Linearna algebra 2
vježbe

Ljiljana Arambašić, Tomislav Berić, Matko Grbac, Ana Prlić

Sadržaj

1 Linearni operatori

1.1 Definicija i osnovni primjeri linearnih operatora

Definicija 1.1. Neka su V, W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$. Preslikavanje $A : V \to W$ se naziva **linearni operator** ako vrijedi

$$A(\alpha x+\beta y) = \alpha A(x)+\beta A(y), \quad \forall x,y \in V, \alpha,\beta \in \mathbb{F}. \quad \text{(linearnost)}$$

Posebno, ako je kodomena preslikavanja A polje $\mathbb{F}$ ($W = \mathbb{F}$), linearni operator A zovemo **linearnim funkcionalom**.

Svojstvo linearnosti ekvivalentno je sa sljedeća dva svojstva

$$\begin{aligned} A(x+y) &= A(x)+A(y), \quad \forall x,y \in V \quad \text{(aditivnost)} \\ A(\alpha x) &= \alpha A(x), \quad \forall x \in V, \alpha \in \mathbb{F} \quad \text{(homogenost).} \end{aligned}$$

Indukcijom se jednostavno pokaže da je A linearan operator ako i samo ako vrijedi

$$A\left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j A(x_j), \qquad x_1,\dots,x_k \in V, \alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{F}.$$

Često kažemo da linearni operatori "komutiraju s linearnim kombinacijama" ili da "čuvaju" linearne kombinacije.

Zadatak 1.1. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori:

(a) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, \quad A(x_1,x_2,x_3) = (x_1+x_2+x_3, 2x_1-x_2)$

(b) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad A(x,y) = |x|,$

(c) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad A(x,y) = x \cdot y,$

(d) $A : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad A(z) = \operatorname{Re} z,$

(e) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad A(x,y) = (x, y+2).$

(f) $f : \mathscr{P} \to \mathbb{R}, \quad f(p) = p(x_0)$, gdje je $x_0 \in \mathbb{R}$ zadan.

Rješenje:

(a) Neka su $x = (x_1,x_2,x_3), y = (y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3$ te $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$\begin{aligned} A(\alpha x+\beta y) &= (\alpha x_1+\beta y_1+\alpha x_2+\beta y_2+\alpha x_3+\beta y_3, 2(\alpha x_1+\beta y_1)-(\alpha x_2+\beta y_2)) \\ &= \alpha(x_1+x_2+x_3, 2x_1-x_2)+\beta(y_1+y_2+y_3, 2y_1-y_2) \\ &= \alpha A(x)+\beta A(y), \end{aligned}$$

pa vidimo da je A linearan operator.

(b) Provjerimo homogenost od A. Za $(x,y) = (1,0)$ i $\alpha = -1$ imamo

$$A(\alpha(x,y)) = A(-1,-1) = 1, \quad \alpha A(x,y) = (-1)\cdot 1 = -1,$$

pa A nije homogeno, a onda niti linearno preslikavanje.

Štoviše, ovo preslikavanje nije niti aditivno; imamo

$$A(1,0)+A(-1,0) = 2,$$

dok je s druge strane

$$A((1,0)+(-1,0)) = A(0,0) = 0.$$

Naravno, jednom kad smo pokazali da ovo preslikavanje nije homogeno, to je dovoljno za zaključiti da ono nije linearno; aditivnost nije potrebno provjeravati.

(c) Pokažimo da ovo preslikavanje nije homogeno. Uzmimo $(x,y) = (1,1)$ te $\alpha = 2$. Tada imamo

$$A(2,2) = 4 \neq 2 = 2 \cdot A(1,1).$$

(d) Primijetimo da preslikavanje nije homogeno; imamo $0 = A(i \cdot 1) \neq i \cdot A(1) = i$.

(e) Primijetimo da A ne preslikava nul-vektor u nul-vektor, što je nužan uvjet za svaki linearan operator. Naime, $A(0,0) = (0,2) \neq (0,0)$.

(f) Neka su $p,q \in \mathscr{P}$ te $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ proizvoljni. Tada je

$$\begin{aligned} f(\alpha p + \beta q) &= (\alpha p + \beta q)(x_0) \\ &= \alpha p(x_0) + \beta q(x_0) \\ &= \alpha f(p) + \beta f(q), \end{aligned}$$

pa vidimo da je f linearan funkcional.

$\blacksquare$

Zadatak 1.2. Postoji li linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ takav da vrijedi:

(a) $A(1,2,3) = (1,1)$ i $A(2,4,6) = (2,3)$?

(b) $A(1,0,0) = (1,1)$ i $A(2,0,0) = (2,2)$?

(c) $A(1,0,1) = (2,1), A(1,1,0) = (1,2), A(0,1,-1) = (0,1)$.

Rješenje:

(a) Ukoliko bi takav linearan operator postojao, zbog homogenosti bi moralo vrijediti

$$A(2,4,6) = A(2(1,2,3)) = 2A(1,2,3) = 2(1,1) = (2,2).$$

Kako je u zadatku zadano da je $A(2,4,6) = (2,3)$, takav linearan operator ne postoji.

(b) Uočimo da je $(2,0,0) = 2(1,0,0)$ i da je u ovom podzadatku $A(2,0,0) = 2A(1,0,0)$ pa nemamo problem kao u (a) dijelu zadatka. Ovdje možemo jednostavno pogoditi jedno preslikavanje koje će zadovoljavati oba zadana uvjeta; to je preslikavanje

$$A(x_1,x_2) = (x_1,x_1).$$

Sada direktno provjerimo (po definiciji) da je ovako zadano preslikavanje zaista linearan operator.

(c) Uočimo da vrijedi $(1,0,1)+(0,1,-1) = (1,1,0)$. Kada bi postojao linearni operator koji zadovoljava uvjete zadatka, onda bi zbog aditivnosti moralo vrijediti i

$$A(1,0,1) + A(0,1,-1) = A(1,1,0),$$

tj. $(2,1)+(0,1) = (1,2)$. Budući da smo došli do kontradikcije, zaključujemo da ne postoji linearni operator koji zadovoljava uvjete zadatka.

■

Zadatak 1.3. Neka je p pravac kroz ishodište čija je jednadžba $y = kx$, $k \in \mathbb{R}$. Odredite eksplicitne formule za sljedeća preslikavanja, te dokažite da su to linearni operatori:

(a) $P : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pri čemu je $P(x,y)$ ortogonalna (okomita) projekcija točke (x,y) na pravac p.

(b) $Z : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, pri čemu su $Z(x,y)$ i (x,y) osno simetrične točke s obzirom na pravac p.

Ako je p pravac koji ne prolazi kroz ishodište, hoće li preslikavanja P i Z i tada biti linearni operatori?

Rješenje:

(a) Ako je $k = 0$, tada je dani pravac zapravo x-os, te je očito $P(x,y) = (x,0)$.

Pretpostavimo da je $k \neq 0$. Tada, za proizvoljnu točku $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, točku $P(x,y)$ možemo dobiti kao presjek zadanog pravca p te pravca q koji prolazi kroz točku (x,y) i okomit je na pravac p. Jednadžba takvog pravca je dana s

$$y' - y = -\frac{1}{k}(x' - x).$$

Kako je $P(x,y) = p \cap q$, tada su njegove koordinate (x', y') rješenje sustava

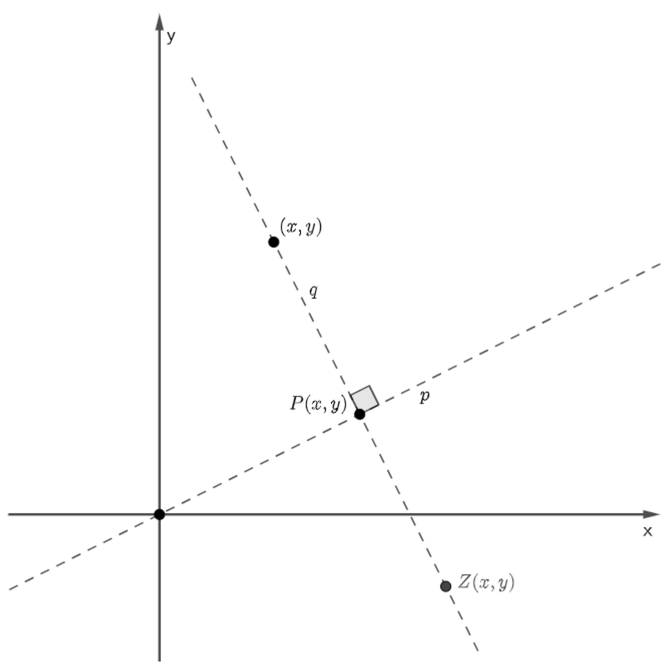
$$\begin{cases} y' = kx' \\ y' - y = -\frac{1}{k}(x' - x) \end{cases}$$

iz čega slijedi da, za $k \neq 0$, vrijedi

$$P(x,y) = \frac{1}{k^2+1}(x + ky, kx + k^2 y). \tag{1}$$

Uočimo da se i slučaj $k = 0$ uklapa u ovu formulu (uvrstimo li $k = 0$ u gornji izraz dobijemo $P(x,y) = (x,0)$, kao što smo već ranije dobili). Prema tome, ortogonalna projecija na pravac p dana je s (1) za svaki $k \in \mathbb{R}$.

Linearnost ovog preslikavanja provjeri se direktno po definiciji.



Slika 1: Ortogonalna projekcija $P(x,y)$ i osnosimetrična točka $Z(x,y)$ točke (x,y)

(b) Kako je $P(x,y)$ polovište dužine s krajnjim točkama (x,y) i $Z(x,y)$, vrijedi

$$(x,y)+Z(x,y)=2P(x,y), \quad \forall (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Odavde slijedi

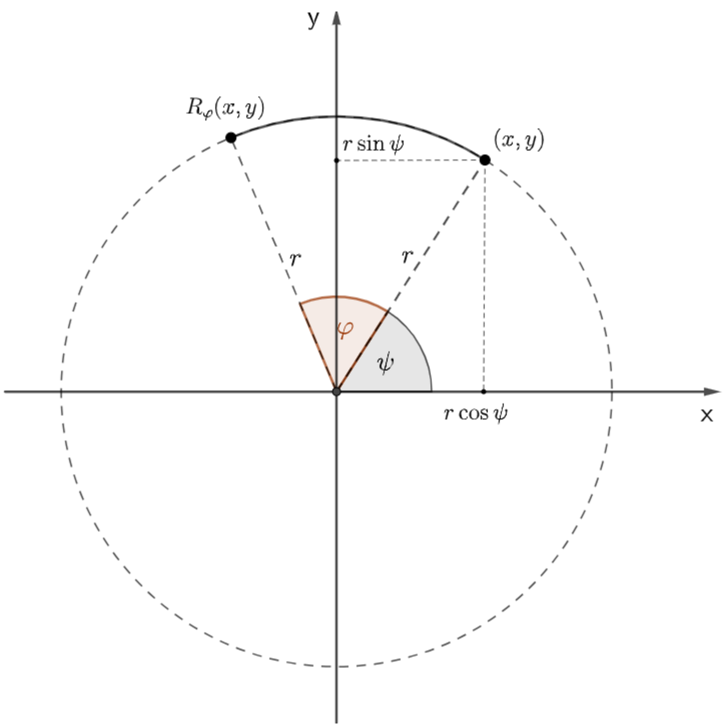
$$Z(x,y)=2P(x,y)-(x,y)=\frac{1}{k^2+1}\left((1-k^2)x+2ky, 2kx+(k^2-1)y\right).$$

I ovdje se linearnost provjeri direktno po definiciji.

Za zadnje pitanje dovoljno je gledati gdje se preslikava $(0,0)$: s obzirom da su u oba slučaja jedine fiksne točke one koje se već nalaze na pravcu p, vidimo da se $(0,0)$ ne preslikava u $(0,0)$, pa tada pripadna preslikavanja neće biti linearni operatori. ■

Zadatak 1.4. Neka je $R_\varphi:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ rotacija ravnine oko ishodišta za kut φ u pozitivnom smjeru (suprotnom kretanju kazaljke na satu). Odredite eksplicitnu formulu za R_φ i pokažite da je R_φ linearni operator.

Rješenje: Očito imamo $R_\varphi(0,0)=(0,0)$. Neka je sada $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$. Za takvu točku postoje jedinstveni $r>0$ (modul) i $\psi\in[0,2\pi)$ (kut koji pripadni vektor zatvara s pozitivnim dijelom x-osi) takvi da je $(x,y)=(r\cos\psi, r\sin\psi)$.



Slika 2: Koordinate točaka (x,y) i $R_\varphi(x,y)$ preko parametara r i ψ

Tada točka $R_\varphi(x,y)$ ima isti modul, dok je njen pripadni kut tada po definiciji $\psi+\varphi$. Stoga je

$$\begin{aligned}R_\varphi(x,y)&=(r\cos(\psi+\varphi), r\sin(\psi+\varphi))\\&=(r(\cos\psi\cos\varphi-\sin\psi\sin\varphi), r(\sin\psi\cos\varphi+\cos\psi\sin\varphi)\\&=(\cos\varphi\cdot x-\sin\varphi\cdot y, \sin\varphi\cdot x+\cos\varphi\cdot y).\end{aligned}$$

Posebno, ova formula je korektna i uvrštavanjem $x=y=0$.

I ovdje se linearnost preslikavanja R_φ provjeri direktno po definiciji. ■

Napomena 1.2. U sva tri prethodna primjera treba naglasiti da umjesto $\mathbb{R}^2$ možemo gledati i $V^2(O)$; primjerice, za R_φ bi tada odgovarajuća formula glasila

$$R_\varphi(x\vec{i}+y\vec{j}) = (\cos\varphi\cdot x - \sin\varphi\cdot y)\vec{i} + (\sin\varphi\cdot x + \cos\varphi\cdot y)\vec{j}.$$

Zadatak 1.5. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori na odgovarajućim prostorima polinoma:

(a) $A:\mathscr{P}_k\to\mathscr{P}_k,\quad (A(p))(t)=p(t+1),\ \ t\in\mathbb{R},$

(b) $B:\mathscr{P}_k\to\mathscr{P}_k,\quad (B(p))(t)=p(t)+1,\ \ t\in\mathbb{R},$

(c) $C:\mathscr{P}\to\mathscr{P},\quad (C(p))(t)=(p(t))^2,\ \ t\in\mathbb{R},$

(d) $D:\mathscr{P}\to\mathscr{P},\quad (D(p))(t)=(p\circ p)(t),\ \ t\in\mathbb{R}.$

Rješenje:

(a) Trebamo provjeriti vrijedi li $A(\alpha p+\beta q)=\alpha A(p)+\beta A(q)$ za sve $p,q\in\mathscr{P}_k$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. Za proizvoljni $t\in\mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned}(A(\alpha p+\beta q))(t) &= (\alpha p+\beta q)(t+1)\\ &= \alpha p(t+1)+\beta q(t+1)\\ &= \alpha(A(p))(t)+\beta(A(q))(t)\\ &= (\alpha A(p)+\beta A(q))(t).\end{aligned}$$

Dakle, A je linearan operator.

(b) Ako je $p=0$ nulpolinom, onda je $(B(p))(t)=1$. Dakle, B ne preslikava nulvektor u nulvektor i pa stoga nije linearan operator.

(c) Za $p(t)=1$, $t\in\mathbb{R}$ i $\alpha=2$, imamo za sve $t\in\mathbb{R}$

$$(C(2p))(t)=2^2=4 \quad \text{i} \quad 2(C(p))(t)=2$$

pa je $C(2p)\neq 2C(p)$. Dakle, C nije homogen, pa prema tome nije linearni operator.

(d) Za $p(t)=t$, $t\in\mathbb{R}$ i $\alpha=2$, dobivamo

$$(D(2p))(t)=(2p)(2t)=2(2t)=4t \quad \text{i} \quad 2(D(p))(t)=2t, \quad t\in\mathbb{R},$$

pa je $D(2p)\neq 2D(p)$. Dakle, D nije homogen, pa stoga nije linearni operator.

■

Navedimo još neke primjere linearnih operatora (koje smo naveli na predavanjima).

Primjer 1.3. (a) Neka je V vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$. Identiteta $I_V:V\to V$, $I_V(x)=x$ je linearan operator.

(b) Neka je $A\in M_{mn}(\mathbb{F})$. Preslikavanja

- $L_A: M_{np}\to M_{mp},\quad L_A(X)=AX$ (množenje matricom A s lijeve strane)
- $R_A: M_{pm}\to M_{pn},\quad R_A(X)=XA$ (množenje matricom A s desne strane)

su linearni operatori (domene i kodomoene su odabrane tako da su množenja dobro definirana).

(c) Preslikavanje $A \mapsto A^T$, koje svakoj matrici pridružuje njoj transponiranu matricu, je linearni operator s $M_{mn}(\mathbb{F})$ u $M_{nm}(\mathbb{F})$.

(d) Preslikavanje $\mathrm{tr} : M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ koje svakoj kvadratnoj matrici pridružuje njen trag je linearan funkcional na $M_n(\mathbb{F})$.

(e) Preslikavanje $p \mapsto p'$, koje svakom polinomu pridružuje njegovu derivaciju, je linearan operator s $\mathscr{P}$ u $\mathscr{P}$. Također, možemo promatrati i preslikavanje $p \mapsto p'$ s $\mathscr{P}_n$ u $\mathscr{P}_{n-1}$ za $n \geq 1$.

(f) Na kolegiju Matematička analiza 2 proučavaju se (određeni) integrali funkcija.
Neka su $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Preslikavanje koje svakom polinomu p pridružuje vrijednost $\int_a^b p(x)dx$ je linearan funkcional na $\mathscr{P}$. Za kanonske vektore ga računamo po formuli

$$\int_a^b x^k dx = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}, \qquad k \in \mathbb{N}_0,$$

dok za proizvoljni polinom $p(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ je tada

$$\int_a^b p(x)dx = \sum_{k=0}^n a_k \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{k+1}.$$

Zadatak 1.6. Neka je $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_{n1}(\mathbb{R})$ preslikavanje koje matrici X pridružuje zbroj njenih stupaca. Dokažite da je T linearni operator.

Rješenje: Odredimo prvo eksplicitnu formulu za T. Proizvoljnu matricu $X \in M_n(\mathbb{R})$ zapišimo stupčano kao $X = [S_1\ S_2\ \ldots\ S_n]$. Zbroj stupaca matrice X možemo dobiti sljedećim matričnim množenjem:

$$[S_1\ S_2\ \ldots\ S_n] \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = S_1 + S_2 + \ldots + S_n = T(X).$$

Prema tome, ako stavimo da je $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \end{bmatrix}^T \in M_{n1}$, tada je $T(X) = XA$ za svaki $X \in M_n(\mathbb{R})$. Sada vidimo da je $T = R_A$ (oznaka iz Primjera 1.3), odakle automatski slijedi da je T linearni operator. ■

Iz zadanih linernih operatora možemo konstruirati nove linearne operatore. Dva načina su dana u sljedećoj propoziciji.

