \langle x, A^*y\rangle = \langle A^*y, x\rangle \neq \langle Ay, x\rangle = [y,x].$$

U preostala dva slučaja vidimo kako su pripadni operatori hermitski, no vidjeli smo kako je u (b) podzadatku pripadno preslikavanje definiralo skalarni produkt, dok u (c) to nije bio slučaj: razliku je činilo svojstvo pozitivne definitnosti, koje u ovom trenutku ne možemo raspoznati iz samog matričnog zapisa operatora A.

Uvedimo sada i matematički pojam za za opisani tip preslikavanja.

Definicija 5.1. Za preslikavanje $b(\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ takvo da je

- $x \mapsto b(x,y)$ linearno za svaki $y \in \mathbb{R}^n$
- $y \mapsto b(x,y)$ linearno za svaki $x \in \mathbb{R}^n$

kažemo da je **bilinearna forma** na $\mathbb{R}^n$.

Naravno, bilo koji skalarni produkt na $\mathbb{R}^n$ je jedna bilinearna forma. Pogledat ćemo sada kako izgleda opći oblik bilinearne forme na $\mathbb{R}^n$. Neka je $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$ kanonska baza. Tada za sve $x = (x_1, \dots, x_n)$ i $y = (y_1, \dots, y_n)$ imamo

$$b(x,y) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{j=1}^n y_j e_j\right) = \sum_{i,j=1}^n x_i y_j b(e_i, e_j).$$

U ovom trenutku možemo primijetiti i kako je bilinearna forma jedinstveno određena svojim djelovanjem na bazi, odnosno izrazima $b(e_i, e_j)$, $i, j = 1, \dots, n$. Ako označimo s $a_{ij} = b(e_j, e_i)$, $i, j = 1, \dots, n$, tada prethodni izraz možemo zapisati u obliku

$$b(x,y) = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} x_i y_j.$$

Dakle, sve bilinearne forme na $\mathbb{R}^n$ su oblika kao što smo vidjeli u primjerima (a)-(c). Prethodnu jednakost možemo zapisati i na ekvivalentan način na sljedeći način: neka je $A \in L(\mathbb{R}^n)$ operator čiji je matrični zapis u kanonskoj bazi dan s $[A(e)]_{ij} = a_{ij}$. Tada prethodna jednakost postaje

$$b(x,y) = \sum_{i,j=1}^n \langle Ae_i, e_j \rangle x_i y_j = \langle Ax, y \rangle.$$

S obzirom da je očito i svako preslikavanje ovog oblika jedna bilinearna forma imamo bijekciju između svih bilinearnih formi na $\mathbb{R}^n$ i linearnih operatora na $\mathbb{R}^n$, odnosno matrica iz $M_n(\mathbb{R})$. Mi ćemo često u nastavku umjesto operatorske terminologije reći da je bilinearna forma b određena s matricom $A = (a_{ij}) \in M_n$ i pisati $b(x,y) = \langle Ax, y \rangle$. Iz prethodne diskusije vidimo posebno i da svaki skalarni produkt $b(\cdot,\cdot)$ na $\mathbb{R}^n$ nužno mora biti oblika

$$b(x,y) = \langle Ax, y \rangle = \sum_{i,j=1}^n a_{ji} x_i y_j \qquad \text{za neke skalare } a_{ji} \in \mathbb{R}.$$

Uz bilinearnu formu b vežemo i pripadnu **kvadratnu formu** $q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ danu izrazom

$$q(x) = b(x,x).$$

Razlog za ovaj naziv je sljedeći: ako je b bilinearna forma dana s $b(x,y) = \sum_{i,j} = a_{ji} x_i y_j$, tada je

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j = \sum_{i=1}^n a_{ii} x_i^2 + \sum_{1 \le i < j \le n} (a_{ij} + a_{ji}) x_i x_j.$$

Dakle, ovo je **polinom drugog stupnja u varijablama** $x_1, \dots, x_n$, i to bez članova nižeg reda.

Primijetimo ovdje kako različite bilinearne forme b, odnosno matrice $A \in M_n$, mogu dati iste kvadratne forme q. Naime, ako je b određena s A i N proizvoljna antisimetrična matrica, tada je

$$\langle (A+N)x, x \rangle = \langle Ax, x \rangle + \underbrace{\langle Nx, x \rangle}_{=0} = \langle Ax, x \rangle.$$

Posebno, ako uzmemo $N = -\frac{1}{2}(A - A^T)$, tada vidimo da je kvadratna forma određena s A ista kao i ona određena s $\frac{1}{2}(A + A^T)$, odnosno simetričnom komponentom od A. Kako je općenito

$$b(x,y) = b(y,x) \iff \langle Ax, y \rangle = \langle Ay, x \rangle \iff A = A^T,$$

u kontekstu povezivanja formi i skalarnih produkata prirodno je zapravo nastaviti s promatranjem samo onih bilinearnih formi koje su određene simetričnim matricama: takve ćemo zvati **simetričnim bilinearnim formama**. U tom slučaju možemo pisati i

$$b(x,y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ji}x_i y_j = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i y_j.$$

U ovom trenutku imamo opis onih bilinearnih formi koje su simetrične, odnosno zadovoljavaju svojstva (3)-(5) iz definicije skalarnog produkta. Da bismo zaokružili priču, potrebno je još nešto više reći o ponašanju izraza $b(x,x)$, odnosno o pripadnoj kvadratnoj formi q. Uvodimo sljedeće pojmove.

Definicija 5.2. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica te q pripadna kvadratna forma. Kažemo da je q

- **pozitivno semidefinitna** ako je $q(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$
- **pozitivno definitna** ako je $q(x) > 0$ za sve $x \neq 0$
- **negativno semidefinitna** ako je $q(x) \leq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$
- **negativno definitna** ako je $q(x) < 0$ za sve $x \neq 0$

Za sve ostale forme kažemo da su **indefinitne**.

Primjer 5.3. (a) Očito je kvadratna forma pridružena nulmatrici ujedno i pozitivno i negativno semidefinitna. Matrici I je pridružena pozitivno definitna kvadratna forma.

(b) Ako je $D = \operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n)$, tada je pripadna kvadratna forma dana s

$$\langle Dx, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2.$$

Sada se odmah vidi da je ova kvadratna forma pozitivno semidefinitna ako i samo ako je $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq [0,\infty)$, a pozitivno definitna ako i samo ako su još i svi različiti od 0. Slično, pripadna kvadratna forma je negativno semidefinitna ako i samo ako je $\{a_1, \ldots, a_n\} \subseteq (-\infty, 0]$ te negativno definitna ako i samo ako su još i svi različiti od 0. Konačno, pripadna forma je indefinitna ako i samo ako postoje barem jedan pozitivan i jedan negativan dijagonalni element.

(c) Ako je $A \in M_n$ proizvoljna matrica, tada je kvadratna forma određena s $A^T A$ pozitivno semidefinitna. Naime, za svaki $x \in \mathbb{R}^n$ je

$$\left\langle A^T Ax, x\right\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geq 0.$$

Štoviše, vidimo da je ta kvadratna forma pozitivno definitna ako i samo ako je $\|Ax\| = 0$ samo za $x = 0$, što je pak ekvivalentno s time da je A regularna matrica.

(d) Kvadratna forma pridružena matrici A iz uvodnog primjera pod (b) je pozitivno definitna.

(e) Kvadratna forma pridružena matrici A iz uvodnog primjera pod (c) je pozitivno semidefinitna.

Jasno, skalarni produkti na $\mathbb{R}^n$ su sada točno one simetrične bilinearne forme čija je pripadna kvadratna forma pozitivno definitna. Sada ćemo dati i karakterizaciju odgovarajućih definitnosti preko pripadne simetrične matrice A, odnosno njenog spektra.

Zadatak 5.1. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica. Dokažite da je pripadna kvadratna forma q

(a) pozitivno semidefinitna ako i samo ako je $\sigma(A) \subseteq [0,\infty)$;

(b) pozitivno definitna ako i samo ako je $\sigma(A) \subseteq (0,\infty)$;

(c) negativno semidefinitna ako i samo ako je $\sigma(A) \subseteq (-\infty, 0]$;

(d) negativno definitna ako i samo akoje $\sigma(A) \subseteq (-\infty, 0)$.

(e) indefinitna ako i samo ako je $\sigma(A) \cap (0, \infty) \neq \emptyset$ i $\sigma(A) \cap (-\infty, 0) \neq \emptyset$.

Rješenje:

(a) Pretpostavimo da je q pozitivno definitna, to jest da je $\langle Ax, x\rangle \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}^n$. Tada je za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ i pripadni svojstveni vektor x

$$\lambda \|x\|^2 = \langle Ax, x\rangle \geq 0, \tag{11}$$

odakle slijedi $\lambda \geq 0$.