Propozicija 1.4. *(a) Ako su $A, B : V \to W$ linearni operatori, te $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, tada je i njihova linearna kombinacija $\alpha A + \beta B : V \to W$ linearan operator.*

(b) Ako su $A : V \to W$ i $B : W \to Z$ linearni operatori, tada je i njihova kompozicija $B \circ A : V \to Z$ linearan operator.

Zadatak 1.7. Neka je $A \in M_2(\mathbb{R})$ proizvoljna matrica i $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ preslikavanje dano s

$$T(X) = AX - XA.$$

Dokažite da je T linearni operator.

Rješenje: Zadatak bismo mogli riješiti direktnom provjerom linearnosti preslikavanja T, ali sada možemo i lakše koristeći prethodnu propoziciju. Preslikavanje T zapišemo kao $T = L_A - R_A$, gdje su L_A, R_A linearni operatori iz Primjera 1.3(a). Sada je T linearna kombinacija linearnih operatora, pa je T i sam linearan. ■

Primjer 1.5. Pokažimo kako smo alternativno mogli pokazati linearnost zrcaljenja i rotacije, koristeći linearnost ortogonalne projekcije (koju smo provjerili).

(a) Neka su pravac p te preslikavanja P i Z kao u Zadatku 1.3. Pokazali smo da je P linearan operator, te izveli relaciju

$$Z(x,y) = 2P(x,y) - (x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

to jest, dobili smo da je

$$Z = 2P - I.$$

To znači da je Z linearna kombinacija linearnih operatora P i I, pa je i sam linearan prema prethodnoj propoziciji.

(b) Neka je $\varphi \in [0, 2\pi)$ te neka su p, q pravci koji s pozitivnim dijelom x-osi zatvaraju redom kuteve $\frac{\varphi}{4}$ i $\frac{3\varphi}{4}$. Na kolegiju EM2 je (geometrijskom argumentacijom) pokazano da vrijedi

$$Z_q \circ Z_p = R_\varphi,$$

pri čemu Z_p, Z_q predstavljaju zrcaljenje s obzirom na pripadni pravac. Kako su zrcaljenja linearni operatori, prema prethodnoj propoziciji je i rotacija, kao njihova kompozicija, linearan operator.

Zadatak 1.8. Neka su V, W vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$. Neka je $\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq W$, te neka su $f_1, \ldots, f_n : V \to \mathbb{F}$ linearni funkcionali. Tada je preslikavanje $A : V \to W$ dano s

$$A(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x) v_j$$

linearan operator.

Rješenje: Za proizvoljne $x, y \in V$ i $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, iz linearnosti od $f_1, \ldots, f_n$ slijedi

$$\begin{aligned} A(\alpha x + \beta y) &= \sum_{j=1}^{n} f_j(\alpha x + \beta y) v_j = \sum_{j=1}^{n} (\alpha f_j(x) + \beta f_j(y)) v_j \\ &= \alpha \sum_{j=1}^{n} f_j(x) v_j + \beta \sum_{j=1}^{n} f_j(y) v_j \\ &= \alpha A(x) + \beta A(y). \end{aligned}$$

■

Primjer 1.6. Neka je $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ preslikavanje dano s

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} x_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} a_{mj} x_j \right),$$

gdje su $a_{ij} \in \mathbb{F}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ zadani skalari. Pokažimo da je A linearan operator.

Iskoristit ćemo prethodni zadatak. Ako označimo s $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ linearne funkcionale zadane s

$$f_i(x) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j, \quad i = 1, \ldots, m,$$

tada je

$$Ax = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) e_i,$$

pa je prema prethodnom zadatku A linearan operator.

Zadatak 1.9. Neka je $A : \mathscr{P} \to M_2(\mathbb{R})$ preslikavanje dano s

$$A(p) = \begin{bmatrix} p(1) - p(-1) & p'(1) \\ \int_0^1 p(x)dx & \int_{-1}^1 p(x+1)dx \end{bmatrix}.$$

Pokažimo da je A lineran operator.

Rješenje: Uočimo prvo kako djelovanje A možemo zapisati kao

$$A(p) = f_1(p)E_{11} + f_2(p)E_{12} + f_3(p)E_{21} + f_4(p)E_{22},$$

gdje su $f_1, \dots, f_4 : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ dani s

$$f_1(p) = p(1) - p(-1), \quad f_2(p) = p'(1), \quad f_3(p) = \int_0^1 p(x)dx, \quad f_4(p) = \int_{-1}^1 p(x+1)dx.$$

(Ovdje E_{ij} označavaju matrice koje na mjestu (i, j) imaju 1 i sve ostalo 0.) Prema prethodnom zadatku, za linearnost od A dovoljno je provjeriti da su preslikavanja f_1, f_2, f_3, f_4 linearni funkcionali. Imamo sljedeće:

- f_1 je linearna kombinacija linearnih funkcionala $g_1(p) = p(1)$ i $h_1(p) = p(-1)$, pa je stoga i on sam linearan.
- f_2 se može prikazati kao kompozicija $g_2 \circ h_2$, gdje su $h_2 : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ i $g_2 : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ linearni operatori dani s $h_2(p) = p'$ i $g_2(q) = q(1)$. Stoga je i f_2 linearan.
- Za f_3 od ranije znamo da je linearno, uz $a = 0$ i $b = 1$.
- f_4 se može prikazati kao kompozicija $g_4 \circ h_4$, gdje su $h_4 : \mathscr{P} \to \mathscr{P}$ i $g_4 : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ linearni operatori dani s $h_4(p)(t) = p(t+1)$, $g_4(q) = \int_{-1}^1 q(x)dx$. Stoga je i f_4 linearan funkcional.

■

Zadatak 1.10. Neka je $Q : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_2$ *operator interpolacije* u čvorovima -1, 0, 1, tj. neka je Qp jedinstveni polinom stupnja najviše 2 čiji graf prolazi točkama $(-1, p(-1))$, $(0, p(0))$, $(1, p(1))$. Dokažite da je Q linearni operator.

Rješenje: Neka je $p \in \mathscr{P}_3$, te označimo

$$(Qp)(x) = a_0(p) + a_1(p)x + a_2(p)x^2.$$

Tada je

$$\begin{aligned} p(-1) = (Qp)(-1) &= a_0(p) - a_1(p) + a_2(p) \\ p(0) = (Qp)(0) &= a_0(p) \\ p(1) = (Qp)(1) &= a_0(p) + a_1(p) + a_2(p) \end{aligned}$$

Slijedi da je

$$a_0(p) = p(0), \quad a_1(p) = \frac{p(1) - p(-1)}{2}, \quad a_2(p) = \frac{p(1) + p(-1)}{2} - p(0).$$

Ukoliko označimo redom polinome kanonske baze za $\mathscr{P}_2$ s v_0, v_1, v_2, tada djelovanje Q možemo zapisati kao

$$Qp = a_0(p)v_0 + a_1(p)v_1 + a_2(p)v_2.$$

Kako su a_0, a_1, a_2 kao linearne kombinacije linearnih funkcionala i sami takvi, prema zadatku 1.8 slijedi da je Q linearan operator. ■

1.2 Zadavanje linearnih operatora

Na predavanjima smo dokazali sljedeće rezultate:

Teorem 1.7. *Linearni operatori $A, B : V \to W$ su jednaki ako i samo ako se podudaraju svojim djelovanjem na nekoj bazi prostora V.*

Teorem 1.8. *Neka su V, W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $\dim V = n$, $\{b_1, \dots, b_n\}$ baza za V, $(w_1, \dots, w_n)$ bilo koja uređena n–torka vektora iz W. Tada postoji jedinstveni linearni operator $A : V \to W$ takav da je*

$$Ab_i = w_i, \quad i = 1, \dots, n.$$

U tom slučaju, za $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i b_i$, djelovanje operatora A je dano s

$$A(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i w_i.$$

Zadatak 1.11. Neka je f linearni funkcional na $M_2(\mathbb{R})$ za koji vrijedi

$$f(I) = 2, \quad f(E_{11}) = 1, \quad f(E_{12}) = f(E_{21}) = 0.$$

Je li f jedinstveno određen? Odredite $f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)$.

Rješenje: Prema teoremu 1.8, ovakav f je jedinstveno određen jer je zadano njegovo djelovanje na bazi $\{I, E_{11}, E_{12}, E_{21}\}$. Iz

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = dI + (a-d)E_{11} + bE_{12} + cE_{21}$$

slijedi

$$f\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = df(I) + (a-d)f(E_{11}) + bf(E_{12}) + cf(E_{21}) = 2d + a - d = a + d.$$

Drugi način je da uočimo da je

$$f(I) = \operatorname{tr}(I), \quad f(E_{11}) = \operatorname{tr}(E_{11}), \quad f(E_{12}) = \operatorname{tr}(E_{12}), \quad f(E_{21}) = \operatorname{tr}(E_{21}).$$

to jest, linearni funkcionali f i tr se podudaraju na bazi domene. Prema teoremu 1.7, $f = \operatorname{tr}$. ■

Zadatak 1.12. Neka je $\{e_1, e_2\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^2$, $f_1 = (1,1)$ i $f_2 = (1,2)$. Neka su $A, B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ linearni operatori takvi da je

$$\begin{aligned} Ae_1 &= (1,-1), \quad & Ae_2 &= (1,0) \\ Bf_1 &= (2,-1), \quad & Bf_2 &= (3,-1). \end{aligned}$$

Obrazložite zašto su ovim podacima linearni operatori A i B jedinstveno određeni. Odredite Af_1 i Af_2. Što možete zaključiti o operatorima A i B?

Rješenje: Linearni operatori A i B su jedinstveno određeni zadanim podacima jer su $\{e_1, e_2\}$ i $\{f_1, f_2\}$ baze vektorskog prostora $\mathbb{R}^2$. Nadalje, imamo

$$Af_1 = A(e_1 + e_2) = Ae_1 + Ae_2 = (2,-1),$$

$$Af_2 = A(e_1 + 2e_2) = Ae_1 + 2Ae_2 = (3,-1).$$

Vidimo da je $Af_1 = Bf_1$ i $Af_2 = Bf_2$, odnosno linearni operatori A i B se podudaraju na bazi $\{f_1, f_2\}$ za $\mathbb{R}^2$, pa su prema Teoremu 1.7 oni jednaki. ■

Zadatak 1.13. Postoje li skalari $a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R}$ takvi da za neki linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to M_2(\mathbb{R})$ vrijedi

$$A(1,2,-1) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},\ A(0,2,2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},\ A(1,3,0) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix},\ A(1,1,1) = \begin{bmatrix} e & f \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ako postoje, odredite sve takve skalare, te odredite (u ovisnosti o parametrima $a,\dots,f$) eksplicitnu formulu za pripadni linearni operator.

Rješenje: Vektori na kojima je zadano djelovanje od A očito čine linearno zavisan skup. Vidimo da je $(1,3,0) = (1,2,-1) + \frac{1}{2}(0,2,2)$ pa iz linearnosti od A slijedi da mora vrijediti

$$A(1,3,0) = A(1,2,-1) + \frac{1}{2}A(0,2,2),$$

odnosno

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix},$$

što nam daje $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$ i $d = 2$.

Nakon što provjerimo da je skup $\{(1,2,-1),(0,2,2),(1,1,1)\}$ baza vektorskog prostora $\mathbb{R}^3$, zaključujemo da je za $a = 2$, $b = 2$, $c = 1$ i $d = 2$, te proizvoljne (ali fiksirane) $e,f \in \mathbb{R}$, linearni operator A dobro definirano i potpuno određen zadanim podacima.

Odredimo sada i eksplicitnu formulu. Neka je $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ proizvoljan. Tada je njegov prikaz u bazi $\{(1,2,-1),(0,2,2),(1,1,1)$ dan s

$$(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{3}(x_2-x_3)(1,2,-1) + \frac{1}{6}(-3x_1+2x_2+x_3)(0,2,2) + \frac{1}{3}(3x_1-x_2+x_3)(1,1,1),$$

pa je

$$\begin{aligned} A(x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{3}(x_2-x_3)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{6}(-3x_1+2x_2+x_3)\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + \frac{1}{3}(3x_1-x_2+x_3)\begin{bmatrix} e & f \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3(e-1)x_1+2x_2+x_3 & 3fx_1+(2-f)x_2+(f-2)x_3 \\ 3x_1 & -6x_1+4x_2+2x_3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Zadatak 1.14. Neka je $A : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ linearni operator za kojeg vrijedi

$$A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Odredite sve matrice $X \in M_2(\mathbb{R})$ za koje iz zadanih podataka možemo odrediti $A(X)$.

Rješenje: Uočimo da za sve matrice oblika $\alpha\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ zbog linearnosti od A imamo

$$\begin{aligned} A\left(\alpha\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) &= \alpha A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) + \beta A\left(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) \\ &= \alpha\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \beta\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \alpha+3\beta & 2\alpha+\beta \\ 3\alpha+2\beta & 4\alpha+4\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Pokažimo sada da su to ujedno i jedini vektori X za koje je moguće odrediti $A(X)$.

Označimo $S_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ i $S_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Ako X nije linearna kombinacija vektora S_1 i S_2, tada je skup $\{S_1, S_2, X\}$ linearno nezavisan, pa ga možemo nadopuniti do baze $\{S_1, S_2, X, Y\}$ za $M_2(\mathbb{R})$. Prema Teoremu 1.8, linearni operator možemo zadati tako da odredimo njegovo djelobanje na bazi vektorskog prostora i zatim ga proširimo po linearnosti na cijeli prostor. Pritom djelovanje na bazi možemo odabrati bez ikakvih ograničenja. U našem slučaju to znači da je vrijednost $A(X)$ potpuno neovisna o vrijednostima $A(S_1)$ i $A(S_2)$, pa iz (2) ne možemo odrediti vrijednost $A(X)$. ■

Domaća zadaća:

DZ 1.1. Provjerite jesu li sljedeća preslikavanja linearni operatori:

(a) $A : M_2 \to M_2, A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+1 & d+a \end{bmatrix}$,

(b) $A : M_2 \to M_2, A \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+2d & d+a \end{bmatrix}$,

(c) Preslikavanje koje matrici A pridružuje zbroj njenih redaka (zapišite to preslikavanje pomoću množenja matrica).

(d) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ $A(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 2x_2 + x_3, 2x_1 - 3x_3)$.

(e) $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $A(x, y) = (x, y, xy)$,

DZ 1.2. Neka je $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ preslikavanje koje matrici A pridružuje matricu dobivenu iz matrice A tako što smo joj zamijenili prva dva retka, a zatim i prva dva stupca. Dokažite da je T linearan operator.

DZ 1.3. Koje od sljedećih tvrdnji su istinite? Neka je $A \in L(V, W), A \neq 0$.

- A preslikava linearno nezavisne skupove u linearno nezavisne skupove.
- A preslikava linearno zavisne skupove u linearno zavisne skupove.
- A preslikava bazu u bazu.
- A čuva dimenziju potprostora od V.

DZ 1.4. Neka je $\{b_1, b_2, b_3, b_4\}$ baza za V, te $A, B \in L(V)$. Ako znamo da je

$$Ab_1 = b_2, Ab_2 = b_1, Ab_3 = b_4, Ab_4 = b_3, B(b_1 \pm b_2) = b_2 \pm b_1, B(b_3 \pm b_4) = b_4 \pm b_3,$$

dokažite da je $A = B$.

1.3 Vektorski prostor $L(V,W)$. Dualni prostor

Uvedimo oznaku

$$L(V, W) = \{A : V \to W \,|\, A \text{ je linearan operator}\}.$$

Ako je $V = W$, onda umjesto $L(V,V)$ pišemo $L(V)$. Ukoliko je $W = \mathbb{F}$, tada koristimo oznaku $V^* = L(V, \mathbb{F})$ te V^* zovemo **dualni prostor od V**.

Uz operacije definirane po točkama, dakle kao

$$(A+B)(x) = Ax + Bx$$
$$(\alpha A)(x) = \alpha Ax, \quad \alpha \in \mathbb{F}$$

je $L(V,W)$ vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$.

Ako su V i W konačnodimenzionalni vektorski prostori, onda je i $L(V,W)$ konačnodimenzionalan i vrijedi

$$\dim L(V,W) = \dim V \cdot \dim W.$$

U tom slučaju znamo da taj prostor ima i bazu. Jedan standardni način formiranja baze za $L(V,W)$ je opisan sljedećim postupkom. Neka su $B_V = \{e_1,\dots,e_n\}$ te $B_W = \{f_1,\dots,f_m\}$ redom baze za V i W (implicitno smo označili $\dim V = n$ i $\dim W = m$). Definiramo $m\cdot n$ linearnih operatora E_{ij}, $i = 1,\dots,m$, $j = 1\dots,n$ zadavanjem na bazi B_V na sljedeći način:

$$E_{ij}(e_k) = \delta_{jk} f_i = \begin{cases} f_i, & j=k \\ 0, & \text{inače.} \end{cases}$$

Na predavanjima je dokazano da skup $\{E_{ij} : i = 1,\dots,m, j = 1,\dots,n\}$ čini bazu za $L(V,W)$.

Primjer 1.9. Neka su $B_{\mathbb{R}^3} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$ i $B_{\mathbb{R}^2} = \{(1,0),(1,1)\}$ redom baze za $\mathbb{R}^3$ i $\mathbb{R}^2$. Odredimo eksplicitne formule linearnih operatora $E_{12}, E_{23} \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ navedenih u prethodnoj konstrukciji.

Linearni operator E_{12} je zadan na bazi $B_{\mathbb{R}^3}$ s

$$E_{12}(1,1,0) = (0,0), \quad E_{12}(1,0,1) = (1,0), \quad E_{12}(0,1,1) = (0,0).$$

Kako za proizvoljan $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$ imamo prikaz

$$(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}(x_1+x_2-x_3)(1,1,0) + \frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3)(1,0,1) + \frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3)(0,1,1),$$

slijedi

$$E_{12}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}(x_1-x_2+x_3,0).$$

Linearni perator E_{23} je pak zadan na bazi $B_{\mathbb{R}^3}$ s

$$E_{23}(1,1,0) = (0,0), \quad E_{23}(1,0,1) = (0,0), \quad E_{23}(0,1,1) = (1,1),$$

pa nam prethodni zapis proizvoljnog vektora u toj bazi daje

$$E_{23}(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}(-x_1+x_2+x_3,-x_1+x_2+x_3).$$

Promotrimo sada i poseban slučaj, onaj u kojem je riječ o prostoru V^*. Neka je $\{b_1,\dots,b_n\}$ baza za V. Tada prethodna konstrukcija daje bazu za prostor V^* čije ćemo elemente označiti s $b_1^*,\dots,b_n^*$. Dakle, ovi linearni funkcionali su definirani s

$$b_j^*(b_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & \text{inače,} \end{cases} \qquad j = 1,\dots,n.$$

Bazu $\{b_1^*,\dots,b_n^*\}$ za V^* ćemo zvati **dualnom bazom** baze $\{b_1,\dots,b_n\}$.

Na predavanjima smo dokazali sljedeći rezultat.

Propozicija 1.10. *Ako je $\{b_1,\dots,b_n\}$ baza vektorskog prostora V, tada za svaki $x \in V$ vrijedi*

$$x = \sum_{j=1}^{n} b_j^*(x) b_j,$$

to jest, dualna baza računa koeficijente u prikazu vektora pomoću baze od koje je nastala.

Ovo se lako dokaže: ako je $\{b_1,\dots,b_n\}$ baza za V te $\{b_1^*,\dots,b_n^*\}$ pripadna dualna baza za V^*, tada za svaki $x=\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$ i $j=1,\dots,n$ imamo

$$b_j^*(x)=b_j^*\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i b_i\right)=\sum_{i=1}^n \lambda_i b_j^*(b_i)=\lambda_j.$$

Zadatak 1.15. Dana je baza $\{b_1,b_2,b_3\}$ za $\mathbb{R}^3$, pri čemu je $b_1=(1,0,0)$, $b_2=(1,1,-1)$, $b_3=(0,1,1)$. Odredite toj bazi dualnu bazu $\{b_1^*,b_2^*,b_3^*\}$. Odredite i $b_i^*(e_j)$, $i,j=1,2,3$, gdje su e_1, e_2, e_3 vektori kanonske baze za $\mathbb{R}^3$.

Rješenje: Odredimo prikaz proizvoljnog vektora $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$ u bazi $\{b_1,b_2,b_3\}$. Lako se dobije da je

$$(x_1,x_2,x_3)=\left(x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)b_1+\left(\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\right)b_2+\left(\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\right)b_3.$$

Iz prethodne propozicije sada slijedi

$$\begin{aligned}
b_1^*(x_1,x_2,x_3)&=x_1-\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3\\
b_2^*(x_1,x_2,x_3)&=\frac{1}{2}x_2-\frac{1}{2}x_3\\
b_3^*(x_1,x_2,x_3)&=\frac{1}{2}x_2+\frac{1}{2}x_3
\end{aligned}$$

Posebno je

$$\begin{aligned}
b_1^*(e_1)&=1 & b_2^*(e_1)&=0 & b_3^*(e_1)&=0\\
b_1^*(e_2)&=-\frac{1}{2} & b_2^*(e_2)&=\frac{1}{2} & b_3^*(e_2)&=\frac{1}{2}\\
b_1^*(e_3)&=\frac{1}{2} & b_2^*(e_3)&=-\frac{1}{2} & b_3^*(e_3)&=\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

■

Zadatak 1.16. Neka je $B=\{1,1-t,1-t^2\}$ baza za $\mathscr{P}_2$ te $f\in\mathscr{P}_2^*$ dan s $f(p)=p(0)$. Odredite prikaz od f u dualnoj bazi od B.

Rješenje: Označimo elemente baze B redom s p_1,p_2,p_3. Tražimo prikaz od f u obliku

$$f=\alpha p_1^*+\beta p_2^*+\gamma p_3^*.$$

Tada je

$$f(p_1)=\alpha p_1^*(p_1)+\beta p_2^*(p_1)+\gamma p_3^*(p_1)=\alpha,$$

a kako po definiciji od f slijedi $f(p_1)=p_1(0)=1$, zaključujemo da je $\alpha=1$. Na sličan način dobijemo da je

$$\beta=f(p_2)=p_2(0)=1 \quad \text{i} \quad \gamma=f(p_3)=p_3(0)=1.$$

Dakle, traženi prikaz je

$$f^*=p_1^*+p_2^*+p_3^*.$$

■

Zadatak 1.17. Neka su $F,G,H \in L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ zadani formulama

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= (2x+z,x+y) \\ G(x,y,z) &= (2y,x) \\ H(x,y,z) &= (x+y+z,x+y) \end{aligned}$$

Dokažite da je $\{F,G,H\}$ linearno nezavisan skup u vektorskom prostoru $L(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$.

Rješenje: Pretpostavimo da su $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ takvi da je $\alpha F+\beta G+\gamma H=0$. Znamo da su dva linearna operatora jednaka ako i samo ako se njihova djelovanja podudaraju na nekoj bazi domene, pa je $\alpha F+\beta G+\gamma H=0$ ako i samo ako je

$$\begin{aligned} (\alpha F+\beta G+\gamma H)(1,0,0) &= (0,0), \\ (\alpha F+\beta G+\gamma H)(0,1,0) &= (0,0), \\ (\alpha F+\beta G+\gamma H)(0,0,1) &= (0,0). \end{aligned}$$

Kako je

$$(\alpha F+\beta G+\gamma H)(x,y,z) = (\alpha(2x+z)+\beta(2y)+\gamma(x+y+z),\alpha(x+y)+\beta x+\gamma(x+y)),$$

gornje jednadžbe daju sustav linearnih jednadžbi

$$2\alpha+\gamma=0, \quad 2\beta+\gamma=0, \quad \alpha+\gamma=0, \quad \alpha+\beta+\gamma=0,$$

odakle dobivamo $\alpha=\beta=\gamma=0$. Time je tvrdnja dokazana. ∎

Primjer 1.11. Neka je p pravac $y=x$ te neka su Z i P linearni operatori zrcaljenja s obzirom na p te ortogonalne projekcije na p. S obzirom da smo već ranije pokazali da vrijedi $Z=2P-I$, slijedi da je $\{Z,P,I\}$ linearno zavisan skup u $L(\mathbb{R}^2)$.

Pokažimo to i na način opisan u prethodnom zadatku. Za $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{R}$ vrijedi $\alpha Z+\beta P+\gamma I=0$ ako i saamo ako je

$$\begin{aligned} \alpha Z(1,0)+\beta P(1,0)+\gamma I(1,0) &= (0,0) \\ \alpha Z(0,1)+\beta P(0,1)+\gamma I(0,1) &= (0,0), \end{aligned}$$

odnosno

$$\begin{aligned} \alpha(0,1)+\beta\cdot\frac{1}{2}(1,1)+\gamma(1,0) &= (0,0), \\ \alpha(1,0)+\beta\cdot\frac{1}{2}(1,1)+\gamma(0,1) &= (0,0), \end{aligned}$$

to jest

$$\frac{1}{2}\beta+\gamma=0, \quad \alpha+\frac{1}{2}\beta=0, \quad \alpha+\frac{1}{2}\beta=0, \quad \frac{1}{2}\beta+\gamma=0.$$

Rješenje ovog sustava je $(\alpha,\beta,\gamma)=(t,-2t,t), t\in\mathbb{R}$. Kako rješenje nije trivijalno, dani skup je linearno zavisan. Jedno rješenje je $(1,-2,1)$ i ono daje $Z-2P+I=0$, odnosno već spomenutu relaciju $Z=2P-I$.

Zadatak 1.18. Neka su $R_1,R_2,R_3 \in L(\mathbb{R}^2)$ rotacije oko ishodišta za različite kutove, označimo ih redom φ_1, φ_2, $\varphi_3 \in [0,2\pi)$. Dokažite da je skup $\{R_1,R_2,R_3\}$ linearno zavisan u $L(\mathbb{R}^2)$.

Rješenje: Prisjetimo se da je operator rotacije ravnine oko ishodišta za kut φ dan s

$$\begin{aligned} R_\varphi(x,y) &= (\cos\varphi\cdot x-\sin\varphi\cdot y,\sin\varphi\cdot x+\cos\varphi\cdot y) \\ &= \cos\varphi\cdot(x,y)+\sin\varphi\cdot(-y,x). \end{aligned}$$

Označimo s $Q \in L(\mathbb{R}^2)$ operator dan s $Q(x,y) = (-y,x)$. Slijedi da je

$$R_\varphi = \cos\varphi \cdot I + \sin\varphi \cdot Q,$$

Prema tome, tročlani skup $\{R_1, R_2, R_3\}$ je sadržan u dvodimenzionalnom prostoru razapetom skupom $\{I, Q\}$ (očito je skup $\{I, Q\}$ linearno nezavisan). Zato je $\{R_1, R_2, R_3\}$ linearno zavisan skup. ■

Uočimo da su I i Q iz prethodnog zadatka rotacije: I za kut 0, te Q za kut $\frac{\pi}{2}$.

Zadatak 1.19. Zadani su sljedeći operatori iz prostora $L(\mathbb{R}^2)$: Z je zrcaljenje s obzirom na os x, P ortogonalna projekcija na os y, a R_φ rotacija oko ishodišta za kut od $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

(a) Može li se svaki linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^2)$ prikazati kao linearna kombinacija operatora Z, P i R_φ?

(b) Ako je odgovor u (a) negativan, postoji li $\psi \in [0, 2\pi)$ takav da svaki $A \in L(\mathbb{R}^2)$ ima prikaz pomoću Z, P, R_φ i R_ψ?

Rješenje:

(a) Ovo pitanje je ekvivalentno pitanju je li tročlani skup $\{Z, P, R_\varphi\}$ sustav izvodnica vektorskog prostora $L(\mathbb{R}^2)$. S obzirom da je $\dim L(\mathbb{R}^2) = (\dim \mathbb{R}^2)^2 = 4$, odgovor je negativan.

Za zadaću navedite neki konkretni primjer linearnog operatora na $\mathbb{R}^2$ koji se ne može prikazati kao linearna kombinacija linearnih operatora Z, P i R. (*Uputa*: promotrite linearne operatore E_{ij}, $i, j = 1, 2$ koji su definirani kao na početku ovog dijela, pritom uzevši kanonske baze kao par baza na kojem se definiraju, te među njima pronađite pripadnu dopunu do baze.)

(b) Sada trebamo provjeriti postoji li ψ takav da je skup $\{Z, P, R_\varphi, R_\psi\}$ baza za $L(\mathbb{R}^2)$.

U prethodnom zadatku pokazali smo da se R_φ i R_ψ mogu zapisati kao linearne kombinacije linearnih operatora I i Q. To, zajedno s već spomenutim identitetom $Z = 2P - I$, daje

$$\{Z, P, R_\varphi, R_\psi\} \leq [\{Z, P, I, Q\}] = [\{P, I, Q\}].$$

Kako je $\{Z, P, R_\varphi, R_\psi\}$ četveročlani skup u prostoru $[\{Z, P, R_\varphi, R_\psi\}]$ dimenzije najviše 3, slijedi da je taj skup linearno zavisan i zato ne može biti baza za $L(\mathbb{R}^2)$.

■

Domaća zadaća:

DZ 1.5. Neka je $f : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f(A) = \operatorname{tr}(A)$. Neka je $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ baza od $M_2(\mathbb{R})$. Prikažite f u dualnoj bazi baze B.

DZ 1.6. Neka su V, W konačnodimenzionalni vektorski prostori nad istim poljem $\mathbb{F}$, $\dim V = n$ i $\dim W = m$, te neka je $\{v_1, \ldots, v_n\}$ neka baza za W. Neka je $A \in L(V, W)$. Pokažite da tada postoje linearni funkcionali $f_1, \ldots, f_m \in V^*$ takvi da vrijedi

$$Ax = \sum_{i=1}^{m} f_i(x) v_i.$$

Sjetimo se da smou Zadatku 1.8 dokazali da su preslikavanja ovog oblika linearni operatori. Sada smo dokazali da je **svaki** linearan operator između konačnodimenzionalnih prostora tog oblika.

DZ 1.7. Postoji li baza za $L(\mathbb{R}^2)$ sastavljena od linearnih operatora $L_A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadanih s $L_A(X) = AX$ za neku matricu $A \in M_2(\mathbb{R})$.

1.4 Slika i jezgra linearnih operatora

Neka je $A \in L(V,W)$. Uvodimo sljedeće pojmove i oznake:

(1) **Slika linearnog operatora** A je skup $\mathrm{Im}A = A(V) = \{Ax : x \in V\}$.

(2) **Jezgra linearnog operatora** A je skup $\mathrm{Ker}A = A^{-1}(\{0\}) = \{x \in V : Ax = 0\}$.

(3) Vrijedi $\mathrm{Im}A \leq W$ i $\mathrm{Ker}A \leq V$ pa ima smisla definirati sljedeće pojmove:

- $\mathrm{r}(A) = \dim \mathrm{Im}A$ - **rang linearnog operatora** A
- $\mathrm{d}(A) = \dim \mathrm{Ker}A$ - **defekt linearnog operatora** A

Za određivanje slike linearnog operatora A često ćemo koristiti sljedeći rezultat.

Propozicija 1.12. *Neka je $A \in L(V,W)$. Ako je G sustav izvodnica za V, tada je $A(G)$ sustav izvodnica za* $\mathrm{Im}A$.

Uočimo da, ako je $\{b_1,\ldots,b_n\}$ baza za V, tada iz prethodne propozicije slijedi da je skup $\{Ab_1,\ldots,Ab_n\}$ sustav izvodnica za $\mathrm{Im}A$ (ali on ne mora biti i baza za $\mathrm{Im}A$) .

Zadatak 1.20. Neka je $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ linearni operator zadan formulom

$$A(x_1,x_2,x_3) = (x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 - x_3, x_1 - 4x_2 + 2x_3, 3x_1 - x_2).$$

Odredite $\mathrm{Ker}A$, $\mathrm{Im}A$, $\mathrm{d}(A)$, $\mathrm{r}(A)$ te po jednu bazu za $\mathrm{Ker}A$ i $\mathrm{Im}A$.

Rješenje: Prvo odredimo jezgru od A. Uvjet $A(x_1,x_2,x_3) = 0$ je ekvivalentan sustavu

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

koji ima jedino trivijalno rješenje. Dakle, $\mathrm{Ker}A = \{(0,0,0)\}$ pa je $\mathrm{d}(A) = 0$.

Odredimo sada i sliku od A. Prema Propoziciji 1.12 imamo

$$\mathrm{Im}A = [\{Ae_1, Ae_2, Ae_3\}] = [\{(1,2,1,3),(-1,0,-4,-1),(1,-1,2,0)\}].$$

Lako se vidi da su dobiveni vektori linearno nezavisni pa je ovo jedna baza za $\mathrm{Im}A$, te je $\mathrm{r}(A) = 3$. ■

Zadatak 1.21. Postoji li linearni operator sa zadanim svojstvom:

(a) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\mathrm{Ker}A = \{(x_1,x_2,1,0) : x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}$?

(b) $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\mathrm{Ker}A = [\{(x_1,x_2,1,0) : x_1,x_2 \in \mathbb{R}\}]$?

(c) $A : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\mathrm{Im}A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : |x_1| \geq 1\}$?

(d) $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ takav da je $\mathrm{Im}A = \left[\{(1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2 + x_3 = 0\}\right]$?

(e) $A : \mathbb{R}^3 \to M_{2,3}(\mathbb{R})$ takav da je $r(A) = 4$?

Ako da, nađite primjer takvog linearnog operatora, a ako ne, obrazložite zašto.

Rješenje:

(a) Ne, jer $\mathrm{Ker}A$ mora biti potprostor domene, a zadani skup to nije.

(b) Računanjem linearne ljuske slijedi da treba biti $\mathrm{Ker}A = \{(x_1,x_2,x_3,0) : x_1,x_2,x_3 \in \mathbb{R}\}$, a ovo je potprostor čiju bazu čine e_1,e_2,e_3, prva tri elementa kanonske baze za $\mathbb{R}^4$. Definiramo A djelovanjem na kanonskoj bazi: mora biti $Ae_1 = Ae_2 = Ae_3 = 0$, a Ae_4 može biti bilo koji vektor različit od nulvektora, na primjer $Ae_4 = (1,2,3)$. Sada A proširimo po linearnosti. Dobili smo linearni operator s traženim svojstvom.

(c) Ne, jer $\mathrm{Im}A$ mora biti potprostor kodomene.

(d) Računanjem linearne ljuske slijedi da treba biti $\mathrm{Im}A = \{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_2+x_3 = 0\}$, što je potprostor razapet vektorima $a_1 = (1,0,0)$ i $a_2 = (0,1,-1)$. Skup $\{a_1,a_2\}$ nadopunimo vektorom $a_3 = (0,0,1)$ do baze za $\mathbb{R}^3$. Sada A definiramo na bazi kao $Aa_1 = a_1, Aa_2 = a_2$ i $Aa_3 = 0$ te proširimo po linearnosti. Dobili smo linearni operator s traženim svojstvom.

(e) Ne, jer iz Propozicije 1.12 slijedi da mora biti $r(A) \leq \dim V$.

■

Teorem 1.13 (Teorem o rangu i defektu). *Neka je $A \in L(V,W)$ pri čemu je $\dim V < \infty$. Tada je*

$$\mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = \dim V.$$

Zadatak 1.22. Neka je $Q \in L(\mathscr{P}_3, \mathscr{P}_2)$ operator interpolacije u točkama -1, 0, 1. Odredite baze za $\mathrm{Ker}\,Q$, $\mathrm{Im}\,Q$, te $\mathrm{d}(Q)$, $\mathrm{r}(Q)$.

Rješenje: Primijetimo kako za $p \in \mathscr{P}_2$ imamo $Qp = p$. Stoga je $\mathrm{Im}\,Q = \mathscr{P}_2$, te je $\mathrm{r}(Q) = 3$. Prema teoremu o rangu i defektu je tada $\mathrm{d}(Q) = \dim \mathscr{P}_3 - \mathrm{r}(Q) = 1$. S obzirom da je uvjet $p \in \mathrm{Ker}\,Q$ ekvivalentan s $p(-1) = p(0) = p(1)$, slijedi da je

$$\mathrm{Ker}\,Q = [\{x(x-1)(x+1)\}].$$

■

Zadatak 1.23. Neka je $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ i $T : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ linearni operator dan s

$$T(A) = AB - BA.$$

Pronađite $\mathrm{Ker}\,T$, $\mathrm{Im}\,T$, $\mathrm{d}(T)$, $\mathrm{r}(T)$, te po jednu bazu za $\mathrm{Ker}\,T$ i $\mathrm{Im}\,T$.

Rješenje: Jedan način da riješimo ovaj zadatak je raspisivanjem koordinatnog zapisa linearnog operatora T i standardnim računanjem jezgre i slike. Ovdje ćemo pokazati drugi način.