Obratno, pretpostavimo da je $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subseteq [0, \infty)$ (ovdje uključujemo i kratnosti). Kako je A simetrična, postoje ortogonalna matrica Q i dijagonalna matrica $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ takve da je $A = QDQ^T$. Sada je za sve $x \in \mathbb{R}^n$ zbog Primjera 5.3 (b)

$$\langle Ax, x\rangle = \left\langle QDQ^T x, x\right\rangle = \left\langle D(Q^T x), Q^T x\right\rangle \geq 0. \tag{12}$$

(b) Tvrdnja slijedi potpuno analogno kao u (a): primijetimo kako pretpostavka pozitivne definitnosti daje strogu nejednakost u (11), odakle slijedi pozitivnost spektra, dok je ponovno zbog Primjera 5.3 (b) u (12) također stroga nejednakost čim je $Q^T x \neq 0$, što je pak ekvivalentno s time da je $x \neq 0$ jer je Q regularna.

Tvrdnje (c) i (d) se mogu pokazati analogno, ali možemo postupiti i na sljedeći način: primijetimo da je kvadratna forma pridružena matrici A pozitivno (semi)definitna ako i samo ako je kvadratna forma pridružena matrici $-A$ negativno (semi)definitna. Sada ovi rezultati slijede primjenom (a) i (b) na matricu $-A$, te činjenice da je $\sigma(-A) = -\sigma(A)$. Tvrdnja (e) je onda posljedica karakterizacija pod (a)-(d) te definicije indefinitnosti. ■

Sada možemo dati i sljedeću karakterizaciju skalarnih produkata na $\mathbb{R}^n$: bilinearna forma pridružena matrici A definira skalarni produkt ako i samo ako je A simetrična matrica takva da je $\sigma(A) \subseteq (0, \infty)$.

Zadatak 5.2. Provjerite je li s

$$b((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = 2x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_3y_3 + x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_3 + x_3y_1 + x_3y_2$$

dan skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$.

Rješenje: Preslikavanje iz zadatka možemo zapisati kao bilinearnu formu

$$b(x, y) = \langle Ax, y\rangle,$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Očito je A simetrična. Odredimo sada njen spektar. Karakteristični polinom od A je dan s

$$k_A(\lambda) = -\lambda^3 + 6\lambda^2 - 9\lambda + 4 = (1-\lambda)^2(4-\lambda),$$

odakle slijedi da je $\sigma(A) = \{1, 4\}$ Prema tome, b zaista definira skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$. ■

Zadatak 5.3. Neka je $A \in M_n(\mathbb{R})$ simetrična matrica takva da je pripadna kvadratna forma pozitivno semidefinitna. Dokažite da postoji matrica $B \in M_n(\mathbb{R})$ takva da je $B^2 = A$.

Rješenje: Kako je A simetrična postoji dijagonalna matrica $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ i ortogonalna matrica Q takva da je $A = QDQ^T$. Prema Zadatku 5.1 je tada posebno i $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0$. Stoga je dobro definirana matrica $\tilde{D} := \operatorname{diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$, te vrijedi

$$(Q\tilde{D}Q^T)^2 = Q\tilde{D}^2Q^T = QDQ^T = A,$$

pa je $B = Q\tilde{D}Q^T$ tražena matrica. ■

DZ 5.1. Pokažite da postoji jedinstvena simetrična matrica B takva da je njena pripadna kvadratna forma pozitivno semidefinitna takva da je $B^2 = A$.

U dokazu tvrdnji Zadatka 5.1 smo već vidjeli kako svaku simetričnu matricu A te pripadnu kvadratnu formu $q(x) = \langle Ax, x \rangle$ možemo zapisati u obliku

$$q(x) = \left\langle D(Q^T x), Q^T x \right\rangle,$$

gdje je Q ortogonalna, a D dijagonalna matrica. Ako uvedemo supstituciju $(y_1, \dots, y_n) = y = Q^T x$, tada posljednju jednakost možemo zapisati i kao

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2.$$

Kažemo da smo time sveli kvadratnu formu q na **kanonski oblik**.

Zadatak 5.4. Svedite na kanonski oblik kvadratnu formu

$$q(x_1, x_2, x_3) = 6x_1^2 + 5x_2^2 + 7x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3.$$

Rješenje: Iz oblika kvadratne forme očitavamo da ona odgovara simetričnoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

Njene svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$. Pripadne svojstvene vektore $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ normiramo i od njih formiramo stupce ortogonalne matrice Q, te dobivamo

$$Q = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

Sada uvođenjem supstitucije $y = Q^T x$ dobivamo kvadratnu formu u kanonskom obliku danom s

$$q(x_1, x_2, x_3) = 3y_1^2 + 6y_2^2 + 9y_3^2.$$

■

Zadatak 5.5. Svedi na kanonski oblik kvadratnu formu

$$q(x_1,x_2,x_3) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Rješenje: Dana kvadratna forma odgovara simetričnoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Njene svojstvene vrijednosti su $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \lambda_3 = 4$. Ortonormiranjem pripadnih svojstvenih vektora dobijemo matricu

$$Q = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Uvođenjem supstitucije $y = Q^T x$, tj. $x = Qy$ i uvrštavanjem u početni oblik, dobijemo

$$q(x_1,x_2,x_3) = -2y_1^2 + 4y_2^2 + 4y_3^2$$

$\blacksquare$

Za kraj ovog dijela ćemo navesti još jednu karakterizaciju stroge definitnosti kvadratnih formi, poznatiju pod nazivom **Sylvesterov kriterij**.

Zadatak 5.6. Neka je $q(x) = \langle Ax, x\rangle$ kvadratna forma pridružena simetričnoj matrici $A \in M_n(\mathbb{R})$. Označimo s $D_1, \ldots, D_n$ **glavne minore** od A, odnosno

$$D_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{vmatrix}, \qquad k = 1, \ldots, n.$$

Tada je kvadratna forma q:

(a) pozitivno definitna ako i samo ako je $D_k > 0$ za sve $k = 1, \ldots, n$

(b) negativno definitna ako i samo ako je $D_k < 0$ za neparne i $D_k > 0$ za parne k (drugim riječima, predznaci minora alterniraju počevši od negativnog).

Rješenje:

(a) Pretpostavimo da je q pozitivno definitna. Za $k = 1, \ldots, n$ označimo s A_k gornji lijevi $k \times k$ blok matrice A, tj.

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \ldots & a_{kk} \end{bmatrix}.$$

Trebamo pokazati da je $D_k = \det A_k > 0$. Kako je A simetrična, to je i A_k simetrična matrica, pa ima k realnih svojstvenih vrijednosti. Da bismo pokazali da je $\det A_k > 0$, dovoljno je pokazati da su sve svojstvene vrijednosti pozitivne (determinanta je za dijagonalizibilnu matricu jednaka umnošku svojstvenih vrijednosti), za što je pak dovoljno pokazati da je $\langle A_k x_k, x_k\rangle > 0$ za svaki $x_k \in M_{k1}(\mathbb{R})$. Uzmimo stoga $x_k \in M_{k1}$ proizvoljan, te označimo s

$$x = \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} \in M_{n1}(\mathbb{R}).$$

Kako je q pozitivno definitna, vrijedi $\langle Ax,x\rangle > 0$. Sada, uz blok zapis matrice A u obliku $A = \begin{bmatrix} A_k & B \\ C & D \end{bmatrix}$ imamo

$$0 < \langle Ax,x\rangle = \left\langle \begin{bmatrix} A_k & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \end{bmatrix} \right\rangle = \langle A_k x_k, x_k\rangle, \tag{13}$$

pa zbog prethodne diskusije slijedi da je $D_k > 0$, i to za proizvoljni k (prethodni blok zapis za $k = n$ samo nema ostale blokove, odnosno pozitivnost slijedi direktno iz pozitivne definitnosti q).

Obrat ćemo dokazati (jakom) indukcijom po dimenziji matrice A. Baza za $n = 1$ je trivijalna. Pretpostavimo sada da za sve simetrične matrice reda manje ili jednako n vrijedi

sve glavne minore pozitivne $\implies$ pripadna kvadratna forma je pozitivno definitna.

Neka je sada $A \in M_{n+1}(\mathbb{R})$ simetrična matrica takva da su joj sve glavne minore pozitivne. Posebno, uz prethodne oznake, slijedi po pretpostavci indukcije da je kvadratna forma pridružena A_n pozitivno definitna. Kako je $\det A = \prod_{\lambda\in\sigma(A)} \lambda$ po pretpostavci strogo veće od nule, slijedi da negativnih svojstvenih vrijednosti mora biti parno. Ako su sve pozitivne, gotovi smo. U suprotnom, postoje barem dvije negativne svojstvene vrijednosti (brojimo kratnost) λ i μ. Neka su v i w pripadni svojstveni vektori. Ako je $\lambda \neq \mu$, tada su oni i okomiti, a ako je $\lambda = \mu$ onda možemo ortonormirati taj skup. Stoga u nastavku pretpostavljamo da su v i w ortonormirani. Neka su sada α, β ne oba nula takvi da vektor $x = \alpha v + \beta w$ ima posljednju koordinatu jednaku 0, te označimo s $x_n \in M_{n1}$ vektor sastavljen kao i ranije od njegovih prvih n koordinata. Tada je na isti način kao i u (13)

$$\langle A_n x_n, x_n\rangle = \langle Ax,x\rangle = \langle \alpha\lambda v + \beta\mu w, \alpha v + \beta w\rangle = \lambda\alpha^2 + \mu\beta^2 < 0,$$

što je kontradikcija s navedenom pozitivnom definitnošću od kvadratne forme pridružene A_n. Dakle, q je pozitivno definitna.

(b) Tvrdnja za negativno definitne slijedi primjenom (a) dijela na matricu $-A$. Naime, imamo prvo da je

$$q \text{ negativno definitna} \iff -q \text{ pozitivno definitna} \overset{(a)}{\iff} D_k^{-A} > 0, \text{ za sve } k = 1,\ldots,n,$$

gdje je s D_k^{-A} označena k-ta glavna minora matrice $-A$. Preostaje još usporediti glavne minore od A i $-A$. Kako je

$$-A_k = \begin{bmatrix} -a_{11} & \ldots & -a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ -a_{k1} & \ldots & -a_{kk} \end{bmatrix},$$

vidimo da je

$$D_k^{-A} = \det(-A_k) = (-1)^k \det A_k = (-1)^k D_k^A,$$

odakle slijedi da je

$$D_k^{-A} > 0 \text{ za sve } k = 1,\ldots,n \iff D_k < 0 \text{ za neparne i } D_k > 0 \text{ za parne } k,$$

što je i trebalo pokazati.

■

Zadatak 5.7. Odredite sve $\lambda \in \mathbb{R}$ za koje je forma

$$q(x_1,x_2,x_3) = \lambda x_1^2 + \lambda x_2^2 + (\lambda - 3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2\lambda x_1x_3 + 2x_2x_3$$

negativno definitna.

Rješenje: Vidimo da je q kvadratna forma koja odgovara simetričnoj matrici

$$A = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & \lambda \\ 1 & \lambda & 1 \\ \lambda & 1 & \lambda - 3 \end{bmatrix}.$$

Prema Sylvesterovom kriteriju, q je negativno definitna ako i samo ako je

$$D_1 = \lambda < 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 > 0, \quad D_3 = \det A = 3(1 - \lambda^2) < 0,$$

što vrijedi ako i samo ako je $\lambda < -1$. ■

Istaknimo kako Sylvesterov kriterij možemo koristiti samo da bismo provjerili strogu definitnost pripadne forme. Naime, prirodno bi se bilo pitati možemo li provjeriti pozitivnu definitnost forme $q(x) = \langle Ax, x\rangle$ tako da provjerimo vrijedi li $D_1, \ldots, D_n \geq 0$. Međutim, na primjeru matrice $A = \operatorname{diag}(1, 0, -1)$ vidimo da je $D_1, D_2, D_3 \geq 0$, ali pripadna kvadratna forma je indefinitna. Dakle, analogna karakterizacija za pozitivnu i negativnu semidefinitnost ne vrijedi.

5.2 Dodatno: općeniti slučaj i neki zadaci iz starih ispita

Za kraj ovog dijela, radi potpunosti ćemo dati odgovarajuće definicije i rezultate za općeniti konačnodimenzionalni unitarni prostor U nad $\mathbb{F}$ s danim skalarnim produktom $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Jednom kada fiksiramo neku ortonormiranu bazu $\{e_1, \ldots, e_n\}$ za U, dokazi idu posve analogno onima za slučaj $\mathbb{R}^n$, uz manje prilagodbe za kompleksni slučaj.

Prvo ćemo i ovdje uvesti odgovarajuće nazive za preslikavanja koja se ponašaju dobro s obzirom na linearne kombinacije u pojedinom argumentu. Naravno, u slučaju kompleksnog unitarnog prostora bilinearne forme nam nisu dobra poveznica sa skalarnim produktom, s obzirom da je on antilinearan u drugoj varijabli, stoga nam je potrebna definicija koja razlikuje $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.

Definicija 5.4. Neka je $b(\cdot, \cdot) : U \times U \to \mathbb{F}$.

(1) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ te b linearno u obje varijable, tada kažemo da je b bilinearna forma na U.

(2) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ te b linearno u prvoj i antilinearno u drugoj varijabli, tada kažemo da je b **seskvilinearna** forma na U.

Općeniti oblik bilinearne, odnosno seskvilinearne forme se sada dobije kao i ranije:

$$b(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} b(e_i, e_j) x_i \overline{y_j}, \qquad x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i, \; y = \sum_{j=1}^{n} y_j e_j.$$

Definiranjem operatora $A \in L(U)$ matričnim zapisom u bazi (e) s $[A(e)]_{ij} = b(e_j, e_i)$ vidimo da b možemo zapisati kao

$$b(x, y) = \langle Ax, y\rangle.$$

S druge strane, za svaki $A \in L(U)$ je ovako definirano preslikavanje jedna bilinearna, odnosno seskvilinearna forma (ovisno o $\mathbb{F}$). Nadalje, kada bi postojali $A, B \in L(U)$ takvi da je $b(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ i $b(x, y) = \langle Bx, y\rangle$ za sve $x, y \in U$, odmah bi slijedilo $A = B$. Time smo pokazali sljedeću tvrdnju.

Propozicija 5.5. *Neka je $b(\cdot, \cdot) : U \times U \to \mathbb{F}$.*

(1) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tada je b bilinearna forma na U ako i samo ako postoji operator $A \in L(U)$ takav da je $b(x, y) = \langle Ax, y\rangle$ za sve $x, y \in U$.

(2) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, tada je b seskvilinearna forma na U ako i samo ako postoji operator $A \in L(U)$ takav da je $b(x,y) = \langle Ax, y\rangle$ za sve $x, y \in U$.

Štoviše, u oba slučaja je takav operator A jedinstven.

Usporedimo sada (hermitsku) simetričnost bilinearne forme i odgovarajuće svojstvo pripadnog operatora.

Zadatak 5.8. Neka je $b(\cdot,\cdot) : U \times U \to \mathbb{F}$, te $A \in L(U)$ pripadni operator.

(1) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tada je b simetrična ako i samo ako je A hermitski operator.

(2) Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, tada je b hermitski simetrična (odnosno, $b(y,x) = \overline{b(x,y)}$ za sve $x, y \in U$) ako i samo ako je A hermitski operator.

Rješenje: Slijedi iz

$$\begin{aligned}
b(y,x) = \overline{b(x,y)} \text{ za sve } x,y \in U &\iff \langle Ay, x\rangle = \overline{\langle Ax, y\rangle} \text{ za sve } x,y \in U \\
&\iff \langle Ay, x\rangle = \langle A^* y, x\rangle \text{ za sve } x,y \in U \\
&\iff A = A^*.
\end{aligned}$$

■

Konačno, uvodimo i pojam pozitivno definitnog operatora na očekivani način.

Definicija 5.6. Neka je $A \in L(U)$ hermitski operator. Kažemo da je A **pozitivno definitan** i pišemo $A > 0$ ako je $\langle Ax, x\rangle > 0$ za $x \neq 0$.

Zadatak 5.9. Neka je $A \in L(U)$ hermitski operator. Tada je $A > 0$ ako i samo ako je $\sigma(A) \subseteq (0,\infty)$.

Rješenje: Nužnost uvjeta $\sigma(A) \subseteq (0,\infty)$ se provjerava potpuno identično kao i u $\mathbb{R}^n$. Obratno, pretpostavimo da je je $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} = \sigma(A) \subseteq (0,\infty)$ (ovdje brojimo svaku svojstvenu vrijednost onoliko puta kolika joj je kratnost). Kako je A hermitski, postoji ortonormirana baza $(f) = \{f_1, \dots, f_n\}$ takva da je $Af_i = \lambda_i$, $i = 1, \dots, n$. Tada je za proizvoljni $x = \sum_{i=1}^n \langle x, f_i\rangle f_i \in U \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned}
\langle Ax, x\rangle &= \sum_{i=1}^n \langle Ax, f_i\rangle \overline{\langle x, f_i\rangle} \\
&= \sum_{i=1}^n \langle x, Af_i\rangle \overline{\langle x, f_i\rangle} \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i |\langle x, f_i\rangle|^2 > 0.
\end{aligned}$$

■

Dakle, imamo sljedeću karakterizaciju svih skalarnih produkata na unitarnom prostoru U (drugim riječima, ako znamo jedan skalarni produkt na U, svi ostali se mogu dobiti na opisani način).