Primijetimo prvo kako su očito $I, B \in \mathrm{Ker}\,T$. Stoga je $\mathrm{d}(T) \geq 2$. S druge strane, lako vidimo da je

$$T(E_{11}) = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T(E_{12}) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je $\mathrm{r}(T) \geq 2$. Kako je prema teoremu o rangu i defektu $\mathrm{r}(T) + \mathrm{d}(T) = 4$, zaključujemo da je $\mathrm{r}(T) = \mathrm{d}(T) = 2$, te imamo

$$\mathrm{Ker}\,T = [\{I, B\}], \qquad \mathrm{Im}\,T = \left[\left\{\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}\right].$$

■

Zadatak 1.24. Pokažite da za svaki polinom $q \in \mathscr{P}_n$ postoji polinom $p \in \mathscr{P}_{n+1}$ takav da je

$$q(x) = p(x+1) - p(x).$$

Rješenje: Definiramo preslikavanje $A : \mathscr{P}_{n+1} \to \mathscr{P}_n$ kao $(Ap)(x) = p(x+1) - p(x)$. Lako provjerimo da je A linearni operator.

Tvrdnja zadatka je ekvivalentna surjektivnosti od A, to jest tome da je $r(A) = n+1$. Prema teoremu o rangu i defektu imat ćemo da je $r(A) = n+1$ ako i samo ako je $d(A) = \dim \mathscr{P}_{n+1} - r(A) = 1$.

Prema tome, dovoljno je dokazati da je jezgra od A jednodimenzionalna. Prvo uočimo da su svi konstantni polinomi u jezgri od A. Sada dokažimo da su to i jedini elementi jezgre.

Neka je $p \in \mathscr{P}_{n+1}$ takav da je $Tp = 0$, dakle $p(x+1) = p(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Tada je $p(n) = p(0)$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$, pa polinom $s(x) = p(x) - p(0)$ ima beskonačno mnogo nultočaka ($s(n) = 0$ za svaki $n \in \mathbb{Z}$). Tada je nužno $s = 0$, pa je p konstantni polinom. Time smo dokazali da je $\mathrm{Ker} A = \{p \in \mathscr{P}_{n+1} : p = \mathrm{const}\}$, pa je $d(A) = 1$. ■

Zadatak 1.25. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $M \leq V$. Postoji li linearan operator $A \in L(V)$ takav da je $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Im} A = M$?

Rješenje: Uočimo najprije sljedeće: ako je $\mathrm{Ker} A = \mathrm{Im} A = M$, onda je

$$\dim V = \mathrm{r}(A) + \mathrm{d}(A) = 2 \dim M.$$

Dakle, $\dim V$ mora biti paran broj i to $\dim V = 2 \dim M$.

Neka je sada $\{a_1, \ldots, a_k\}$ baza za M i $\{b_1, \ldots, b_k\}$ njena nadopuna do baze za V. Zadamo $A : V \to V$ na bazi kao

$$A(a_1) = \ldots = A(a_k) = 0, \quad A(b_1) = a_1, \ldots, A(b_k) = a_k$$

i proširimo po linearnosti. Sada je jasno da je $\mathrm{Im} A = M$, a kako je prema teoremu o rangu i defektu $\mathrm{d}(A) = k$ te je po konstrukciji $M \leq \mathrm{Ker} A$, slijedi $M = \mathrm{Ker} A$.

Prema tome, ako je V prostor neparne dimenzije, tada linearni operator sa zadanim svojstvima ne postoji, a ako je V parne dimenzije, tada takav A postoji. ■

Važnu klasu linearnih operatora na konačnodimenzionalnom vektorskom prostoru V čine projektori na potprostore. Prisjetimo se definicije.

Neka je $M \leq V$ i L njegov direktni komplement, dakle vrijedi $V = M \dot{+} L$. Definiramo preslikavanje $P : V \to V$ na sljedeći način: za svaki $x \in V$ postoje jedinstveni $x_M \in M$ i $x_L \in L$ takvi da je $x = x_M + x_L$. Tada stavimo

$$Px = x_M.$$

Ovaj linearni operator zovemo **projektor na potprostor M u smjeru potprostora L.** Na predavanjima je dokazano:

(a) P je linearan operator,

(b) $\mathrm{Im} P = M$ i $\mathrm{Ker} P = L$.

Uočimo da je $I - P$ projektor na L u smjeru M (jer je $(I-P)x = x_L$ za svaki $x \in V$).

Zadatak 1.26. Navedite primjer linearnog operatora $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ čiju jezgru čine sve simetrične matrice reda n, a sliku sve antisimetrične matrice reda n.

Rješenje: S obzirom da su prostor svih simetričnih matrica i prostor svih antisimetričnih matrica reda n jedan drugom direktni komplementi, primjer traženog linearnog operatora bit će projektor.

Preciznije, označimo s S potprostor svih simetričnih matrica reda n, te s L potprostor svih antisimetričnih matrica reda n. Kako je $S \dot{+} L = M_n(\mathbb{R})$, tada za T možemo uzeti projektor na S u smjeru L.

Odredimo i eksplicitnu formulu za T. Rastav proizvoljne matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ s obzirom na direktnu sumu $M_n(\mathbb{R}) = S \dotplus L$ je dan s

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Stoga je

$$T(A) = \frac{1}{2}(A - A^T).$$

■

Zadatak 1.27. Neka je $P \in L(V)$. Tada vrijedi: P je projektor (na neki potprostor M u smjeru nekog njegovog direktnog komplementa L) ako i samo ako je $P^2 = P$. U tom slučaju je $M = \operatorname{Im} P$ i $L = \operatorname{Ker} P$.

Rješenje: $\boxed{\Rightarrow}$ Za svaki $x = x_M + x_L \in V$ imamo

$$P^2x = P(Px) = P(x_M) = x_M = Px,$$

odakle slijedi $P^2 = P$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Pokažimo prvo da je $x \in \operatorname{Im} P \iff Px = x$. Očito $Px = x$ povlači $x \in \operatorname{Im} P$. S druge strane, iz $x \in \operatorname{Im} P$ slijedi da postoji $y \in V$ takav da je $Py = x$, pa imamo

$$x = Py = P^2y = P(Py) = Px.$$

Pokažimo sada da je $V = \operatorname{Ker} P \dotplus \operatorname{Im} P$. Ako je $x \in \operatorname{Ker} P \cap \operatorname{Im} P$ tada je $Px = 0$ i $Px = x$, pa je $x = 0$ i zato je presjek slike i jezgre od P trivijalan. Prema teoremu o rangu i defektu (i formuli za dimenziju sume potprostora) je $\dim(\operatorname{Ker} P \dotplus \operatorname{Im} P) = d(P) + r(P) = \dim V$, pa je $\operatorname{Ker} P \dotplus \operatorname{Im} P = V$.

Konačno, za proizvoljni $x \in V$ je tada

$$Px = P(x_{\operatorname{Ker} P} + x_{\operatorname{Im} P}) = Px_{\operatorname{Ker} P} + Px_{\operatorname{Im} P} = x_{\operatorname{Im} P},$$

pa vidimo da je P zaista projektor na $\operatorname{Im} P$ u smjeru $\operatorname{Ker} P$. ■

Zadatak 1.28. Neka su $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $a^2 + b^2 \neq 0$ (to jest, nisu oba jednaka nuli), te $A = \dfrac{1}{a^2+b^2}\begin{bmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{bmatrix}$.

(a) Dokažite da je linearni operator $L_A : M_{21} \to M_{21}$ zadan s $L_A(X) = AX$ projektor.

(b) Za $a = 3$ i $b = 4$ odredite potprostore M i L tako da je pridruženi L_A projektor na potprostor M u smjeru potprostora L.

Rješenje:

(a) Prema prethodnom zadatku, L_A je projektor ako i samo ako je $(L_A)^2 = L_A$. Kako je

$$(L_A)^2(X) = L_A(L_A(X)) = A(AX) = A^2X,$$

to je L_A projektor ako i samo ako je $A^2X = AX$ za svaki $X \in M_{n1}$. Lako se dobije da je to ekvivalentno s $A^2 = A$. Jednakost $A^2 = A$ se provjeri direktnim množenjem matrica.

(b) Prema prethodnom zadatku, L_A će biti projektor na potprostor $\operatorname{Im} L_A$ u smjeru potprostora $\operatorname{Ker} L_A$, dakle $M = \operatorname{Im} L_A$ i $L = \operatorname{Ker} L_A$. Dobijemo da je $M = \left[\left\{\begin{bmatrix} 3 & 4 \end{bmatrix}^T\right\}\right]$ i $L = \left[\left\{\begin{bmatrix} 4 & -3 \end{bmatrix}^T\right\}\right]$.

■

Definicija 1.14. Za linearni operator $A \in L(V, W)$ kažemo da je

(1) **monomorfizam** ako je A injekcija
(2) **epimorfizam** ako je A surjekcija
(3) **izomorfizam** ako je A bijekcija.

Za vektorske prostore V i W nad istim poljem $\mathbb{F}$ kažemo da su **izomorfni** ako postoji izomorfizam $A : V \to W$. U tom slučaju pišemo $V \simeq W$.

Kao jednostavnu posljedicu teorema o rangu i defektu imamo sljedeći rezultat.

Korolar 1.15. *Neka je $A \in L(V,W)$, te neka je* $\dim V = \dim W < \infty$. *Tada vrijedi:*

$$A \text{ je monomorfizam} \Leftrightarrow A \text{ je epimorfizam} \Leftrightarrow A \text{ je izomorfizam.}$$

Na predavanjima smo dokazali sljedeće tvrdnje (za V i W konačnodimenzionalne vektorske prostore nad istim poljem $\mathbb{F}$).

Propozicija 1.16. *Neka je $A \in L(V,W)$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(1) A je monomorfizam.
(2) $\operatorname{Ker} A = \{0\}$, *to jest,* $d(A) = 0$.
(3) A preslikava linearno nezavisne skupove u V u linearno nezavisne skupove u W.

Propozicija 1.17. *Neka je $A \in L(V,W)$. Vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) Ako je G sustav izvodnica za V, tada je $A(G)$ sustav izvodnica za $\operatorname{Im} A$.
(2) Ako postoji podskup G od V takav da je $A(G)$ sustav izvodnica za W, tada je A surjektivan.

Propozicija 1.18. *Neka je $A \in L(V,W)$. Sljedeće tvrdnje su ekvivalentne:*

(1) A je izomorfizam.
(2) Za svaku bazu $\{b_1,\dots,b_n\}$ za V, skup $\{Ab_1,\dots,Ab_n\}$ je baza za W.
(3) Postoji baza $\{b_1,\dots,b_n\}$ za V takva da je $\{Ab_1,\dots,Ab_n\}$ baza za W.

Posebno, $V \simeq W$ ako i samo ako je $\dim V = \dim W$.

Zadatak 1.29. Neka je $T \in L(\mathbb{R}^3)$ dan formulom

$$T(x,y,z) = (2x, 4x - y, 2x + 3y - z).$$

Dokažite da je T izomorfizam i odredite T^{-1}.

Rješenje: Prema Korolaru 1.15, dovoljno je provjeriti da je A monomorfizam, odnosno, zbog Propozicije 1.16, da je $\operatorname{Ker} T = \{(0,0,0)\}$. Neka je $(x,y,z) \in \operatorname{Ker} T$. Tada je $T(x,y,z) = (0,0,0)$, odnosno

$$\begin{cases} 2x & = 0 \\ 4x - \ y & = 0 \\ 2x + 3y - z & = 0 \end{cases},$$

odakle slijedi $(x,y,z) = (0,0,0)$. Time smo dokazali da je T monomorfizam, pa i izomorfizam.

Alternativno, mogli smo iskoristiti i Propoziciju 1.18. Za kanonsku bazu $\{e_1,e_2,e_3\}$ je skup

$$\{Te_1, Te_2, Te_3\} = \{(2,4,2), (0,-1,3), (0,0,-1)\}$$

očito linearno nezavisan, pa je posebno i baza za $\mathbb{R}^3$. Stoga je T izomorfizam.

Preostaje odrediti T^{-1}. Neka je $(u,v,w) \in \mathbb{R}^3$ proizvoljan, te označimo $T^{-1}(u,v,w) = (x,y,z)$. Tada je $T(x,y,z) = (u,v,w)$, pa dobivamo sustav

$$\begin{cases} 2x & = u \\ 4x - \quad y & = v \\ 2x + 3y - z = w \end{cases}$$

odakle slijedi

$$x = \frac{u}{2}, \quad y = 2u - v, \quad z = 7u - 3v - w.$$

Dakle, inverz linearnog operatora T je dan s

$$T^{-1}(u,v,w) = \left(\frac{u}{2}, 2u - v, 7u - 3v - w\right).$$

■

Zadatak 1.30. Ako postoji, navedite primjer

(a) monomorfizma $A : M_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$
(b) epimorfizma $B : M_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$
(c) izomorfizma $C : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$.

Rješenje:

(a) Ne postoji. Za takav A bi vrijedilo $r(A) \leq 3$ i $r(A) + d(A) = 4$, dakle $d(A) \geq 1$, pa A ne može biti monomorfizam.
(b) Da, na primjer takav je linearni operator

$$B\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = at^2 + bt + c.$$

(c) Postoji, jer su dimenzije domene i kodomene jednake (na predavanjima smo dokazali da su dva prostora izomorfna ako i samo ako su njihove dimenzije jednake). Na primjer, takav je linearni operator

$$C(at^3 + bt^2 + ct + d) = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Ovo je očito monomorfizam, pa zato i izomorfizam.

■

Zadatak 1.31. (a) Neka je V vektorski prostor dimenzije n, te $A, B \in L(V)$ takvi da je $AB = 0$. Dokažite da je $r(A) + r(B) \leq n$.

(b) Ako je $A \in L(V)$ proizvoljan linearan operator, dokažite da postoji $B \in L(V)$ takav da vrijedi $AB = 0$ i $r(A) + r(B) = n$.

Rješenje:

(a) Po teoremu o rangu i defektu imamo $r(A) + d(A) = n$. Uočimo da je sada dovoljno dokazati da je $r(B) \leq d(A)$, jer je tada $r(A) + r(B) \leq r(A) + d(A) = n$.

Iz $AB = 0$ slijedi da je $ABx = 0$ za svaki $x \in V$. Tada je $Bx \in \mathrm{Ker} A$ za svaki $x \in V$, dakle $\mathrm{Im} B = \{Bx : x \in V\} \subseteq \mathrm{Ker} A$. Odavde je $r(B) \leq d(A)$.

(b) Iz $AB = 0$ slijedi, kao maloprije, da mora biti $\mathrm{Im}B \le \mathrm{Ker}A$, a iz $r(A) + r(B) = n$ da mora biti $r(B) = n - r(A) = d(A)$. Zato je za ovakav B nužno i dovoljno da je $\mathrm{Im}B = \mathrm{Ker}A$.

Na primjer, za B možemo uzeti projektor na $\mathrm{Ker}A$ (u smjeru bilo kojeg direktnog komplementa od $\mathrm{Ker}A$ u V).

■

Zadatak 1.32. Neka je $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan kao $A(x,y) = (x+y, x+2y)$. Ako je M potprostor od $\mathbb{R}^2$, odredite $A(M)$.

Rješenje: Kako je $M \le \mathbb{R}^2$, imamo tri mogućnosti: $M = \{(0,0)\}$, $M = \mathbb{R}^2$ te M je skup svih točaka na nekom pravcu kroz ishodište.

Linearan operator potprostore preslikava u potprostore, dakle $A(M)$ će također biti jedan od ta tri tipa skupa: $\{(0,0)\}$, pravac kroz ishodište ili $\mathbb{R}^2$.

S obzirom da je A izomorfizam (na primjer, vidimo da A preslikava bazu $\{(1,0),(0,1)\}$ za $\mathbb{R}^2$ u bazu $\{(1,1,),(1,2)\}$ za $\mathbb{R}^2$), vrijedi da je $\dim A(M) = \dim M$. Prema tome, imamo:

(a) $A(\{(0,0)\}) = \{(0,0)\}$ i $A(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

(b) Ako je M pravac kroz ishodište tada će i $A(M)$ biti pravac kroz ishodište. Kako je svaki pravac određen s dvije točke, za određivanje potprostora $A(M)$ dovoljno je, na primjer, pogledati $A(0,0)$ i $A(1,1)$ i naći jednadžbu pravca kroz te dvije točke.

Ako je M pravac zadan jednadžbom $y = kx$, tada je $A(M)$ pravac kroz $(0,0)$ i $(1+k, 1-2k)$, dakle pravac zadan jednadžbom $y = \frac{1+2k}{1+k}x$ u slučaju $k \ne -1$, te pravac $x = 0$ ako je $k = -1$.

■

Domaća zadaća:

DZ 1.8. Odredite po jednu bazu za jezgru i sliku linearnog operatora $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ zadanog s $T(x,y,z) = (x,x,y,y)$.

DZ 1.9. Neka je $A : \mathscr{P}_3 \to \mathbb{R}^3$ preslikavanje dano sa

$$A(p) = (p(1), p(2), p(1) + p(2)).$$

Dokažite da je A linearan operator, te mu odredite rang, defekt i po jednu bazu za sliku i jezgru.

Rješenje: A je linearan jer je

$$\begin{aligned} A(\alpha p + \beta q) &= ((\alpha p + \beta q)(1), (\alpha p + \beta q)(2), (\alpha p + \beta q)(1) + (\alpha p + \beta q)(2)) \\ &= (\alpha p(1) + \beta q(1), \alpha p(2) + \beta q(2), \alpha p(1) + \beta q(1) + \alpha p(2) + \beta q(2)) \\ &= \alpha(p(1), p(2), p(1) + p(2)) + \beta(q(1), q(2), q(1) + q(2)) \\ &= \alpha A(p) + \beta A(q). \end{aligned}$$

Nadalje, $A(p) = (0,0,0) \Leftrightarrow (p(1) = 0 \text{ i } p(2) = 0)$. Za $p(t) = a_3t^3 + a_2t^2 + a_1t + a_0$ to daje sustav

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 + a_2 + a_3 &= 0 \\ a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 8a_3 &= 0 \end{aligned}$$

čije rješenje daje jezgru od A. Dobijemo da je skup $\{2 - 3t + t^2, 6 - 7t + t^3\}$ jedna baza $\mathrm{Ker}A$, te da je $d(A) = 2$. Sada je $r(A) = 4 - d(A) = 2$. Sliku generira skup $\{A(1), A(t), A(t^2), A(t^3)\}$. Kako je skup $\{A(1), A(t)\} = \{(1,1,2),(1,2,3)\}$ linearno nezavisan, to je, zbog $r(A) = 2$, baza za $\Im A$. ■

DZ 1.10. Odredite po jednu bazu za jezgru i sliku linearnog operatora $T: M_2 \to M_2$ zadanog kao

$$T\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+b & b+c \\ c+d & d+a \end{bmatrix}.$$

DZ 1.11. Neka je $T \in L(V,W)$, V,W vektorski prostori nad $\mathbb{F}$, $k \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$. Dokažite da je

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker}(kT), \quad \operatorname{Im} T = \operatorname{Im}(kT).$$

DZ 1.12. Ako postoji, navedite primjer

- linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^2)$ čija je jezgra pravac $y = x+1$,
- linearnog operatora $B : \mathscr{P}_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$,
- izomorfizma $C : \mathscr{P}_3(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{C})$,
- monomorfizma $D : M_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$,
- epimorfizma $E : M_2(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_2(\mathbb{R})$,
- linearnog operatora $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ koji skup $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+2y = 0\}$ preslikava u jediničnu kružnicu oko ishodišta,
- linearnog operatora $T : M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$ koji matricu E_{ij} preslikava u matricu E_{ji}, za sve $i,j = 1,\dots,n$.

DZ 1.13. Neka je $A \in L(\mathbb{R}^2)$ zadan kao $A(x,y) = (x,x)$. Ako je M potprostor od $\mathbb{R}^2$, odredite $A(M)$.

DZ 1.14. Navedite, ako postoji, primjer linearnog operatora $T : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \to \mathscr{P}_n(\mathbb{R})$ čiju jezgru čine svi parni polinome, a sliku svi neparni polinomi (polinom je paran ako je $p(-x) = p(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$, te neparan ako je $p(-x) = -p(x)$ za svaki $x \in \mathbb{R}$).

DZ 1.15. Ako je $A \in L(V)$ proizvoljno odabran, dokažite da postoji $B \in L(V)$ takav da vrijedi $BA = 0$ i $r(A) + r(B) = n$.

DZ 1.16. Neka su $A, B \in L(V)$. Dokažite:

(a) $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$,

(b) $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$,

Rješenje:

(a) Imamo $\operatorname{Im}(A+B) = \{Ax+Bx : x \in V\} \subseteq \{Ax+By : x,y \in V\} = \operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B$. Sada je

$$\begin{aligned} r(A+B) &= \dim \operatorname{Im}(A+B) \leq \dim(\operatorname{Im} A + \operatorname{Im} B) = \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Im} B - \dim(\operatorname{Im} A \cap \operatorname{Im} B) \\ &\leq \dim \operatorname{Im} A + \dim \operatorname{Im} B = r(A) + r(B). \end{aligned}$$

(b) Iz $\operatorname{Im}(AB) = \{(AB)x : x \in V\} = \{A(Bx) : x \in V\} \subseteq \{Ay : y \in V\} = \operatorname{Im} A$ slijedi $r(AB) \leq r(A)$. Dokažimo sada $r(AB) \leq r(B)$. Prema teoremu o rangu i defektu, to je ekvivalentno s

$$r(AB) \leq r(B) \Leftrightarrow \dim V - d(AB) \leq \dim V - d(B) \Leftrightarrow d(B) \leq d(AB) \Leftrightarrow \operatorname{Ker} B \leq \operatorname{Ker}(AB).$$

Ako je $x \in \operatorname{Ker} B$ tada je $Bx = 0$ pa i $(AB)(x) = A(Bx) = 0$, dakle $x \in \operatorname{Ker}(AB)$.

■

DZ 1.17. Neka je $A : U \to V$ linearni operator i neka je $L \leq U$. Dokažite da je

$$\dim L - d(A) \leq \dim A(L) \leq \dim L.$$

DZ 1.18. Neka su $A, B : V \to V$ linearni operatori. Dokažite

(a) A je surjekcija akko za svaki linearni operator $C : V \to V$ vrijedi $CA = 0 \Longrightarrow C = 0$.

(b) B je injekcija akko za svaki linearni operator $C : V \to V$ vrijedi $BC = 0 \Longrightarrow C = 0$.

1.5 Matrični prikaz (zapis) linearnog operatora

Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$, te $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ njegova uređena baza (uređena baza je baza kojoj smo fiksirali poredak elemenata). Svaki vektor $x \in V$ ima jedinstveni prikaz u obliku $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$, pa mu možemo pridružiti matricu (stupac)

$$x(e) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}.$$

Ovaj zapis se naziva **matrični prikaz vektora x u bazi** (e).

Zadatak 1.33. (a) Odredite matrični prikaz polinoma $p(x) = 2x^2 + x - 1$ iz $\mathscr{P}_3(\mathbb{R})$ s obzirom na bazu $(e) = \{x^3, x+1, x^2, 3\}$, te polinom q čiji je matrični prikaz u toj bazi jednak $q(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}^T$.

(b) Odredite matrični prikaz jedinične matrice I promatrane kao element vektorskog prostora M_2 s obzirom na bazu

$$(F) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

te odredite element $T \in M_2$ kojeg predstavlja matrični prikaz $T(F) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$.

Rješenje:

(a) Iz

$$2x^2 + x - 1 = \alpha \cdot x^3 + \beta \cdot (x+1) + \gamma \cdot x^2 + \delta \cdot 3$$

slijedi

$$\alpha = 0, \quad \beta = 1, \quad \gamma = 2, \quad \delta = -\frac{2}{3},$$

pa je

$$p(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}^T.$$

Nadalje, imamo

$$q(x) = 1 \cdot x^3 + 0 \cdot (x+1) + 2 \cdot x^2 + (-1) \cdot 3 = x^3 + 2x^2 - 3.$$

(b) Označimo elemente baze (F) redom F_1, F_2, F_3, F_4. Kao je

$$I = F_4 = 0 \cdot F_1 + 0 \cdot F_2 + 0 \cdot F_3 + 1 \cdot F_4$$

slijedi

$$I(F) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T.$$

Iz $T(F) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^T$ slijedi

$$T = F_1 - F_2 + F_3 - F_4 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

■

Zadatak 1.34. Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i $(e') = \{(1,1,2), (2,0,0), (0,1,1)\}$ još jedna baza za $\mathbb{R}^3$. Odredite

(a) $(e_1 + e_3)(e)$

(b) $(e_1 + e_3)(e')$.

Rješenje:

(a) Iz $e_1 + e_3 = 1 \cdot e_1 + 0 \cdot e_2 + 1 \cdot e_3$ slijedi $(e_1+e_3)(e) = \begin{bmatrix}1 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$.

(b) Iz $e_1 + e_3 = 1 \cdot e_1' - 1 \cdot e_3'$ slijedi $(e_1+e_3)(e') = \begin{bmatrix}1 & 0 & -1\end{bmatrix}^T$.

■

Neka su V,W vektorski prostori nad poljem $\mathbb{F}$, $(e) = \{e_1,\dots,e_n\}$ baza za V i $(f) = \{f_1,\dots,f_m\}$ baza za W. Neka je $A \in L(V,W)$. Tada postoje jedinstveni prikazi vektora $Ae_1,\dots,Ae_n$ u bazi (f). Neka su to

$$Ae_j = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} f_i, \quad j = 1,\dots,n.$$

Koristeći ove skalare, linearnom operatoru A pridružimo matricu

$$A(f,e) = \begin{bmatrix}(Ae_1)(f) & \dots & (Ae_n)(f)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \dots & \alpha_{mn}\end{bmatrix} \in M_{mn}(\mathbb{F}).$$

Ovaj zapis zovemo **matrični prikaz (zapis) linearnog operatora** A **u paru baza** (e)**,** (f). Ako je $V = W$ i $(e) = (f)$, tada ćemo umjesto $A(e,e)$ kraće pisati $A(e)$.

Zadatak 1.35. Odredite matrični prikaz linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$ u paru kanonskih baza domene i kodomene ako je

$$A(x,y) = (x+y, x-y, x).$$

Rješenje: Neka je $(e) = \{e_1,e_2\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^2$ i $(f) = \{f_1,f_2,f_3\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Trebamo odrediti prikaze vektora Ae_1 i Ae_2 u bazi (f). Imamo

$$A(e_1) = (1,1,1) = f_1 + f_2 + f_3, \quad A(e_2) = (1,-1,0) = f_1 - f_2$$

odakle slijedi

$$A(f,e) = \begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

■

Zadatak 1.36. Odredite matrični prikaz linearnog operatora $S \in L(\mathbb{R}^3, M_2(\mathbb{R}))$ zadanog sa

$$S(x,y,z) = \begin{bmatrix}x-y & y-z \\ z-x & x+y+z\end{bmatrix}$$

u paru kanonskih baza za domenu i kodomenu.

Rješenje: Neka je $(e) = \{e_1,e_2,e_3\}$ kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i $(E) = \{E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}\}$ kanonska baza za $M_2(\mathbb{R})$. Tada je

$$S(e_1) = \begin{bmatrix}1 & 0 \\ -1 & 1\end{bmatrix} = E_{11} - E_{21} + E_{22}$$

$$S(e_2) = \begin{bmatrix}-1 & 1 \\ 0 & 1\end{bmatrix} = -E_{11} + E_{12} + E_{22}$$

$$S(e_3) = \begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 1\end{bmatrix} = -E_{12} + E_{21} + E_{22}$$

pa je

$$S(E,e)=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}.$$

■

Zadatak 1.37. Neka je $I_V \in L(V)$ identični operator na vektorskom prostoru V, te $(e)=\{e_1,\dots,e_n\}$ i $(f)=\{f_1,\dots,f_n\}$ dvije baze za V. Dokažite da je $I_V(f,e)$ jednak jediničnoj matrici I ako i samo ako su baze (e) i (f) jednake.

Rješenje: Po definiciji matričnog prikaza linearnog operatora slijedi da je $I_V(f,e)=I$ ako i samo ako je $I_V(e_i)=f_i$ za sve $i=1,\dots,n$, odnosno ako i samo ako je $e_i=f_i$, $i=1,\dots,n$. Slijedi tvrdnja. ■

Sljedeći rezultati (dokazani na predavanjima) govore o usklađenosti djelovanja linearnih operatora na vektor te komponiranja linearnih operatora s množenjem pridruženih matrica.

Propozicija 1.19. *(a) Neka je $A \in L(V,W)$ te $(e)=\{e_1,\dots,e_n\}$ i $(f)=\{f_1,\dots,f_m\}$ redom baze za V i W. Za svaki $x\in V$ vrijedi*

$$Ax(f)=A(f,e)x(e).$$

(b) Neka su $A\in L(V,W)$ i $B\in L(W,X)$ te (e), (f) i (g) redom baze za V, W, X. Tada za $BA\in L(V,X)$ vrijedi

$$(BA)(g,e)=B(g,f)A(f,e).$$

(c) Ako je $A\in L(V,W)$ izomorfizam te (e) i (f) redom baze za prostore V i W tada je

$$(A^{-1})(e,f)=(A(f,e))^{-1}.$$

Iz prethodne propozicije dobijemo sljedeći korolar (birajući identični operator za pojedine linearne operatore) koji daje vezu između matričnih prikaza prikaza jednog te istog vektora u različitim bazama prostora kojemu pripada, odnosno jednog te istog linearnog operatora u različitim parovima baza za domenu i kodomenu.

Korolar 1.20. *(a) Neka su $(e),(e')$ dvije baze za vektorski prostor V. Tada je za sve $x\in V$*

$$x\left(e'\right)=I_V\left(e',e\right)x(e)$$

*Matricu $I_V(e,e')$ zovemo **matricom prijelaza** (iz baze (e) u bazu (e')).*

(b) Neka su V,W vektorski prostori te (e), (e') dvije baze za V, a $(f),(f')$ dvije baze za W. Tada je

$$A\left(f',e'\right)=I_W\left(f',f\right)A(f,e)I_V\left(e,e'\right)$$

Posebno, za $V=W$ i $(e)=(f)$ te $(e')=(f')$ imamo

$$A\left(e'\right)=I_V\left(e',e\right)A(e)I_V\left(e,e'\right)$$

Uočimo da su matrice prijelaza $I_V(e,e')$ i $I_V(e,e')$ između baza (e) i (e') prostora V povezane relacijom

$$I_V(e',e)=(I_V^{-1})(e',e)=(I_V(e,e'))^{-1}. \tag{3}$$

Zadatak 1.38. Odredite matrice prijelaza između baza $(e)=\{1,t,t^2\}$ i $(e')=\{1-t,1+t^2,t^2\}$ vektorskog prostora $\mathscr{P}_2$.

Rješenje: Zapise elemenata baze (e') pomoću baze (e) direktno iščitavamo i upisujemo u stupce matrice $I_{\mathscr{P}_2}(e,e')$. Slijedi

$$I_{\mathscr{P}_2}(e,e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Jedan način za formiranje matrice $I_{\mathscr{P}_2}(e',e)$ je prikazivanje vektora baze (e) pomoću baze (e'). Drugi je primjena formule (3):

$$I_{\mathscr{P}_2}(e',e) = \left(I_{\mathscr{P}_2}(e,e')\right)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Zadatak 1.39. Odredite matricu prijelaza $I_{\mathbb{R}^2}(e',e'')$, ako su baze za $\mathbb{R}^2$ dane s $(e') = \{(1,2),(2,3)\}$ i $(e'') = \{(1,1),(1,-1)\}$.

Rješenje: Ovaj zadatak bismo mogli riješiti direktno, to jest prikazivanjem vektora baze (e'') pomoću vektora baze (e'). Međutim, s obzirom na jednostavnost zapisa svakog vektora pomoću kanonske baze (e) za $\mathbb{R}^2$, zadatak ćemo riješiti indirektno na sljedeći način:

$$\begin{aligned} I_{\mathbb{R}^2}\left(e',e''\right) &= I_{\mathbb{R}^2}\left(e',e\right) I_{\mathbb{R}^2}\left(e,e''\right) = I_{\mathbb{R}^2}\left(e,e'\right)^{-1} I_{\mathbb{R}^2}\left(e,e''\right) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Zadatak 1.40. Linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3, M_2(\mathbb{R}))$ zadan je svojim matričnim prikazom

$$A(E',e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

u paru baza $(e') = \{(1,0,1),(1,0,-1),(0,1,1)\}$ i $(E') = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$. Odredite $A(x_1,x_2,x_3)$ za proizvoljan $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Rješenje: Neka su (e) i (E) redom kanonske baze za $\mathbb{R}^3$ i $M_2(\mathbb{R})$. Tada je

$$
\begin{aligned}
(Ax)(E) &= A(E,e)x(e) = I_{M_2(\mathbb{R})}(E,E')A(E',e')I_{\mathbb{R}^3}(e,e')^{-1}x(e) \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 \\ x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \\ 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

pa je

$$
\begin{aligned}
Ax &= \left(\frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)E_{11} + (x_1 + x_2)E_{12} + (x_1 + x_2)E_{21} + (2x_1 + x_2)E_{22} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{2}x_1 + \frac{5}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 & x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 & 2x_1 + x_2 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

■

Zadatak 1.41. Neka je $Z_k : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ zrcaljenje s obzirom na pravac dan jednadžbom $y = kx$. Odredite matrični prikaz linearnog operatora Z_k u kanonskoj bazi te matrični prikaz u još jednoj, po volji odabranoj bazi.

Rješenje: Iz jednog od prijašnjih zadataka znamo da je

$$Z_k(x,y) = \frac{2}{k^2+1}(x+ky, kx+k^2y) - (x,y).$$

Stoga je

$$Z_k(e) = \begin{bmatrix} \frac{2}{k^2+1} - 1 & \frac{2k}{k^2+1} \\ \frac{2k}{k^2+1} & \frac{2k^2}{k^2+1} - 1 \end{bmatrix}.$$

Linearni operator Z_k će imati "najjednostavniji" matrični prikaz u bazi koju čine neki vektor koji pripada pravcu $y = kx$ i vektor koji leži na pravcu koji je okomit na pravac $y = kx$, npr. $f_1 = (1,k)$, $f_2 = (1, \frac{-1}{k})$. Stavimo $(f) = \{f_1, f_2\}$. Imamo $Z_k(f_1) = f_1$ i $Z_k(f_2) = -f_2$ pa je

$$Z_k(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Uočimo da smo iz posljednjeg matričnog prikaza lako mogli doći do matričnog prikaza $Z_k(e)$. Naime, vrijedi $Z_k(e) = I(e,f)Z_k(f)I(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & \frac{-1}{k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ k & \frac{-1}{k} \end{bmatrix}^{-1}$. ■

Zadatak 1.42. Neka je $P : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ projektor prostora $\mathbb{R}^3$ na potprostor $M = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$ duž potprostora $L = \{(x,x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$.

(a) Odredite matrični prikaz $P(e)$ u kanonskoj bazi (e).

(b) Izaberite još neku bazu (f) za $\mathbb{R}^3$ i odredite $P(f)$.

Rješenje: Iako bismo (a) dio mogli rješavati direktno (napravite to sami), mi ćemo prvo riješiti (b) dio zadatka i onda pomoću njega (a) dio. Ideja je da odredimo bazu (f) u kojoj će matrični prikaz od P biti vrlo jednostavan.

(b) Dokazali smo da za projektor P na potprostor M duž potprostora L vrijedi $\mathrm{Im}\,P = M$, $\mathrm{Ker}\,P = L$ te $Px = x$ za $x \in M$. Kako je $M \dotplus L = \mathbb{R}^3$, uzmimo bazu za $\mathbb{R}^3$ koja je unija baze za M i baze za L. Kako je $M = [\{(1,0,1),(0,1,1)\}]$, $L = [\{(1,1,-1)\}]$, dobijemo bazu

$$(f) = \{(1,0,1),(0,1,1),(1,1,-1)\}.$$

Tada je $Pf_1 = f_1, Pf_2 = f_2, Pf_3 = 0$ pa je

$$P(f) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Odavde računamo $P(e)$:

$$P(e) = I(e,f)P(f)I(f,e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

■

Propozicija 1.21. *Neka su V,W vektorski prostori, $n = \dim V$, $m = \dim W$, te neka su (e) i (f) njihove baze.*

(a) Preslikavanje $\varphi : V \to M_{n1}$ definirano s $\varphi(x) = x(e)$ je izomorfizam vektorskih prostora.

(b) Preslikavanje $\Phi : L(V,W) \to M_{mn}$ definirano s $\Phi(A) = A(f,e)$ je izomorfizam vektorskih prostora.

Ova propozicija nam omogućuje da razne probleme u prostoru linearnih operatora riješimo odgovarajućom provjerom u prostoru matrica, odnosno da iskoristimo istovrsne tvrdnje koje smo već dobili za matrice.

Zadatak 1.43. Zadani su sljedeći linearni operatori na $\mathbb{R}^2$:

- R - rotacija oko ishodišta za kut $\frac{\pi}{2}$,
- P - ortogonalna projekcija na pravac $y = -x$,
- Z - zrcaljenje s obzirom na pravac $y = x$,
- Q - ortogonalna projekcija na pravac $x = 0$.

Dokažite da je skup $\{R,P,Z,Q\}$ baza za $L(\mathbb{R}^2)$.