Propozicija 5.7. *Neka je $b(\cdot,\cdot) : U \times U \to \mathbb{F}$ bilinearna forma te A pripadni operator. Tada b definira skalarni produkt na U ako i samo ako je A hermitski i $\sigma(A) \subseteq (0,\infty)$.*

Zadatak 5.10. U unitarnom prostoru $\mathbb{C}^3$ sa standardnim skalarnim produktom zadan je linearni funkcional $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ svojim djelovanjem na bazi

$$f(1,i,0) = 2, \quad f(1+i,0,1) = i+3, \quad f(0,1,-i) = -3i.$$

(a) Odredite vektor $w \in \mathbb{C}^3$ tako da vrijedi $f(z) = \langle z, w\rangle$ za svaki $z \in \mathbb{C}^3$.

(b) Postoji li još koji skalarni produkt $[\cdot,\cdot]$ na $\mathbb{C}^3$ u kojem će funkcional f biti reprezentiran vektorom w iz (a) dijela, tj. $f(z) = [z,w]$ za svaki $z \in \mathbb{C}^3$.

Način rješavanja (a) dijela ovog zadatka nam je već dobro znan. Za (b) dio zadatka ćemo se poslužiti rezultatima i konstrukcijama iz ovog dijela. Pokazat ćemo prvo općenito kako bi tražena konstrukcija funkcionirala, a zatim ćemo to primijeniti na prethodni zadatak.

Zadatak 5.11. Neka je $(U, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ konačnodimenzionalni unitarni prostor i $f \in U^*$ te neka je $a \in U$ njegov reprezentant, tj. vrijedi

$$f(x) = \langle x,a\rangle, \qquad x \in U.$$

Pronađite još jedan skalarni produkt $[,]$ različit od $\langle\cdot,\cdot\rangle$ takav da je isti a reprezentant od f i za taj skalarni produkt, tj. da vrijedi i

$$f(x) = [x,a], \qquad x \in U.$$

Rješenje: Ako je $f = 0$, tada je $a = 0$ reprezentant za bilo koji skalarni produkt. Inače, neka je $\{e_1,\dots,e_{n-1}\}$ ortonormirana baza za $\operatorname{Ker} f = [\{a\}]^{\perp}$. Tada je $(e) = \left\{\frac{a}{\|a\|}, e_1, \dots, e_{n-1}\right\}$ ortonormirana baza za U. Definiramo operator $A \in L(U)$ matričnim zapisom u bazi (e)

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2I_{n-1} \end{bmatrix}.$$

Ovako definiran operator je očito hermitski, te vrijedi $\sigma(A) = \{1,2\}$. Stoga je s

$$[x,y] = \langle Ax,y\rangle$$

definiran jedan skalarni produkt na U različit od $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Dodatno, iz definicije je očito $[\{a\}] = V_A(1)$ i $\operatorname{Ker} f = V_A(2)$. Preostaje provjeriti da je i u ovom skalarnom produktu a reprezentant od f, tj. da je $f(x) = [x,a]$ za sve $x \in U$. Za proizvoljni $x \in U$ imamo rastav $x = x_a + x_{\operatorname{Ker} f}$, te je tada $f(x) = f(x_a)$. Stoga je

$$[x,a] = [x_a,a] + [x_{\operatorname{Ker} f},a] = \langle x_a,a\rangle + 2\langle x_{\operatorname{Ker} f},a\rangle = f(x_a) + 2f(x_{\operatorname{Ker} f}) = f(x).$$

■

Vratimo se sad na rješenje Zadatka 5.10.
Rješenje:

(a) Označimo s $w = (w_1,w_2,w_3)$ traženi reprezentant. Tada uvrštavanjem uvjeta $f(z) = \langle z,w\rangle$ za vektore zadane baze daje

$$\begin{cases} \overline{w_1} + i\overline{w_2} = \langle (1,i,0),(w_1,w_2,w_3)\rangle = f(1,i,0) = 2, \\ (1+i)\overline{w_1} + \overline{w_3} = \langle (1+i,0,1),(w_1,w_2,w_3)\rangle = f(1+1,0,1) = i+3, \\ \overline{w_2} - i\overline{w_3} = \langle (0,1,-i),(w_1,w_2,w_3)\rangle = f(0,1,-i) = -3i \end{cases}$$

odakle rješavanjem sustava slijedi $w = (1,i,2)$.

(b) Postupamo kako je opisano u prethodnom zadatku. Kako je $\operatorname{Ker} f = \{(1,i,2)\}^{\perp}$, dopunimo ovaj vektor do ortogonalne baze za $\mathbb{C}^3$: prvo možemo lako pronaći dva vektora okomita na $(1,i,2)$, npr. $(i,1,0)$ i $(2,0,-1)$, te zatim Gram-Schmidtovim postupkom ih ortonormirati. Tako dobijemo ONB za $\operatorname{Ker} f$ danu s $\{b_1,b_2\} = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(i,1,0), \frac{1}{\sqrt{3}}(1,i,-1)\right\}$. Sada možemo zadati skalarni produkt na $\mathbb{C}^3$ s

$$[x,y] = \langle Ax,y\rangle,$$

gdje je $A \in L(\mathbb{C}^3)$ takav da je zapis A u ortonormiranoj bazi $(b) = \{w/\|w\|, b_1, b_2\}$ dan s

$$A(b) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(Ovdje su odabrani brojevi 3 i 1 na prva dva mjesta da bi formula u idućem koraku ispala cjelobrojna). Možemo još za kraj eksplicitno zapisati formulu za taj skalarni produkt. Za to nam je potreban zapis $A(e)$ u kanonskoj bazi, koji je dan s

$$A(e) = I(e,b)A(b)I(e,b)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & i & 0 \\ -i & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je skalarni produkt dan s

$$[(x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)] = 2x_1\overline{y_1} + 2x_2\overline{y_2} + x_3\overline{y_3} - ix_1\overline{y_2} + ix_2\overline{y_1}.$$

■

Zadatak 5.12. Zadan je linearni operator $A \in L(M_2(\mathbb{C}))$ sa

$$A\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a-b & -a+b \\ d & -c \end{bmatrix}$$

Postoji li skalarni produkt na $M_2(\mathbb{C})$ uz koji će operator A biti hermitski?

Rješenje: Neka je (e) kanonska baza za $M_2(\mathbb{C})$. Tada je

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Kako $A(e)$ nije hermitska matrica, to ni A nije hermitski operator (s obzirom na standardni skalarni produkt), pa je potrebno drugačije doći do odgovora. Vidimo da je $k_A(\lambda) = \det(A(e) - I) = (\lambda^2+1)(\lambda-2)\lambda$. Stoga je $\sigma(A) = \{0,2,i,-i\} \nsubseteq \mathbb{R}$. Kako spektar hermitskog operatora (koji ne ovisi o skalarnom produktu) mora biti realan, zaključujemo da ne postoji skalarni produkt na $M_2(\mathbb{C})$ uz koji će operator A biti hermitski. ■

Zadatak 5.13. Zadan je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ svojom matricom u kanonskoj bazi

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Postoji li skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$ takav da je A hermitski operator s obzirom na njega.

Rješenje: Za početak, vidimo kako $A(e)$ nije hermitska matrica, pa A nije hermitski operator u standardnom skalarnom produktu. Stoga trebamo tražiti dalje.

Kako je A trokutasta matrica, to je lako očitati njen spektar; to su upravo dijagonalni elementi. Stoga je $\sigma(A) = \{1,2\} \subseteq \mathbb{R}$, pa ne možemo na isti način kao u prethodnom zadatku zaključiti da takav skalarni produkt ne postoji.

Pretpostavimo na tren da takav skalarni produkt postoji. Tada bi postojala baza (f) za $\mathbb{R}^3$ koja je ortonormirana **s obzirom na taj skalarni produkt** takva da je $A(f)$ dijagonalna matrica (s dijagonalnim elementima $2,2,1$). Dakle, operator A bi za početak bilo moguće dijagonalizirati u nekoj bazi. Pogledajmo sada što je s algebarskim i geometrijskim kratnostima operatora A. Algebarske kratnosti se mogu očitati i direktno s matrice, dok se geometrijske jednostavno mogu odrediti te dobijemo

$$a(1) = 1, \quad a(2) = 2, \qquad g(1) = 1, \quad g(2) = 1.$$

Vidimo da je $a(2) \neq g(2)$ pa slijedi da se operator A ne može dijagonalizirati (u nikakvoj bazi). Dakle, traženi skalarni produkt ne postoji. ■

Zadatak 5.14. Zadan je operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ svojom matricom u kanonskoj bazi

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Postoji li skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$ takav da je A hermitski operator s obzirom na njega.

Rješenje: Za početak, vidimo kako $A(e)$ nije hermitska matrica, pa A nije hermitski operator u standardnom skalarnom produktu.

Ponovno odmah možemo očitati kako je $\sigma(A) = \{1,2,3\} \subseteq \mathbb{R}$. Kako imamo tri različite svojstvene vrijednosti, ovaj se operator može dijagonalizirati u nekoj bazi (f). Dakle, nijedan od prethodna dva argumenta ne možemo iskoristiti da zaključimo da takav skalarni produkt ne postoji. Međutim, ovdje se sada postavlja sljedeće pitanje: možemo li konstruirati skalarni produkt na $\mathbb{R}^3$ takav da je (f) ortonormirana baza s obzirom na taj skalarni produkt? Ako bismo to mogli, tada bi slijedilo da je $A(f)$ hermitska matrica, pa bi slijedilo da je A hermitski operator u tom konstruiranom skalarnom produktu. Tu tvrdnju u općenitijem slučaju pokazujemo u idućem zadatku: iz toga će onda slijediti da je u ovom zadatku odgovor potvrdan, a dobit ćemo i formulu za taj skalarni produkt. ■

Zadatak 5.15. Neka je V vektorski prostor te $(f) = \{f_1, \dots, f_n\}$ neka baza za V. Tada je s

$$[x,y] = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k}, \qquad \text{gdje su } x = \sum_{k=1}^{n} x_k f_k, \quad y = \sum_{k=1}^{n} y_k b_k \in V,$$

dan skalarni produkt na V u kojem je (f) ortonormirana baza.

Rješenje: Da je s $[x,y]$ zaista dan skalarni produkt na V smo već vidjeli u Zadatku 3.3, dok ortonormiranost skupa (f) slijedi direktnom provjerom. ■

Sada možemo kratko i dovršiti rješenje zadatka 5.14, odnosno reći kako izgleda eksplicitno neki takav skalarni produkt. Za početak nam treba neka baza (f) u kojoj se A dijagonalizira, tj. trebaju nam svojstveni vektori od A. Ovdje dobijemo da su svojstveni vektori pridruženi redom svojstvenim vrijednostima $1,2,3$ dani s

$$f_1 = (1,0,0), \quad f_2 = (1,1,0), \quad f_3 = (1,1,1).$$

Prema opisanome, skalarni produkt u kojem je ovo ortonormirana baza ćemo dobiti tako da odredimo zapise proizvoljnog vektora u bazi $(f) = \{f_1, f_2, f_3\}$, te pomnožimo redom takve koordinate. Naravno, koordinate vektora $x = (x_1, x_2, x_3)$ u bazi (f) dobijemo preko matrice prijelaza

$$x(f) = I(f,e)x(e) = I(e,f)^{-1}x(e) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \Phi(e)x(e),$$

gdje je $\Phi \in L(\mathbb{R}^3)$ dan s $\Phi e_j = f_j$, $j = 1,2,3$. Sada je traženi skalarni produkt dan s

$$[x,y] = \langle \Phi x, \Phi y \rangle = \langle \Phi^* \Phi x, y \rangle = x_1 y_1 + 2x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_1 y_2 - x_2 y_1 - x_2 y_3 - x_3 y_2.$$

Primijetimo ovdje i vezu Φ iz Zadatka 3.3 i pozitivno definitnog operatora A: vrijedi $A = \Phi^* \Phi$.

Sada možemo kratko rezimirati prethodne zadatke: ako je $A \in L(\mathbb{F}^n)$ takav da je $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$, te se A može dijagonalizirati u (nekoj) bazi, tada postoji skalarni produkt na $\mathbb{F}^n$ takav da je A hermitski s obzirom na njega. Taj je skalarni produkt dan s

$$[x,y] = \langle \Phi^* \Phi x, y \rangle,$$

gdje je $\Phi \in L(\mathbb{F}^n)$ dan s $\Phi e_j = f_j$, $j = 1,\ldots,n$.

5.3 Krivulje drugog reda

Općeniti **polinom drugog stupnja u dvije realne varijable** x, y je funkcija oblika

$$p(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f,$$

pri čemu su $a, \ldots, f \in \mathbb{R}$ i a, b, c nisu svi jednaki 0.

Krivulje drugog reda su skupovi oblika $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : p(x,y) = 0\}$, gdje je p polinom drugog stupnja u varijablama x, y.

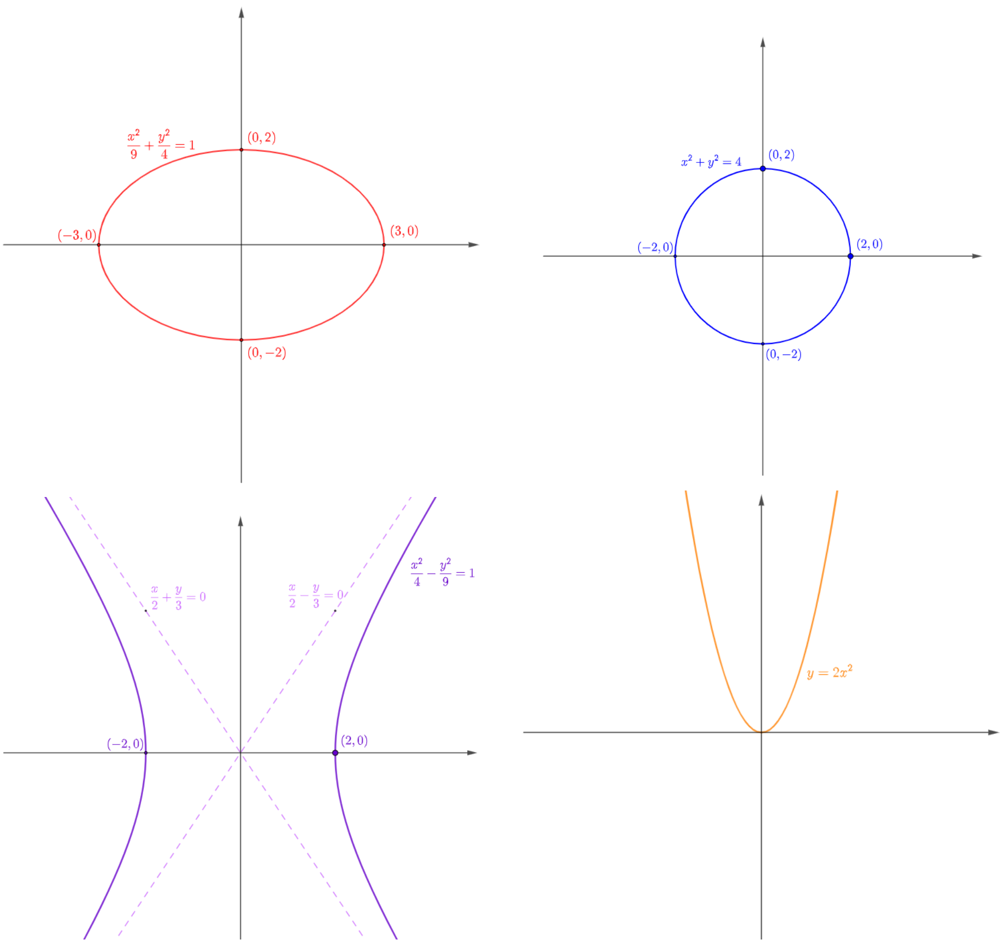
Primjer 5.8. Neke krivulje drugog reda poznate od ranije:

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, gdje su $a, b \neq 0$, je jednadžba elipse s centrom u ishodištu i poluosima a, b.

(b) $x^2 + y^2 = r^2$, gdje je $r > 0$, je jednadžba kružnice s centrom u ishodištu (i poseban slučaj elipse kada su obje poluosi jednake r).

(c) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b} = 1$, gdje su $a, b \neq 0$, je jednadžba hiperbole s poluosima a i b.

(d) $y^2 = ax$, gdje je $a \neq 0$, je jednadžba parabole.