Rješenje: Svi ovi operatori su nam od ranije poznati i zadani su sljedećim izrazima:

$$R(x,y) = (-y,x), \quad P(x,y) = \frac{1}{2}(x-y,-x+y), \quad Z(x,y) = (y,x), \quad Q(x,y) = (0,y).$$

Ovaj zadatak mogli bismo riješiti direktnom provjerom linearne nezavisnosti zadanog skupa (kao u zadatku 1.17). Ovdje ćemo na drugi način, primjenom propozicije 1.21.

Označimo s (e) kanonsku bazu za $\mathbb{R}^2$. Prema prethodnoj propoziciji je preslikavanje

$$\Phi : L(\mathbb{R}^2) \to M_2(\mathbb{R}), \quad \Phi(A) = A(e)$$

izomorfizam, pa je skup $\{R,P,Z,Q\}$ baza za $L(\mathbb{R}^2)$ ako i samo ako je skup

$$\{\Phi(R),\Phi(P),\Phi(Z),\Phi(Q)\} = \{R(e),P(e),Z(e),Q(e)\}$$

baza za $M_2(\mathbb{R})$. Dobijemo da je

$$R(e) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad P(e) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad Z(e) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad Q(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Lako provjerimo da ove četiri matrice čine linearno nezavisan skup, a kako je kardinalitet skupa jednak dimenziji prostora, on čini i bazu za $M_2(\mathbb{R})$. Prema opisanom, slijedi tvrdnja. ■

Navedimo još jedan rezultat s predavanja.

Propozicija 1.22. *Neka su V,W vektorski prostori te (e) i (f) redom baze za V i W. Za $A \in L(V,W)$ vrijede sljedeće tvrdnje:*

(1) $r(A) = r(A(f,e))$ (rang linearnog operatora jednak je rangu njehovog matričnog prikaza u proizvoljnom paru baza).

(2) Ako je $\dim V = \dim W$ tada je A izomorfizam ako i samo ako je matrica $A(f,e)$ regularna.

Zadatak 1.44. Neka je $A \in L(V,W)$ linearni operator ranga $r > 0$. Dokažite da se A može napisati kao suma r linearnih operatora ranga 1, to jest, da postoje linearni operatori $A_1,\dots,A_r \in L(V,W)$ ranga 1 takvi da je $A = A_1 + \ldots + A_r$.

Rješenje: Neka je $n = \dim V$ i $m = \dim W$. Zadatak istog tipa smo rješavali za matrice, pa ćemo se ovdje poslužiti tim rezultatom. Neka su (e) i (f) redom baze za V i W. Tada je $A(f,e)$ matrica ranga r. Prema dokazanom, postoje matrice $B_1,\dots,B_r$ ranga 1 takve da je

$$A(f,e) = B_1 + \ldots + B_r.$$

Kako je preslikavanje $A \mapsto A(f,e)$ izomorfizam s $L(V,W)$ na M_{mn}, postoje $A_1,\dots,A_r \in L(V,W)$ takvi da je

$$A_k(f,e) = B_k, \quad k = 1,\dots,r.$$

Prema prethodnoj propoziciji je

$$r(A_k) = r(A_k(f,e)) = r(B_k) = 1, \quad k = 1,\dots,r.$$

Konačno, imamo

$$A(f,e) = B_1 + \ldots + B_r = A_1(f,e) + \ldots + A_r(f,e) = (A_1 + \ldots + A_r)(f,e),$$

odakle slijedi $A = A_1 + \ldots + A_r$. ■

Zadatak 1.45. Neka je $A \in L(V,W)$ linearni operator ranga r. Dokažite da postoje baze $(b) = \{b_1, b_2, \dots, b_n\}$ i $(c) = \{c_1, c_2, \dots, c_m\}$ za V i W takve da je

$$A(c,b) = D_r$$

pri čemu je $D_r \in M_{mn}$ kanonska matrica reda r.

Rješenje: Ako je $r = 0$ tada je $A = 0$ i tvrdnja vrijedi za svaki izbor baza. Pretpostavimo da je $r > 0$. I ovaj zadatak rješavamo "prebacujući" se u matrični prostor i primjenom rezultata koje smo tamo dobili.

Uočimo da tražimo baze (b) i (c) takve da je

$$A(b_i) = \begin{cases} c_i, & i = 1, \dots, r \\ 0, & i = r+1, \dots, n. \end{cases} \tag{4}$$

Neka su (e) i (f) neke (bilo koje) baze za V i W. Prema propoziciji 1.22, $A(f,e)$ je matrica ranga r. Tada postoje regularne matrice $S \in M_m$ i $T \in M_n$ takve da je

$$SA(f,e)T = D_r. \tag{5}$$

Kako je preslikavanje $D \mapsto D(f)$ izomorfizam s $L(W)$ u M_m, to postoji $C \in L(W)$ takav da je $C(f) = S$. Na isti način zaključujemo da postoji $B \in L(V)$ takav da je $B(e) = T$. Kako su S i T reguarne matrice, slijedi da su B i C izomorfizmi. Sada je $SA(f,e)T = B(f)A(f,e)C(e) = (BAC)(f,e)$ pa jednakost (6) postaje

$$(CAB)(f,e) = D_r. \tag{6}$$

Po definiciji matričnog zapisa linearnog operatora to znači da je

$$(CAB)(e_i) = \begin{cases} f_i, & i = 1, \dots, r \\ 0, & i = r+1, \dots, n \end{cases}$$

što, imajući na umu (4), zapišemo kao

$$A(Be_i) = \begin{cases} C^{-1}f_i, & i = 1, \dots, r \\ 0, & i = r+1, \dots, n \end{cases}$$

Sad preostaje označiti $b_i = Be_i$ za $i = 1, \dots, n$ i $c_i = C^{-1}f_i$ za $i = 1, \dots, m$. Kako su B i C izomorfizmi, skup $(b) = \{b_1, \dots, b_n\}$ je baza za V i $(c) = \{c_1, \dots, c_m\}$ je baza za W, te vrijedi

$$A(b_i) = \begin{cases} c_i, & i = 1, \dots, r \\ 0, & i = r+1, \dots, n \end{cases}$$

■

Za kraj ovog odjeljka pokažimo kako možemo iskoristiti matricu prijelaza za određivanje dualne baze.

Neka je $x \in V$, te $(b) = \{b_1, \dots, b_n\}$ neka baza za V. Dokazali smo da je (propozicija 1.10)

$$x = \sum_{j=1}^{n} b_j^*(x) b_j.$$

Pretpostavimo da je $(e) = \{e_1, \dots, e_n\}$ neka druga baza za V te neka je $I(b,e)$ matrica prijelaza. U prvom stupcu ove matrice nalaze se koeficijenti iz prikaza vektora $I_V(e_1) = e_1$ pomoću vektora baze (b), dakle koeficijenti iz prikaza

$$e_1 = \sum_{j=1}^{n} b_j^*(e_1) b_j,$$

te slično za sljedeće stupce. Tako dobijemo da je

$$I(b,e) = \begin{bmatrix} b_1^*(e_1) & b_1^*(e_2) & \dots & b_1^*(e_n) \\ b_2^*(e_1) & b_2^*(e_2) & \dots & b_2^*(e_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n^*(e_1) & b_n^*(e_2) & \dots & b_n^*(e_n) \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Tada je

$$b_k^*\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j b_k^*(e_j),$$

što nam daje jednostavan način za određivanje djelovanja funkcionala b_k^* na vektorima domene koji su prikazani pomoću neke druge baze: za određivanje $b_k^*(\sum_{j=1}^n x_j e_j)$ trebaju nam koeficijenti iz k-tog retka matrice $I(b,e)$.

Ovo je posebno korisno kada je (e) baza u kojoj je lako i prirodno naći prikaze elemenata prostora (na primjer, ako je (e) kanonska baza $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{P}_n$, M_{mn}).

Pokažimo to na konkretnom primjeru.

Zadatak 1.46. Neka je V vektorski prostor simetričnih matrica reda 2 i neka je dana baza $(b) = \{b_1, b_2, b_3\}$ za V dana s

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad b_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \qquad b_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Odredite djelovanje elemenata dualne baze $(b)^* = \{b_1^*, b_2^*, b_3^*\}$ za V^* na proizvoljnoj matrici domene, to jest $b_k^*\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\right)$ za $k = 1,2,3$.

Rješenje: Neka je $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ baza za V zadana s

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ovu bazu možemo smatrati kanonskom bazom za V s obzirom da je rastav proizvoljne matrice iz V prirodan i jednostavan za izračunati:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{22}e_3.$$

Sada je

$$b_k^*\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = b_k^*(a_{11}e_1 + a_{12}e_2 + a_{22}e_3) = a_{11}b_k^*(e_1) + a_{12}b_k^*(e_2) + a_{22}b_k^*(e_3).$$

Prema (7), koeficijenti koji nam trebaju u prethodnoj sumi nalaze se u k-tom retku matrice $I(b,e)$. Dobijemo da je

$$I(b,e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

odakle slijedi

$$b_1^*\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11}, \quad b_2^*\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{12}, \qquad b_3^*\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = a_{11} + a_{12} + a_{22}.$$

■

Domaća zadaća:

DZ 1.19. Neka je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$ i $(e') = \{(1,1,2),(2,0,0),(0,1,1)\}$ još jedna baza za $\mathbb{R}^3$. Odredite $(e_1 - e_2)(e')$ i $(e'_1 - e'_3)(e')$.

Rješenje: $(e_1 - e_2)(e') = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}^T$, $(e'_1 - e'_3)(e') = \begin{bmatrix} 1 & 0-1 \end{bmatrix}^T$. ■

DZ 1.20. Nađite matricu linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^2)$, $A(x,y) = (x-y, x+y)$ u bazi $\{(1,2),(2,1)\}$.

Rješenje: $A(e') = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -7 & -5 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$. ■

DZ 1.21. Nađite matricu operatora $A \in L(\mathbb{R}^3, \mathscr{P}_1)$, $A(x,y,z) = x+y+z+xt$ u paru baze $\{(1,1,0),(1,0,1),(0,0,1)\}$ i $\{1+t, 1-2t\}$.

Rješenje: $A(f',e') = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. ■

DZ 1.22. Neka je $f \in V^*$. Neka je $(b) = \{b_1, \ldots, b_n\}$ neka baza za V, te $(1) = \{1\}$ baza za $\mathbb{F}$. Odredite matrični prikaz $f(1,b)$ linearnog funkcionala f u paru baza (b) i (1).

Rješenje: Prvo uočimo da je $f(1,b) \in M_{1,n}$, te da je i-ti stupac matrice $f(1,b)$ prikaz od $f(b_i)$ u bazi $\{1\}$ za $\mathbb{F}$. Kako je $f(b_i) = f(b_i) \cdot 1$ za sve $i = 1, \ldots, n$, slijedi

$$f(1,b) = \begin{bmatrix} f(b_1) & f(b_2) & \ldots & f(b_n) \end{bmatrix}.$$

■

DZ 1.23. Neka je $(f) = \{1-t, 1+t^2, t^2\}$ jedna baza vektorskog prostora $\mathscr{P}_2$. Odredite bazu (g) za $\mathscr{P}_2$ ako znamo da je matrica prijelaza

$$I_{\mathscr{P}_2}(f,g) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

DZ 1.24. U $\mathbb{R}^3$ s (e) označimo kanonsku bazu. Zadana je i baza $(e') = \{e'_1, e'_2, e'_3\}$, gdje su

$$e'_1 = e_1 + e_2 + e_3, \quad e'_2 = e_1 + e_2, \quad e'_3 = e_1.$$

Odredite matrični prikaz linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ u bazi (e') ako je $Ae_i = e'_i$ za $i = 1,2,3$.

Rješenje: Imamo

$$A(e) = I_{\mathbb{R}^3}(e,e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pa je

$$A(e') = I_{\mathbb{R}^3}(e,e')^{-1} A(e) I_{\mathbb{R}^3}(e,e') = A(e)^{-1} A(e) A(e) = A(e).$$

■

DZ 1.25. Zadan je matrični prikaz $A(f,e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ linearnog operatora $A : \mathbb{R}^3 \to \mathscr{P}_2$ u paru baza $\{(1,-1,0),(1,1,0),(1,0,1)\}$ i $\{1, t, t^2\}$. Odredite $A(x_1, x_2, x_3)$.

Rješenje: $A(x_1,x_2,x_3) = x_1 + \left(\frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3\right)t + (x_1 - x_3)t^2$. ■

DZ 1.26. Neka je $(e') = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,1,1)\}$ baza za $\mathbb{R}^3$ i $(f') = \{1, 1-t, 1+t^2\}$ baza za $\mathscr{P}_2$. Neka su linearni operatori $A \in L(\mathbb{R}^3)$ i $B \in L(\mathbb{R}^3, \mathscr{P}_2)$ zadani svojim matričnim prikazima

$$A(e') = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B(f',e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

pri čemu je (e) kanonska baza za $\mathbb{R}^3$. Odredite matrični prikaz od BA u paru kanonskih baza za domenu i kodomenu.

Rješenje: Neka je (f) kanonska baza za $\mathscr{P}_2$. Tada je

$$\begin{aligned} BA(f,e) &= B(f,e)A(e) = I_{\mathscr{P}_2}(f,f')B(f',e)I_{\mathbb{R}^3}(e,e')A(e')I_{\mathbb{R}^3}(e,e')^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5 & 4 & -3 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

DZ 1.27. Neka je $A : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ linearni operator dan svojom matricom $A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ u kanonskoj bazi. Neka je $(e') = \{e'_1, e'_2, e'_3, e'_4\}$ baza za $\mathbb{R}^4$ zadana s $e'_1 = e_1$, $e'_2 = e_1 + e_2$, $e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$, $e'_4 = e_1 + e_2 + e_3 + e_4$, a (e'') još jedna baza za $\mathbb{R}^4$ zadana s $e''_1 = e_1$, $e''_2 = e_2$, $e''_3 = e_4$, $e''_4 = e_3$.

(a) Za $x = (1,-1,2,1)$ odredite $(Ax)(e)$ i $(Ax)(e')$.

(b) Neka je $y(e') = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ 6 \\ -8 \end{bmatrix}$. Odredite $(Ay)(e)$.

(c) Odredite matricu prijelaza iz baze (e) u (e'') i $A(e'')$.

(d) Odredite rang od A.

Rješenje:

(a) $(Ax)(e) = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$, $(Ax)(e') = \begin{bmatrix} -3 \\ -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$.

(b) $(Ay)(e) = \begin{bmatrix} -24 \\ -32 \\ -51 \\ -42 \end{bmatrix}$.

(c) $A(e'') = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$.

(d) $r(A) = 4$.

■

DZ 1.28. Neka je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, te $L_A \in L(M_2)$ zadan kao $L_A(X) = AX$. Odredite matrični prikaz od L_A u nekom paru bazu.

DZ 1.29. Neka su $A, B \in M_2$ i $T \in L(M_2)$ zadan s $T(X) = AXB$. Odredite matrični prikaz od T u paru kanonskih baza.

DZ 1.30. Neka su $(e) = \{e_1, \ldots, e_n\}$ i $(e') = \{e'_1, \ldots, e'_n\}$ dvije baze prostora V. Neka je $S \in L(V)$ linearni operator zadan na bazi s

$$Se_i = e'_i, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Pokažite da je $S(e) = I_V(e, e')$.

DZ 1.31. Dana je baza $\{b_1, b_2, b_3\}$ za $\mathbb{R}^3$, pri čemu je $b_1 = (1,0,0)$, $b_2 = (1,1,-1)$, $b_3 = (0,1,1)$. Pomoću matrice prijelaza $I(b, e)$ odredite $b_k^*(x_1, x_2, x_3)$ za $k = 1, 2, 3$.

2 Spektar

2.1 Definicija i osnovni primjeri

Definicija 2.1. Neka je V vektorski prostor nad $\mathbb{F}$ i $A \in L(V)$. Za skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ kažemo da je **svojstvena vrijednost** linearnog operatora A ako postoji vektor $x \in V \setminus \{0\}$ takav da je

$$Ax = \lambda x.$$

Taj vektor x se naziva **svojstveni vektor** linearnog operatora A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Skup svih svojstvenih vrijednosti operatora A naziva se **spektar** od A i označava sa $\sigma(A)$.

Prije prvih primjera, osvrnimo se nakratko na samu definiciju:

- U definiciji svojstvene vrijednosti traži se egzistencija vektora $x \neq 0_V$ za koje je djelovanje operatora A dano jednostavnim skaliranjem. Uvjet $x \neq 0_V$ je važan jer je $A0_V = \lambda 0_V$ za svaki $\lambda \in \mathbb{F}$, pa bi bez tog uvjeta definicija bila besmislena.
- Primijetimo da jedan te isti $x \in V$ ne može biti svojstveni vektor pridružen različitim svojstvenim vrijednostima. Naime, kada bi za $\lambda \neq \mu$ imali $Ax = \lambda x$ i $Ax = \mu x$, slijedilo bi $(\lambda - \mu)x = 0$, odnosno $x = 0$, pa x ne bi bio svojstveni vektor. Dakle, različitim svojstvenim vrijednostima su pridruženi različiti svojstveni vektori (kasnije ćemo vidjeti da vrijedi i nešto više).

Zadatak 2.1. (1) Jesu li $\lambda = 3$ i $\mu = 0$ svojstvene vrijednosti linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadanog s

$$A(x,y,z) = (x+2y+2z, 3x-2y+z, y+z)?$$

Ako da, odredite (neki) pripadni svojstveni vektor.

(2) Jesu li $v = (-1,0,1)$ i $w = (1,1,2)$ svojstveni vektori linearnog operatora $A \in L(\mathbb{R}^3)$ zadanog s

$$A(x,y,z) = (5x+2y+3z, 3x+8y+3z, 2x+4z)?$$

Ako da, odredite pripadne svojstvene vrijednosti?

Rješenje: (1) Uzmimo prvo $\lambda = 3$. Trebamo provjeriti postoji li $(x,y,z) \neq (0,0,0)$ takav da je $A(x,y,z) = 3 \cdot (x,y,z)$. Ovo se svodi na rješavanje sustava linearnih jednadžbi i provjeru ima li on i netrivijalnih rješenja. Dobijemo da je $(3,2,1)$ jedno rješenje sustava, dakle, 3 je svojstvena vrijednost od A i $(3,2,1)$ pripadni svojstveni vektor.

Isti napravimo za $\mu = 0$. U ovom slučaju sustav ima samo trivijalno rješenje pa 0 nije svojstvena vrijednost od A.

(2) Treba provjeriti postoji li $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da je $A(-1,0,1) = \lambda(-1,0,1)$. Kako je $A(-1,0,1) = (-2,0,2) = 2 \cdot (-1,0,1)$, slijedi da je $(-1,0,1)$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 2.