Slika 13: Krivulje drugog reda iz prethodnog primjera

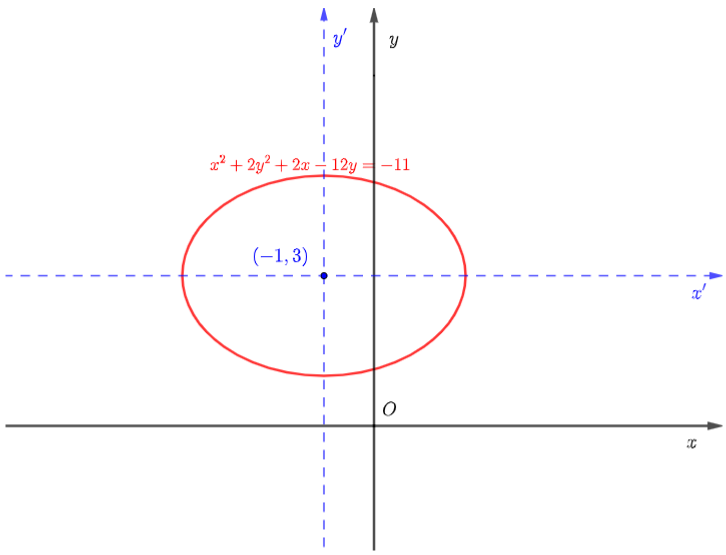
Primjer 5.9. Skicirajmo graf krivulje $x^2 + 2y^2 + 2x - 12y = -11$. Prvo možemo primijetiti da jednostavnim dopunama do potpunog kvadrata ova jednadžba postaje

$$(x+1)^2 + 2(y-3)^2 = 8.$$

Sada uvođenjem supstitucije $x' = x+1$ i $y' = y-3$, ova jednadžba poprima oblik

$$\frac{(x')^2}{8} + \frac{(y')^2}{4} = 1.$$

Ovo je jednadžba elipse s poluosima $2\sqrt{2}$ i 2, ali ne u polaznom xy koordinatnom sustavu, već u koordinatnom sustavu $x'y'$, koji je pak dobiven iz polaznog translacijom za vektor $(-1,3)$.



Slika 14: Elipsa $x^2 + 2y^2 + 2x - 12y = 11$ u originalnom i translatiranom koordinatnom sustavu

Analogno prethodnom primjeru možemo pristupiti i svakoj jednadžbi gdje je $b = 0$, odnosno onima oblika

$$ax^2 + cy^2 + dx + ey + f = 0.$$

Za jednadžbe u kojima je $b \neq 0$ ćemo se poslužiti rezultatima iz prethodnog dijela. Promotrimo prvo jednostavniji primjer u kojem su $d = e = 0$.

Zadatak 5.16. Skicirajte graf krivulje $x^2 + xy + y^2 = 1$.

Rješenje: Uvedimo prvo oznaku

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, \qquad X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Tada zadanu jednadžbu možemo zapisati u obliku

$$\langle AX, X \rangle = 1.$$

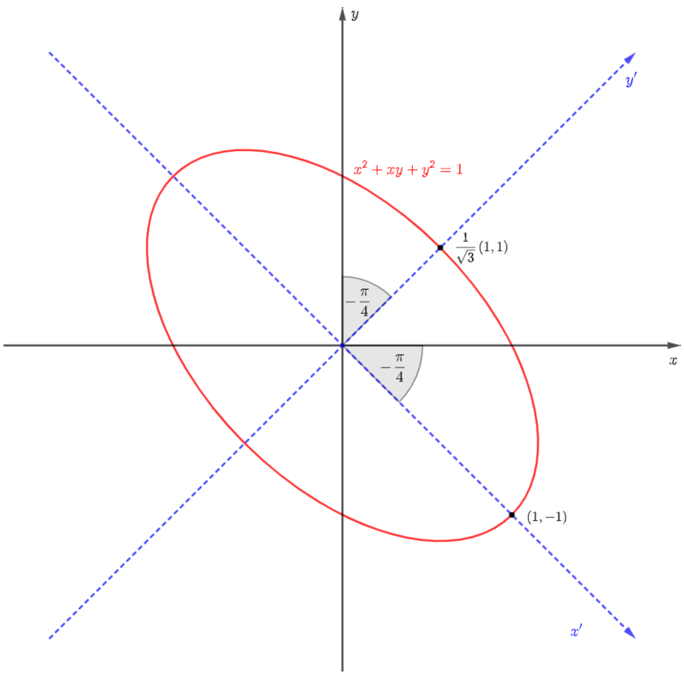
Kako je A simetrična matrica, može se dijagonalizirati u obliku $A = QDQ^T$, gdje je

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad D = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

Uvođenjem supstitucije $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Y = Q^T X$ dobivamo

$$0 = \langle AX, X \rangle = \langle DY, Y \rangle = \frac{1}{2}(x')^2 + \frac{3}{2}(y')^2 = \left(\frac{x'}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{y'}{\frac{\sqrt{6}}{3}}\right)^2.$$

Ovo je pak jednadžba elipse, ali ne u originalnom koordinatnom sustavu, već u koordinatnom sustavu koji je od originalnog dobiven transformacijom određenom zamjenom varijabli $Y = Q^T X$, odnosno matricom Q. Naravno, Q predstavlja rotaciju ravnine za kut $-\frac{\pi}{4}$. Koordinatna os x', odnosno njen pozitivni (jedinični) smjer je određen vektorom $\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ili ekvivalentno $Q^T X = E_1$. Odavde slijedi $X = QE_1$. Analogno dobijemo i da je y' os određena s vektorom QE_2. Dakle, nove koordinatne osi (pa time i novi koordinatni sustav) su dobivene rotacijom starih za kut $-\frac{\pi}{4}$.



Slika 15: Elipsa $x^2 + xy + y^2 = 1$ u originalnom i zarotiranom koordinatnom sustavu

■

U općenitom slučaju postupamo kombiniranjem dva prethodno opisana postupka: prvo svedemo kvadratni dio na kanonski oblik, što daje rotaciju koordinatnog sustava, a zatim po potrebi još translatiramo koordinatni sustav da bismo odredili krivulju i konačni koordinatni sustav u kojem je ona dana u svom najjednostavnije obliku.

Zadatak 5.17. Odredite krivulju zadanu jednadžbom

$$41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0. \tag{14}$$

Rješenje: Danu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\langle AX, X \rangle + \langle B, X \rangle + C = 0,$$

gdje je

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 41 & 12 \\ 12 & 9 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 24 \\ 18 \end{bmatrix}, \quad C = -36.$$

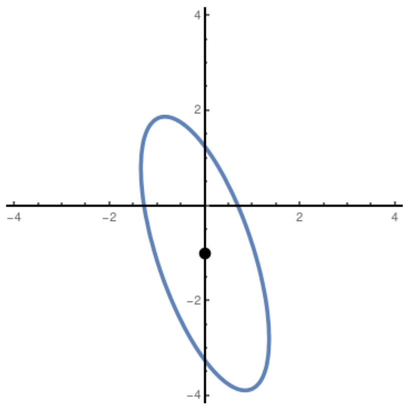
Matrica A ima svojstvene vrijednosti $\sigma(A) = \{45, 5\}$, a odgovarajući normirani svojstveni vektori su

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

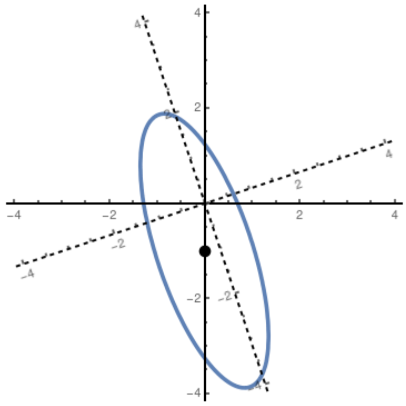
Od njih formiramo matricu Q kao
$$Q = \begin{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & -\frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{bmatrix}.$$
Uvodimo supstituciju $X' = Q^T X$, odnosno
$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = Q^T \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix},$$
te vidimo da se stare koordinate mogu preko novih izraziti kao
$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}}(3x' - y') \\ \frac{1}{\sqrt{10}}(x' + 3y') \end{bmatrix}$$
Uvrstimo u (14) i dobivamo jednadžbu
$$45x'^2 + 5y'^2 + \frac{90}{\sqrt{10}}x' + \frac{30}{\sqrt{10}}y' - 36 = 0$$
odnosno
$$45\left(x'^2 + \frac{2}{\sqrt{10}}x' + \frac{1}{10}\right) - \frac{45}{10} + 5\left(y'^2 + \frac{6}{\sqrt{10}}y' + \frac{9}{10}\right) - \frac{45}{10} - 36 = 0.$$
Uvođenjem nove supstitucije $\begin{bmatrix} x'' \\ y'' \end{bmatrix} = X'' = X' - X_0$, gdje je
$$X_0 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$$
jednadžba postaje
$$45x''^2 + 5y''^2 = 45,$$
odnosno
$$\frac{x''^2}{1} + \frac{y''^2}{9} = 1$$
što je jednadžba elipse centralne u sustavu $\{x'', y''\}$. Taj smo koordinatni sustav dobili tako da smo redom:

- zarotirali početni xy koordinatni sustav za kut $\arccos\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$
- dobiveni koordinatni sustav translatirali za vektor $\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{bmatrix} -1 \\ -3 \end{bmatrix}$ u tom koordinatnom sustavu.

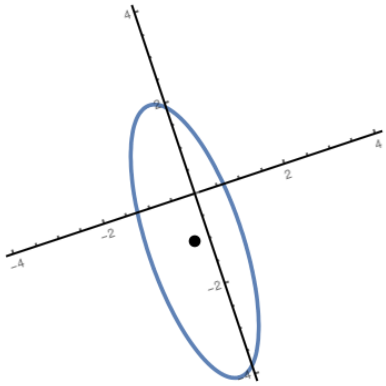
Nove koordinate možemo zapisati i kao
$$X'' = X' - X_0 = Q^T X - X_0,$$
iz čega je
$$X = Q(X'' + X_0)$$
Iz toga vidimo da je ishodište koordinatnog sustava $x''y''$ točka
$$X = Q(0 + X_0) = QX_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$
a jedinične točke (odnosno one koje u koordinatnom sustavu $x''y''$ imaju koordinate $(1,0)$ i $(0,1)$) su redom
$$Q(E_1 + X_0) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 - \sqrt{10} \end{bmatrix}, \qquad Q(E_2 + X_0) = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 - \sqrt{10} \end{bmatrix}.$$



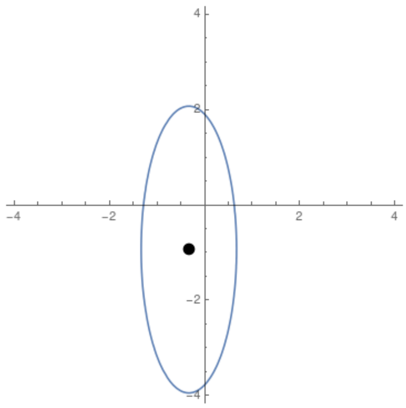
Slika 16: Krivulja u xy sustavu



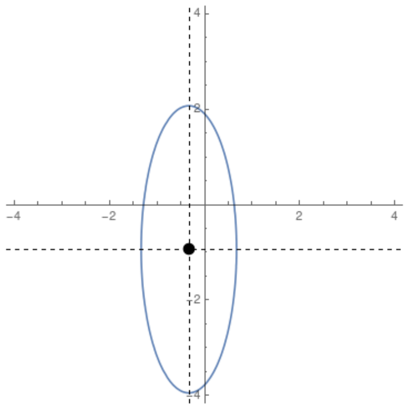
Slika 17: Krivulja u sustavima xy i $x'y'$



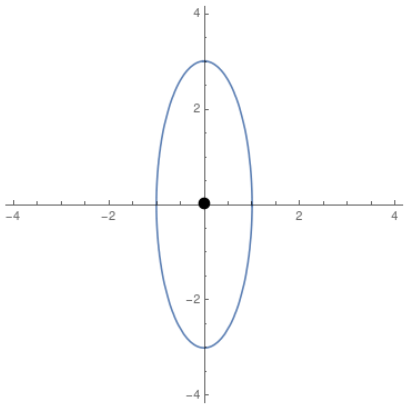
Slika 18: Krivulja u $x'y'$ sustavu



Slika 19: Krivulja u $x'y'$ sustavu



Slika 20: Krivulja u sustavima $x'y'$ i $x''y''$



Slika 21: Krivulja u $x''y''$ sustavu

■

Zadatak 5.18. Odredite krivulju zadanu jednadžbom

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0.$$

Rješenje: Danu jednadžbu možemo napisati u obliku

$$\langle AX, X\rangle + \langle B, X\rangle + C = 0,$$

gdje je

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ -14 \end{bmatrix}, \quad C = -13.$$

Matrica A ima svojstvene vrijednosti $\sigma(A) = \{8, -2\}$, a odgovarajući normirani svojstveni vektori daju matricu Q:

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

što je matrica rotacije za kut $\frac{\pi}{4}$. Stare varijable se mogu izraziti preko novih kao

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = Q \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}(x'-y') \\ \frac{1}{\sqrt{2}}(x'+y') \end{bmatrix}$$

Uvrstimo u početnu jednadžbu i dobivamo jednadžbu

$$8x'^2 - 2y'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}}x' - \frac{12}{\sqrt{2}}y' - 13 = 0$$

odnosno

$$8\left(x'^2 - \frac{2}{\sqrt{2}}x' + \frac{1}{2}\right) - 4 - 2\left(y'^2 + \frac{6}{\sqrt{2}}y' + \frac{9}{2}\right) + 9 - 13 = 0.$$

Uvedimo nove varijable translacijom sustava

$$x'' = x' - \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad y'' = y' + \frac{3}{\sqrt{2}}$$

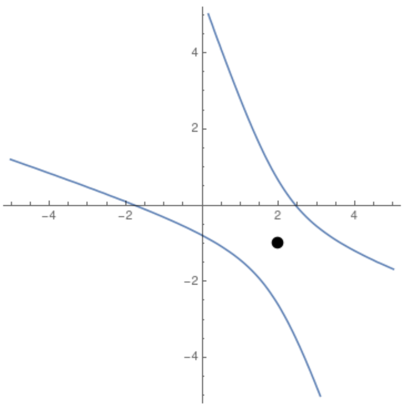
pa se jednadžba svodi na

$$8x''^2 - 2y''^2 = 8,$$

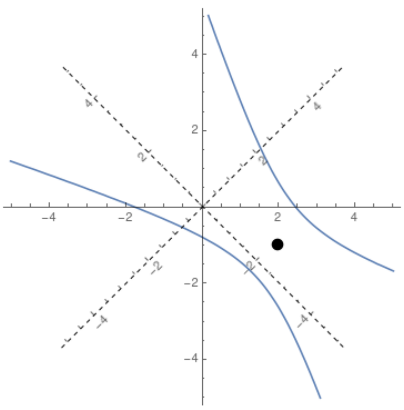
tj.

$$\frac{x''^2}{1} - \frac{y''^2}{4} = 1$$

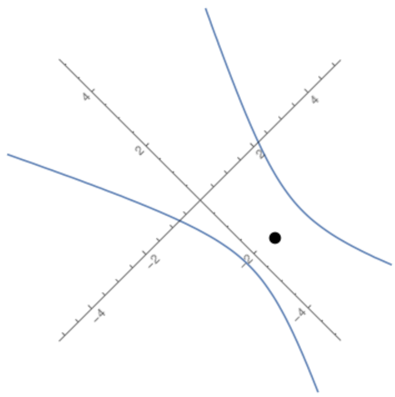
što je jednadžba hiperbole centralne u sustavu $\{x'', y''\}$. Taj sustav je dobiven od početnog $\{x, y\}$ rotacijom za kut $\varphi = \frac{\pi}{4}$, a potom translacijom (u zarotiranom sustavu) za vektor $\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$.



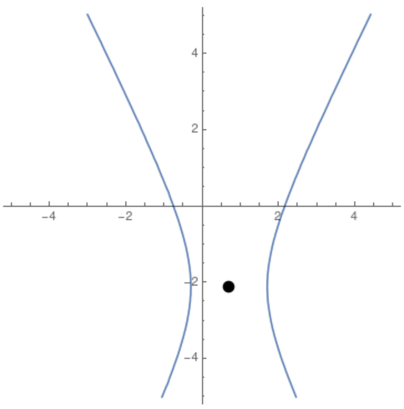
Slika 22: Krivulja u xy sustavu



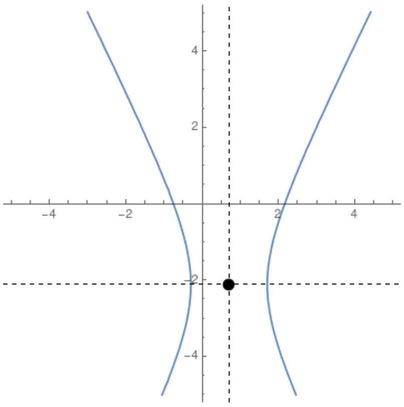
Slika 23: Krivulja u sustavima xy i $x'y'$



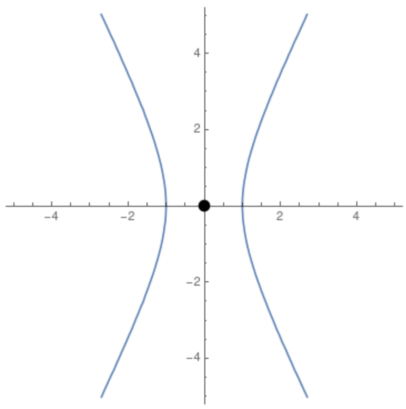
Slika 24: Krivulja u $x'y'$ sustavu



Slika 25: Krivulja u $x'y'$ sustavu



Slika 26: Krivulja u sustavima $x'y'$ i $x''y''$



Slika 27: Krivulja u $x''y''$ sustavu

■

Za kraj ovog dijela ćemo dati klasifikaciju svih mogućih krivulja drugog reda. Neka je stoga skup u $\mathbb{R}^2$ zadan s

$$\langle AX, X\rangle + \langle B, X\rangle + C = 0,$$

za neke $A \in M_2 \setminus \{0\}, B \in M_{21}$ i $C \in \mathbb{R}$. Glavna podjela daljnje diskusije dana je sljedećim trima slučajevima:

(1) $\det A > 0$

(2) $\det A < 0$

(3) $\det A = 0$.