Isti način provjere za drugi vektor daje da on nije svojstveni vektor od A. ■

Zadatak 2.2. Odredite svojstvene vrijednosti i pripadne svojstvene vektore za sljedeće linearne operatore.

(1) $T : M_n \to M_n$, $T(A) = A^T$ operator transponiranja.

(2) $P \in L(V)$ projektor.

Rješenje: (1) Neka je $A \in M_n$, $A \neq 0$. Pretpostavimo da je $T(A) = \lambda A$, to jest $A^T = \lambda A$. Tada

$$A = (A^T)^T = (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda^2 A,$$

odnosno $(\lambda^2 - 1)A = 0$. Kako je $A \neq 0$, slijedi $\lambda^2 - 1 = 0$, odnosno $\lambda_1 = 1$ i $\lambda_2 = -1$.

Sada, rješavanjem jednadžbe $T(A) = 1 \cdot A$ slijedi da je $A \neq 0$ svojstveni vektor od T pridružen svojstvenoj vrijednosti 1 ako i samo ako je A simetrična matrica. Isto tako, rješavanjem jednadžbe $T(A) = -1 \cdot A$ slijedi da je $A \neq 0$ svojstveni vektor od T pridružen svojstvenoj vrijednosti -1 ako i samo ako je A antisimetrična matrica.

(2) Neka je $P \in L(V)$ projektor.

Ako je $\operatorname{Im} P = \{0\}$, tada je $P = 0$, pa je $\sigma(P) = \{0\}$. Ako je $\operatorname{Im} P = V$, tada je $P = I_V$, pa je $\sigma(P) = \{1\}$.

Promotrimo preostale slučajeve, one u kojem je $\operatorname{Im} P$ netrivijalan potprostor od V. Označimo s $M = \operatorname{Im} P$ i $L = \operatorname{Ker} P$. Kada bi za neke $\lambda \in \mathbb{F}$ i $x = x_M + x_L \in V \setminus \{0\}$ vrijedilo $Px = \lambda x$, imali bismo

$$x_M = Px = \lambda x = \lambda(x_M + x_L),$$

odakle slijedi

$$(\lambda - 1)x_M + \lambda x_L = 0.$$

S obzirom na direktnost sume $M \dotplus L = V$, slijedi

$$(\lambda - 1)x_M = 0 \quad \text{i } \lambda x_L = 0.$$

Odavde jednostavnim promatranjem slučajeva slijedi da su jedine mogućnosti $\lambda = 0$ i $\lambda = 1$, te pritom mora biti $x = x_L \in L$ u prvom, odnosno $x = x_M \in M$ u drugom slučaju. Dakle, $\sigma(P) = \{0, 1\}$, te vidimo da su svi vektori iz L pridruženi svojstvenoj vrijednosti 0 te svi iz M pridruženi svojstvenoj vrijednosti 1. ■

U idućem dijelu ćemo proučiti neke tvrdnje koje će pojednostaviti određivanja spektra linearnog operatora i pridruženih svojstvenih vektora. U međuvremenu, promotrimo kroz idućih nekoliko zadataka kako se spektar ponaša s obzirom na neke prirodne operacije nad operatorima.

Zadatak 2.3. Neka je $A \in L(V), \alpha \in \mathbb{F} \setminus \{0\}$ proizvoljan skalar. Dokažite

$$\sigma(\alpha A) = \alpha\sigma(A),$$

gdje je

$$\alpha\sigma(A) = \{\alpha\lambda : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Rješenje: Imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(\alpha A) &\iff \exists x \in V \setminus \{0\} \text{ takav da je } (\alpha A)x = \lambda x \\
&\iff \exists x \in V \setminus \{0\} \text{ takav da je } Ax = \frac{\lambda}{\alpha}x \\
&\iff \frac{\lambda}{\alpha} \in \sigma(A) \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \sigma(A) \text{ takav da je } \frac{\lambda}{\alpha} = \lambda_0 \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \sigma(A) \text{ takav da je } \lambda = \alpha\lambda_0 \\
&\iff \lambda \in \alpha\sigma(A).
\end{aligned}$$

■

Zadatak 2.4. Neka je $A \in L(V), \alpha \in \mathbb{F}$ proizvoljan skalar. Dokažite

$$\sigma(A - \alpha I) = \sigma(A) - \alpha,$$

gdje je

$$\sigma(A) - \alpha = \{\lambda - \alpha : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Rješenje: Imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma(A-\alpha I) &\iff \exists x \in V\setminus\{0\} \text{ takav da je } (A-\alpha I)x = \lambda x \\
&\iff \exists x \in V\setminus\{0\} \text{ takav da je } Ax = (\lambda+\alpha)x \\
&\iff \lambda+\alpha \in \sigma(A) \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \sigma(A) \text{ takav da je } \lambda+\alpha = \lambda_0 \\
&\iff \exists \lambda_0 \in \sigma(A) \text{ takav da je } \lambda = \lambda_0 - \alpha \\
&\iff \lambda \in \sigma(A) - \alpha.
\end{aligned}$$

■

Zadatak 2.5. Neka je $A \in L(V)$ regularan operator. Dokažite

$$\sigma\left(A^{-1}\right) = \sigma(A)^{-1},$$

gdje je

$$\sigma(A)^{-1} = \left\{\lambda^{-1} : \lambda \in \sigma(A)\right\}.$$

Rješenje: Primijetimo prvo kako za operator $A \in L(V)$ imamo

$$0 \in \sigma(A) \iff \exists x \in V\setminus\{0\} \text{ takav da je } Ax = 0 \iff A \text{ nije regularan.}$$

Stoga regularni operatori ne sadrže 0 u svom spektru, pa je posebno i skup $\sigma(A)^{-1}$ dobro definiran. Pokažimo sada i traženu jednakost. Imamo sljedeći niz ekvivalencija

$$\begin{aligned}
\lambda \in \sigma\left(A^{-1}\right) &\iff \exists x \in V\setminus\{0\} \text{ takav da je } A^{-1}x = \lambda x \\
&\iff \exists x \in V\setminus\{0\} \text{ takav da je } x = A(\lambda x) \\
&\iff \exists x \in V\setminus\{0\} \text{ takav da je } \frac{1}{\lambda}x = Ax \\
&\iff \lambda^{-1} \in \sigma(A) \\
&\iff \lambda \in \sigma(A)^{-1}.
\end{aligned}$$

■

Zadatak 2.6. Neka je $A \in L(V)$ i $k \in \mathbb{N}$. Dokažite

$$\sigma(A)^k \subseteq \sigma\left(A^k\right),$$

gdje je

$$\sigma(A)^k = \{\lambda^k : \lambda \in \sigma(A)\}.$$

Dodatno, pokažite kontraprimjerom da obratna inkluzija ne mora vrijediti.

Rješenje: Neka je $\lambda \in \sigma(A)$. Tada postoji $x \in V\setminus\{0\}$ takav da je $Ax = \lambda x$. Djelovanjem na ovu relaciju s A slijedi

$$A^2x = \lambda(Ax) = \lambda^2 x,$$

pa vidimo da je $\lambda^2 \in \sigma(A^2)$, uz isti pridruženi svojstveni vektor. Sada se lako indukcijom dovrši dokaz tražene inkluzije.

Kao kontraprimjer za obratnu inkluziju imamo slučaj operatora $R_{\frac{\pi}{2}} \in L(\mathbb{R}^2)$, rotacije za kut $\frac{\pi}{2}$. Tada je $\sigma(R_{\frac{\pi}{2}}^2) = \sigma(R_\pi) = \{-1\}$, a s druge strane je $\sigma(R_{\frac{\pi}{2}})^2 = \emptyset$.

Napomenimo ovdje kako je ovaj slučaj specifičan za realne vektorske prostore (kao što je $\mathbb{R}^2$); u kompleksnim vektorskim prostorima će vrijediti jednakost skupova u iskazu zadatka. ■

Primijetimo i jedno zajedničko svojstvo svim prethodnim primjerima: ako je x svojstveni vektor pridružen λ, tada je taj isti x svojstveni vektor pridružen (redom po zadacima) svojstvenim vrijednostima $\alpha\lambda$, $\lambda-\alpha$, λ^{-1}, odnosno λ^k.

DZ 2.1. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, te $A, B \in L(V)$.

(a) Ako je x svojstveni vektor i od A i od B, je li x svojstveni vektor od AB ili od $A+B$?

(b) Ako je λ svojstvena vrijednost i od A i od B, je li λ svojstvena vrijednost od AB ili od $A+B$?

DZ 2.2. Odredite sve linearne operatore $A \in L(\mathbb{R}^2)$ kojima je $(1,0)$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti 5.

DZ 2.3. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, $A \in L(V)$, te v_1 i v_2 svojstveni vektori pridruženi svojstvenim vrijednostima 1 i -0.2. Ako je $v = 3v_1 + 4v_2$, procijenite ponašanje $A^n v$ za velike vrijednosti n.

2.2 Karakteristični polinom

U ovom dijelu se vraćamo na pitanje određivanja spektra danog linearnog operatora. Navedimo neke ključne pojmove i rezultate.

Definicija 2.2. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Polinom

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I)$$

naziva se **karakteristični** ili **svojstveni** polinom matrice A.

Primjer 2.3. (1) Ako je $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in M_2$, tada je

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\lambda + \det A.$$

(2) Općenitije, za $A \in M_n(\mathbb{F})$ je k_A zaista polinom, i to n–tog stupnja. Ako ga zapišemo u obliku

$$k_A(\lambda) = a_n\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0$$

gdje su $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{F}$, tada neke od ovih skalara možemo i preciznije odrediti; vrijedi

$$a_n = (-1)^n, \qquad a_{n-1} = (-1)^{n-1}\mathrm{tr}A, \qquad a_0 = \det A.$$

Za definiciju karakterističnog polinoma linearnog operatora ključna je sljedeća propozicija.

Propozicija 2.4. *Neka su $A, B \in M_n(\mathbb{F})$ slične matrice (tj. postoji $S \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{F})$ takva da je $B = SAS^{-1}$). Tada je $k_A = k_B$. Drugim riječima, slične matrice imaju iste karakteristične polinome.*

Kako su matrični prikazi $A(e)$ i $A(e')$ istog linearnog operatora A u različitim bazama (e) i (e') slične matrice (ovdje je $S = I_V(e, e')$), sljedeća je definicija dobra (odnosno, ne ovisi o odabiru baze).

Definicija 2.5. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $A \in L(V)$. **Karakteristični** polinom linearnog operatora A, k_A, definira se kao polinom

$$k_A(\lambda) = k_{A(e)}(\lambda),$$

gdje je (e) proizvoljna baza za V.

Zadatak 2.7. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $P \in L(V)$ projektor različit od $0, I$. Odredite karakteristični polinom od P.

Rješenje: Kako je $V = \operatorname{Im} P \dotplus \operatorname{Ker} P$, možemo uzeti bazu za V oblika

$$(e) = \{e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_n\},$$

gdje je $\{e_1, \ldots, e_r\}$ baza za $\operatorname{Im} P$ i $\{e_{r+1}, \ldots, e_n\}$ baza za $\operatorname{Ker} P$. Tada je

$$P(e) = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

odakle odmah slijedi da je

$$k_P(\lambda) = \det(P(e) - \lambda I) = \det\left(\begin{bmatrix} (1-\lambda)I_r & 0 \\ 0 & -\lambda I_{n-r} \end{bmatrix}\right) = (1-\lambda)^r(-\lambda)^{n-r}.$$

■

Idući teorem daje najavljivani alternativni način za određivanje spektra linearnog operatora.

Teorem 2.6. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$, $A \in L(V)$ te $\lambda_0 \in \mathbb{F}$. Tada je*

$$\lambda_0 \in \sigma(A) \iff k_A(\lambda_0) = 0.$$

Posebno, ako je $\dim V = n$, onda A ima najviše n (različitih) svojstvenih vrijednosti.

Primijetimo ovdje i ključnu razliku između slučaja $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ i $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Iz osnovnog teorema algebre znamo da svaki nekonstantni polinom (s realnim ili kompleksnim koeficijentima) mora imati barem jednu nultočku u $\mathbb{C}$. Stoga, ukoliko je V vektorski prostor nad $\mathbb{C}$, svaki $A \in L(V)$ ima neprazan spektar. S druge strane, za realne vektorske prostore postoje linearni operatori s praznim spektrom (na primjer, već navedena rotacija za kut $\varphi \neq 0, \pi$).

Zadatak 2.8. Neka je V vektorski prostor neparne dimenzije i $A \in L(V)$. Dokažite da je $\sigma(A) \neq \emptyset$.

Rješenje: Ako je V kompleksni vektorski prostor, tvrdnja je očita.

Pretpostavimo da je V realni vektorski prostor. Neka je (e) proizvoljna baza za V. Kako je $A(e)$ realna matrica, slijedi da je $k_A = k_{A(e)}$ polinom s realnim koeficijentima, i to neparnog stupnja. Stoga on ima barem jednu realnu nultočku, pa je prema teoremu 2.6 spektar od A neprazan. ■

Zadatak 2.9. Neka je linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ dan svojim matričnim zapisom u nekoj bazi (e):

$$A(e) = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Odredite spektar od A.

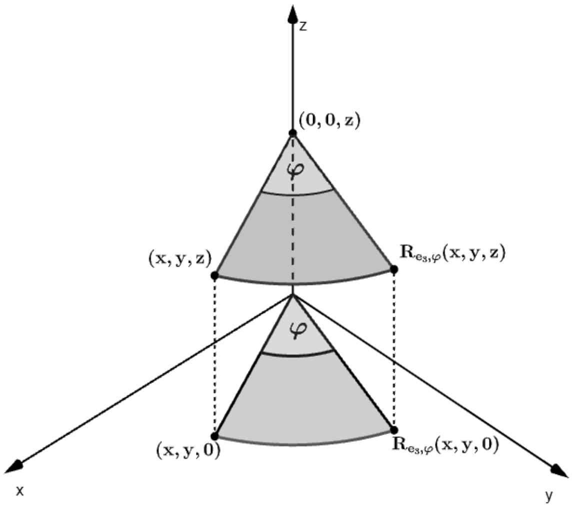
Rješenje: Odredimo prvo karakteristični polinom od A. Imamo

$$k_A(\lambda) = \det(A(e) - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = -(\lambda-1)^2(\lambda-2).$$

Stoga je $\sigma(A) = \{1,2\}$. ■

Zadatak 2.10. Neka je $R_{e_3,\varphi} \in L(\mathbb{R}^3)$ operator rotacije prostora oko z–osi za kut $\varphi \in [0,2\pi)$. Odredite spektar od $R_{e_3,\varphi}$.

Rješenje:



Slika 3: Rotacija oko z–osi za kut φ

Operator $R_{e_3,\varphi}$ na kanonskoj bazi $(e) = \{e_1, e_2, e_3\}$ djeluje na sljedeći način:

$$R_{e_3,\varphi}e_1 = (\cos\varphi)e_1 + (\sin\varphi)e_2, \quad R_{e_3,\varphi}e_2 = (-\sin\varphi)e_1 + (\cos\varphi)e_2, \quad R_{e_3,\varphi}e_3 = e_3.$$

Stoga je

$$R_{e_3,\varphi}(e) = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

pa je karakteristični polinom od $R_{e_3,\varphi}$

$$k_{R_{e_3,\varphi}}(\lambda) = (1-\lambda)\left((\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin^2\varphi\right).$$

Sada lako vidimo da je

$$\sigma(R_{e_3,\varphi}) = \begin{cases} \{1\}, & \varphi \neq \pi \\ \{-1,1\}, & \varphi = \pi \end{cases}$$

■

DZ 2.4. Neka je $A \in M_n$. Dokažite da za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$ vrijedi

$$k_{A^2}(\lambda^2) = k_A(\lambda)k_A(-\lambda).$$

2.3 Svojstveni potprostori i dijagonalizacija linearnog operatora

Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor, $A \in L(V)$ i $\lambda \in \sigma(A)$. Označimo s $V_A(\lambda)$ skup svih svojstvenih vektora pridruženih svojstvenoj vrijednosti λ zajedno s nulvektorom. Kako je

$$V_A(\lambda) = \{x \in V : Ax = \lambda x\} = \operatorname{Ker}(A - \lambda I),$$

slijedi da je $V_A(\lambda) \leq V$. Ovaj potprostor nazivamo **svojstveni potprostor** linearnog operatora A pridružen svojstvenoj vrijednosti λ. Njegovu dimenziju ćemo zvati **geometrijska kratnost** svojstvene vrijednosti λ, te označavati s $g(\lambda)$.

Primijetimo kako je za proizvoljan $\lambda \in \mathbb{F}$ skup $V_A(\lambda)$ definiran kao $V_A(\lambda) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$ također potprostor od V; spektar od A čine upravo oni skalari za koje je taj potprostor različit od $\{0_V\}$ (odnosno $g(\lambda) \geq 1$).

Opišimo postupak određivanja svojstvenih potprostora za $A \in L(V)$. Neka je (e) neka baza za V. Tada je

$$x \in V_A(\lambda) \iff (A - \lambda I)x = 0 \iff ((A - \lambda I)x)(e) = 0 \iff (A(e) - \lambda I)x(e) = 0.$$

Dakle, ukoliko odredimo Ω, prostor svih rješenja homogenog sustava $(A(e) - \lambda I)X = 0$, tada je

$$V_A(\lambda) = \varphi^{-1}(\Omega),$$

gdje je $\varphi : V \to M_{n,1}$ izomorfizam vektorskih prostora dan s $\varphi(x) = x(e)$.

Primjer 2.7. (a) Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i $P \in L(V)$ projektor različit od $0, I$. Tada je $\sigma(P) = \{0, 1\}$. Po definiciji je $V_P(0) = \operatorname{Ker} P$ i onda $g(0) = d(P)$. S druge strane, kako je $I - P$ projektor na $\operatorname{Ker} P$ u smjeru $\operatorname{Im} P$, slijedi da je $V_P(1) = \operatorname{Ker}(P - I) = \operatorname{Im} P$ i onda $g(1) = r(P)$.