Promotrimo prvo slučaj (1). Neka su λ, μ svojstvene vrijednosti od A (moguće jednake). Kako je $\det A > 0$, to su one istog predznaka; bez smanjenja općenitosti pretpostavimo da su obje pozitivne, inače samo pomnožimo jednadžbu s -1. Nakon uvođenja supstitucije $X' = Q^T X$ dobivamo jednadžbu oblika

$$\lambda(x')^2 + \mu(y')^2 + d'x' + e'y' + C = 0,$$

za neke $d', e' \in \mathbb{R}$. Dopunom do potpunih kvadrata, tu jednadžbu možemo zapisati kao

$$\lambda\left(x' + \frac{d'}{2\lambda}\right)^2 + \mu\left(y' + \frac{e'}{2\mu}\right)^2 = f',$$

za neki $f' \in \mathbb{R}$. U ovom trenutku postoje tri mogućnosti:

(1a) Ako je $f' < 0$, tada ova jednadžba nema rješenja, pa je dani skup zapravo prazan.

(1b) Ako je $f' = 0$, tada ova jednadžba ima jedinstveno rješenje $(x', y') = \left(-\frac{d'}{2\lambda}, -\frac{e'}{2\mu}\right)$, pa je dani skup jedna točka u ravnini.

(1c) Ako je $f' > 0$, tada je ovo jednadžba koja opisuje jednu elipsu u ravnini.

Promotrimo sada slučaj $\det A < 0$. Bez smanjenja općenitosti, neka je $\lambda > 0$ i $\mu < 0$. Stavimo radi sugestivnosti oznaku $\nu = -\mu > 0$. Tada nakon prve supstitucije dolazimo do jednadžbe oblika

$$\lambda(x')^2 - \nu(y')^2 + d'x' + e'y' + C = 0,$$

odakle dopunom do potpunih kvadrata slijedi

$$\lambda\left(x'+\frac{d'}{2\lambda}\right)^2-\nu\left(y'-\frac{e'}{2\nu}\right)^2=f'.$$

Sada razlikujemo slučajeve:

(2a) Ako je $f'=0$, tada jednadžba glasi

$$\lambda\left(x'+\frac{d'}{2\lambda}\right)^2=\nu\left(y'-\frac{e'}{2\nu}\right)^2,$$

odnosno

$$\left|y'-\frac{e'}{2\nu}\right|=\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}\left|x'+\frac{d'}{2\lambda}\right|,$$

što je jednadžba koja opisuje dva pravca koeficijenata smjera $\pm\sqrt{\frac{\lambda}{\nu}}$ (u koordinatnom sustavu $x'y'$) koji se sijeku u točki $\left(-\frac{d'}{2\lambda},\frac{e'}{2\nu}\right)$.

(2b) Ako je $f'\neq 0$, tada je ovo jednadžba koja opisuje jednu hiperbolu u ravnini,

$$\lambda\left(x'+\frac{d'}{2\lambda}\right)^2-\nu\left(y'-\frac{e'}{2\nu}\right)^2=f'.$$

Konačno, promotrimo slučaj (3). Kako je $A\neq 0$, jedna svojstvena vrijednost tada mora biti 0, a druga različita od 0. Pretpostavimo da je $\lambda>0$ i $\mu=0$ (ostali slučajevi se dobivaju analogno, ili množenjem jednadžbe s -1 ili zamjenom uloge x i y). Tada nakon prve supstitucije dobivamo jednadžbu

$$\lambda(x')^2+d'x'+e'y'+C=0,$$

pa dopunom do potpunog kvadrata slijedi

$$\lambda\left(x'+\frac{d'}{2\lambda}\right)^2+e'y'=f'.$$

Razlikujemo sljedeće slučajeve:

(3a) Ako je $e'=0$ i $f'<0$, tada ova jednadžba nema rješenja, pa je dani skup prazan.

(3b) Ako je $e'=0$ i $f'=0$, tada jednadžba $\lambda\left(x'+\frac{d'}{2\lambda}\right)^2=0$ ima jedinstveno rješenje $x'=-\frac{d'}{2\lambda}$, pa je dani skup jedna točka u ravnini.

(3c) Ako je $e'=0$ i $f'>0$, tada jednadžba glasi

$$\lambda\left(x'+\frac{d'}{2\lambda}\right)^2=f',$$

pa je dani skup unija dva paralelna pravca dana s $x'=\pm\sqrt{\frac{f'}{\lambda}}-\frac{d'}{2\lambda}$.

(3c) Ako je $e'\neq 0$, tada jednadžba postaje

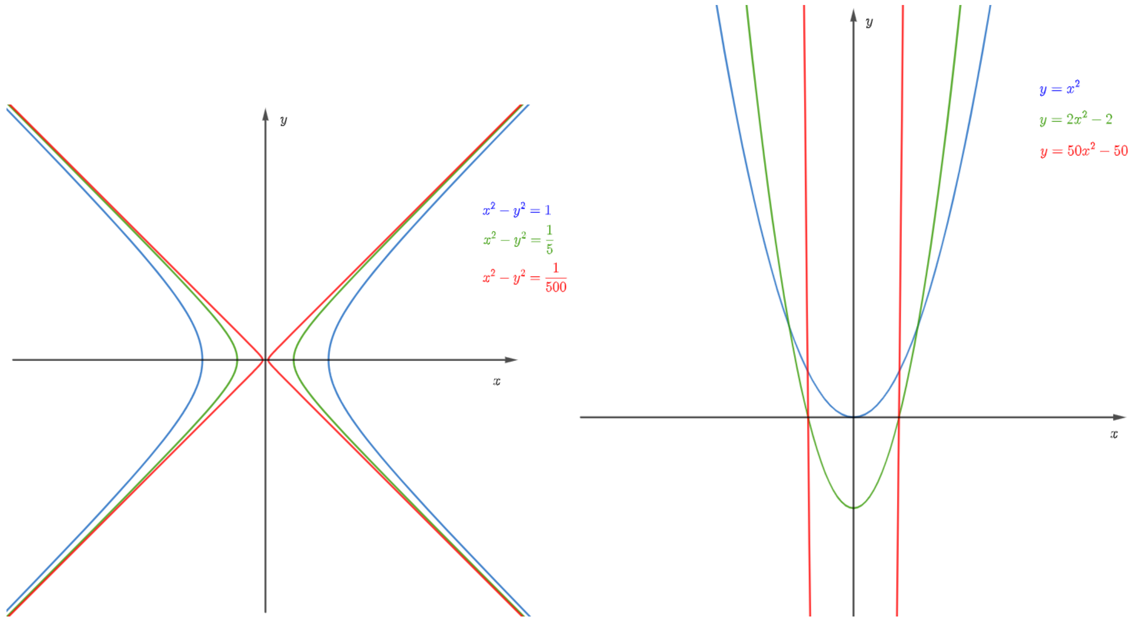
$$y'=-\frac{\lambda}{e'}\left(x'+\frac{d'}{2\lambda}\right)^2+\frac{f'}{e'},$$

što je jednadžba parabole.

Dakle, ukoliko zanemarimo neke degenerirane slučajeve (nultočke polinoma čine prazan ili jednočlan skup), vidimo da su sve krivulje drugog reda

- elipse
- hiperbole
- unija dva pravca koja se sijeku
- parabole
- unija dva paralelna pravca

Štoviše, i slučaj unije dva pravca koja se sijeku možemo shvatiti kao svojevrsni granični slučaj hiperbole (puštanjem $f' \to 0$ u (2b)), odnosno slučaj unije dva paralelna pravca možemo shvatiti kao granični slučaj parabole (puštanjem $e' \to 0$ u (3c))



Slika 28: Unije dva pravca koji se sijeku i unija dva paralelna pravca kao "rubni" slučaj hiperbole, odnosno parabole

Iz tih razloga se kao standardni predstavnici s obzirom na navedenu podjelu uzimaju

- elipsa za slučaj $\det A > 0$
- hiperbola za slučaj $\det A < 0$
- parabola za slučaj $\det A = 0$.