(b) Neka je $\varphi \in [0, 2\pi)$ te $R_{e_3,\varphi} \in L(\mathbb{R}^3)$ operator rotacije oko z–osi za kut φ. Razlikujemo slučajeve:

- Ako je $\varphi = 0$, tada je $R_{e_3,0} = I$, pa je $V_{R_{e_3,0}}(1) = \mathbb{R}^3$.
- Ako je $\varphi = \pi$, tada za kanonsku bazu (e) imamo

$$R_{e_3,\pi}(e) = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

odakle je očito

$$V_{R_{e_3,\pi}}(-1) = [\{e_1, e_2\}] \quad \text{i} \quad V_{R_{e_3,\pi}}(1) = [\{e_3\}].$$

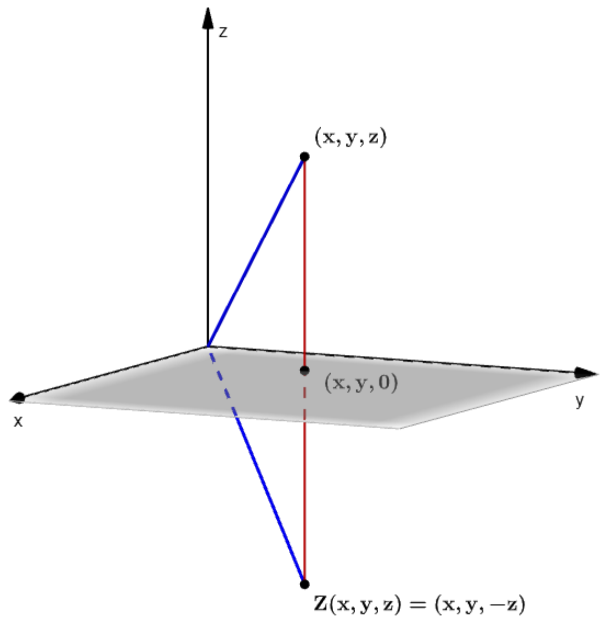
- Ako je $\varphi \neq 0, \pi$, tada je $\sigma(R_{e_3,\varphi}) = \{1\}$ i jedini svojstveni potprostor je $V_{R_{e_3,\varphi}}(1) = [\{e_3\}]$.

(c) Neka je Z operator zrcaljenja s obzirom na xy–ravninu. Tada je

$$Z(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

odakle očito imamo $\sigma(Z) = \{-1, 1\}$ te

$$V_Z(-1) = [\{e_3\}] \quad \text{i} \quad V_Z(1) = [\{e_1, e_2\}].$$



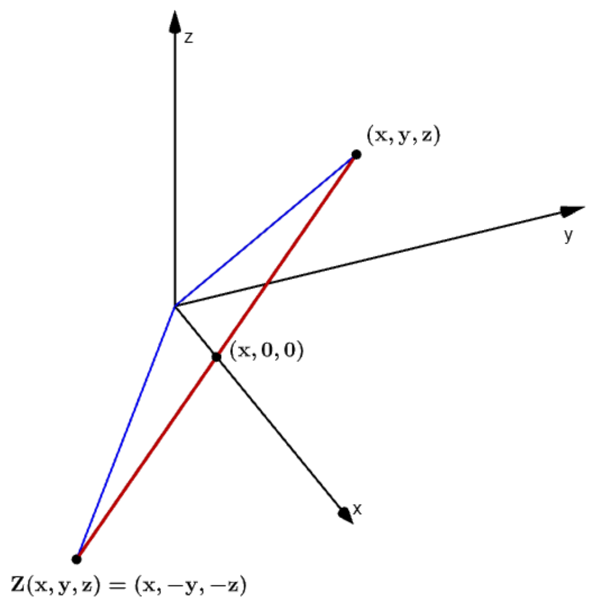
Slika 4: Zrcaljenje s obzirom na xy–ravninu

(d) Neka je sada Z operator zrcaljenja s obzirom na x–os. Tada je

$$Z(e) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

odakle očito imamo $\sigma(Z) = \{-1, 1\}$ te

$$V_Z(-1) = [\{e_2, e_3\}] \quad \text{i} \quad V_Z(1) = [\{e_1\}].$$



Slika 5: Zrcaljenje s obzirom na x–os

Zadatak 2.11. Odredite svojstvene potprostore linearnog operatora A iz zadatka 2.9.

Rješenje: Već smo odredili spektar danog operatora: $\sigma(A) = \{1,2\}$. Odredimo prvo $V_A(1)$. Za to je potrebno riješiti homogeni sustav čija je matrica

$$A(e) - I = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

gdje (e) ponovno označava kanonsku bazu za $\mathbb{R}^3$. Rješenje ovog sustava je potprostor $\left[\left\{\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\end{bmatrix}^T\right\}\right]$, pa slijedi da je

$$V_A(1) = [\{(1,1,1)\}].$$

Za određivanje $V_A(2)$ je potrebno riješiti homogeni sustav čija je matrica

$$A(e) - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ovdje lako dobivamo da je rješenje potprostor $\left[\left\{\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T\right\}\right]$, pa slijedi da je

$$V_A(2) = [\{(0,0,1)\}].$$

■

Vratimo se sada na odnos svojstvenih vektora pridruženih različitim svojstvenim vrijednostima. Prvi rezultat dan je idućom propozicijom.

Propozicija 2.8. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor te $A \in L(V)$. Ako su $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ međusobno različite svojstvene vrijednosti od A te $x_1,\dots,x_k$ redom pridruženi svojstveni vektori, tada je $\{x_1,\dots,x_k\}$ linearno nezavisan skup.*

Zadatak 2.12. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i $A \in L(V)$. Neka su v_1 i v_2 svojstveni vektori od A pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima λ_1 i λ_2. Dokažite da niti jedan vektor oblika $\alpha v_1 + \beta v_2$, gdje su $\alpha,\beta \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$, ne može biti svojstveni vektor od A.

Rješenje: Pretpostavimo suprotno, to jest da postoje $\alpha,\beta \in \mathbb{F}\setminus\{0\}$ takvi da je vektor $\alpha v_1 + \beta v_2$ svojstveni vektor za A, te neka je on pridružen svojstvenoj vrijednosti μ. Dakle, vrijedi

$$A(\alpha v_1 + \beta v_2) = \mu(\alpha v_1 + \beta v_2),$$

odnosno

$$\alpha\lambda_1 v_1 + \beta\lambda_2 v_2 = \mu\alpha v_1 + \mu\beta v_2.$$

Prema prethodnoj propoziciji, skup $\{v_1, v_2\}$ je linearno nezavisan, pa slijedi da je

$$\alpha\lambda_1 = \mu\alpha \quad \text{i} \quad \beta\lambda_2 = \mu\beta,$$

odakle, zbog $\alpha,\beta \neq 0$ slijedi $\lambda_1 = \mu = \lambda_2$, što je kontradikcija s pretpostavkom. Slijedi tvrdnja. ■

Zadatak 2.13. Neka su zadani vektori $v_1 = (1,1,1,0)$, $v_2 = (0,1,1,1)$ i $v_3 = (1,2,2,1)$ u $\mathbb{R}^4$. Postoji li linearni operator $A \in L(\mathbb{R}^4)$ sa sljedećim svojstvom:

(a) v_1 i v_2 su svojstveni vektori od A pridruženi redom svojstvenim vrijednostima 1 i 2?

(b) v_1, v_2 i v_3 su svojstveni vektori od A pridruženi redom svojstvenim vrijednostima 1, 2 i 3?

(c) v_1, v_2 i v_3 su svojstveni vektori od A?

Rješenje:

(a) Da. Važno je uočiti da je skup $\{v_1, v_2\}$ linearno nezavisan. Tada ga proširimo do baze za $\mathbb{R}^4$, na primjer, vektorima $u_1 = (1,0,0,0)$ i $u_2 = (0,1,0,0)$. Definiramo A djelovanjem na bazi $\{v_1, v_2, u_1, u_2\}$ kao:

$$Av_1 = v_1, \quad Av_2 = 2v_2, \quad Au_1 = Au_2 = 0,$$

te proširimo po linearnosti.

(b) Ne, jer svojstveni vektori pridruženi različitim svojstvenim vrijednostima moraju činiti linearno nezavisan skup, a skup $\{v_1, v_2, v_3\}$ je linearno zavisan (očito je $v_3 = v_1 + v_2$).

(c) Zbog prethodnog zadatka je nužno da vektori v_1 i v_2 budu pridruženi istoj svojstvenoj vrijednosti. Neka je ta svojstvena vrijednost jednaka λ. Tada je $A = \lambda I$ primjer traženog linearnog operatora.

■

Spomenimo i kako vrijedi više od same linearne nezavisnosti svojstvenih vektora pridruženih različitim svojstvenim vrijednostima.

Propozicija 2.9. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor, $A \in L(V)$ te $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$. Tada je unija proizvoljno odabranih baza za potprostore $V_A(\lambda_1), \ldots, V_A(\lambda_k)$ linearno nezavisan skup.*

Osim geometrijske kratnosti svojstvene vrijednosti λ linearnog operatora $A \in L(V)$, bitnu ulogu igra i **algebarska kratnost** svojstvene vrijednosti, koju definiramo kao kratnost nultočke λ karakterističnog polinom k_A, te označavamo s $a(\lambda)$.

Ako označimo $n = \dim V$ te $\sigma(A) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_k\}$, tada je

$$\sum_{i=1}^{k} a(\lambda_i) \leq n.$$

Dodatno, ako je V kompleksan vektorski prostor, vrijedi jednakost.

Odnos algebarske i geometrijske kratnosti dan je idućim rezultatom.

Propozicija 2.10. *Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada za sve $\lambda \in \sigma(A)$ vrijedi $g(\lambda) \leq a(\lambda)$.*

Zadatak 2.14. Odredite svojstvene vrijednosti, njihove algebarske i geometrijske kratnosti te pripadne svojstvene potprostore linearnog operatora $A \in L(\mathbb{F}^n)$ zadanog s

$$A(x_1, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i, \ldots, \sum_{i=1}^{n} x_i \right).$$

Rješenje: Očito je $\operatorname{Im} A = [\{(1, \ldots, 1)\}]$, dakle $r(A) = 1$, odakle, prema teoremu o rangu i defektu, slijedi $d(A) = n - 1$. To znači da je 0 svojstvena vrijednost od A i $g(0) = \dim \operatorname{Ker}(A) = n - 1$. Lako dobijemo da je

$$V_A(0) = \operatorname{Ker} A = [\{e_1 - e_j : j = 2, \ldots, n\}].$$

Nadalje, lako je uočiti da vrijedi

$$A(1, \ldots, 1) = n(1, \ldots, 1),$$

dakle, $(1, \ldots, 1)$ je svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti n. Tada je $a(n) \geq g(n) \geq 1$. Kako je

$$n \leq g(0) + g(n) \leq a(0) + a(n) \leq n$$

slijedi $a(n) = g(n) = 1$ i zato je $V_A(n) = [\{(1,\ldots,1)\}]$. ■

Primijetimo sljedeće: ukoliko u prethodnom zadatku uzmemo bazu $(f) = \{f_1,\ldots,f_n\}$, gdje su

$$f_n = (1,\ldots,1), \qquad f_j = e_1 - e_j, \quad j = 1,\ldots,n-1,$$

tada je matrični prikaz operatora A u bazi (f) dijagonalna matrica

$$A(f) = \mathrm{diag}(0,0,\ldots,0,n).$$

Jedno od najvažnijih pitanja ovog dijela je upravo pronalaženje baze u kojoj operator ima dijagonalni oblik, odnosno karakterizacija onih linearnih operatora za koje je to moguće. Pritom ćemo za linearni operator $A \in L(V)$ za koji postoji baza (f) za V takva da je $A(f)$ dijagonalna matrica reći da je **dijagonalizibilan**. Pritom je $A(f)$ dijagonalna matrica sa svojstvenim vrijednostima na dijagonali, te se svaka svojstvena vrijednost pojavljuje onoliko puta kolika je njena algebarska kratnost. Nadalje, baza (f) se sastoji od odgovarajućih svojstvenih vektora. Preciznije, ako je $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$, tada uzimanjem unije proizvoljno odabranih baza za svojstvene potprostore $V_A(\lambda_1),\ldots,V_A(\lambda_k)$ dobivamo (jednu) takvu bazu (f).

Navodimo sada rezultate koji daju karakterizaciju dijagonalizibilnih linearnih operatora.

Teorem 2.11. *Neka je V vektorski prostor dimenzije n, $A \in L(V)$ te $\sigma(A) = \{\lambda_1,\ldots,\lambda_k\}$. Tada je A dijagonalizibilan ako i samo ako vrijedi*

$$\sum_{i=1}^{k} g(\lambda_i) = n.$$

U tom slučaju je baza u kojoj A ima dijagonalni matrični prikaz jednaka uniji baza za $V_A(\lambda_i), i = 1,\ldots,k$.

Teorem 2.12. *Neka je V kompleksan konačnodimenzionalni vektorski prostor i $A \in L(V)$. Tada je A dijagonalizibilan ako i samo ako za svaki $\lambda \in \sigma(A)$ vrijedi $g(\lambda) = a(\lambda)$.*

Istaknimo bitnu razliku između prethodna dva teorema: ako je V *kompleksan* vektorski prostor, tada je

$$\sum_{\lambda\in\sigma(A)} g(\lambda) = n \iff g(\lambda) = a(\lambda) \text{ za sve } \lambda \in \sigma(A).$$

Međutim, ako je V realan vektorski prostor, tada uvjet $g(\lambda) = a(\lambda)$ može biti zadovoljen za sve $\lambda \in \sigma(A)$, a da operator pritom nije dijagonalizibilan. Primjerice, operator rotacije oko z–osi za kut $\varphi \neq 0,\pi$ ima spektar $\sigma(R_{e_3,\varphi}) = \{1\}$, te je $a(1) = g(1) = 1$. Međutim, taj operator nije dijagonalizibilan s obzirom da je

$$\sum_{\lambda\in\sigma(R_{e_3,\varphi})} g(\lambda) = 1 < 3.$$

Dakle, u realnom slučaju, uvjet

$$g(\lambda) = a(\lambda) \text{ za sve } \lambda \in \sigma(A)$$

je nužan, ali nije dovoljan za dijagonalizibilnost.

Navedimo i jedan korolar.

Korolar 2.13. *Neka je V n-dimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$. Ako A ima n različitih svojstvenih vrijednosti, tada je A dijagonalizabilan.*

Zadatak 2.15. Linearni operator $A \in L(V)$ zadan je svojim matričnim zapisom u nekoj bazi (e) za V s

$$A(e) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ispitajte je li A dijagonalizibilan.

Rješenje: Karakteristični polinom od A je

$$k_A(\lambda) = (2-\lambda)(\lambda-1)^2,$$

pa je $\sigma(A) = \{1,2\}$. Algebarske kratnosti svojstvenih vrijednosti su

$$a(1) = 2, \quad a(2) = 1.$$

Nadalje, imamo

$$g(1) = d(A-I) = d\left(\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}\right) = 1,$$

pa kako je već $g(1) \neq a(1)$, zaključujemo da A nije dijagonalizibilan. ■

Zadatak 2.16. Neka je V konačnodimenzionalni vektorski prostor nad poljem $\mathbb{F}$ te $A \in L(V)$ takav da je $k_A(\lambda) = (\lambda^2-1)(\lambda^2+1)(\lambda-3)^2$.

(a) Odredite $\dim V$ i pokažite da je A izomorfizam.

(b) Odredite $r(A+5I)$ i $r(A-I)$.

(c) Ako je $\operatorname{Ker}(A-3I)$ dvodimenzionalan potprostor od V, možemo li zaključiti da se A može dijagonalizirati?

Rješenje:

(a) Kako je $\deg k_A = 6$, slijedi da je $\dim V = 6$. Nadalje, kako je $k_A(0) \neq 0$, slijedi da 0 nije u spektru od A, pa je A izomorfizam.

(b) Kako 5 nije u spektru od A, slijedi da je $A+5I$ izomorfizam, pa je $r(A+5I) = 6$. Nadalje, kako je $1 \in \sigma(A)$ i $a(1) = 1$, slijedi da je $g(1) = 1$, pa je $r(A-I) = 6 - d(A-I) = 6 - g(1) = 5$.

(c) Vrijedi $g(3) = \dim \operatorname{Ker}(A-3I) = 2$. Razlikujemo dva slučaja:

- Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, tada odmah vidimo da je $\sigma(A) = \{\pm 1, \pm i, 3\}$, te je uz pretpostavku zadatka $a(3) = g(3)$. S druge strane, kako sve preostale svojstvene vrijednosti imaju algebarsku kratnost 1, slijedi da su i njihove geometrijske kratnosti također 1, pa je u ovom slučaju operator dijagonalizibilan.
- Ako je $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, tada iz k_A imamo da je $\sigma(A) = \{\pm 1, 3\}$. Međutim, tada je

$$\sum_{\lambda \in \sigma(A)} a(\lambda) = 4 < 6,$$

pa takav operator nije dijagonalizibilan.

■

Zadatak 2.17. Neka je dan operator $A \in L(\mathbb{R}^3)$ čiji je matrični prikaz u kanonskoj bazi dan s

$$A(e) = \begin{bmatrix} k+3 & 0 & 0 \\ -k-3 & k & k+3 \\ -k-3 & k & k+3 \end{bmatrix}.$$

Odredite sve vrijednosti $k \in \mathbb{R}$ za koje operator nije dijagonalizabilan.

Rješenje: Dobijemo

$$k_A(\lambda) = ... = \lambda(k+3-\lambda)(\lambda-(2k+3))$$

iz čega slijedi da su svojstvene vrijednosti

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = k+3, \quad \lambda_3 = 2k+3.$$

Ako imamo tri različite svojstvene vrijednosti, A će biti dijagonalizabilan. Zato razmatramo jedino slučajeve kada nemamo tri različite svojstvene vrijednosti:

- Neka je $k = 0$. Tada je $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$, pa A neće biti dijagonalizabilan ako i samo ako je $g(3) < a(3) = 2$, odnosno $g(3) = 1$. (Za svojstvene vrijednosti čija je algebarska kratnost jednaka 1 je automatski zadovoljeno da se algebarska i geometrijska kratnost podudaraju).

  Za $k = 0$ je $A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -3 & -3 & 3 \\ -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, odakle slijedi $g(3) = d(A(e)-3I) = 1$. Slijedi da A nije dijagonalizabilan za $k = 0$.

- Neka je $k = -3$. Tada je $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ i $\lambda_3 = -3$, pa A neće biti dijagonalizabilan ako i samo ako je $g(0) < a(0) = 2$, odnosno $g(0) = 1$.

  Za $k = -3$ je $A(e) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$, pa je $g(0) = d(A(e)) = 2$, što znači da je u ovom slučaju operator A dijagonalizabilan.

- Neka je $k = -\frac{3}{2}$. Tada je $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$ i $\lambda_2 = \frac{3}{2}$, pa A neće biti dijagonalizabilan ako i samo ako je $g(0) < a(0) = 2$, odnosno $g(0) = 1$.

  Za $k = -\frac{3}{2}$ je $A(e) = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$, pa je $g(0) = d(A(e)) = 1$. Dakle, A nije dijagonalizabilan za $k = -\frac{3}{2}$.

Prema tome, A nije dijagonalizabilan ako i samo ako je $k = 0$ ili $k = -\frac{3}{2}$. ■

Zadatak 2.18. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ dijagonalizabilan linearni operator. Ako je $\sigma(A) = \{1, -1\}$ tada je $A^{-1} = A$. Dokažite.

Rješenje: Prvo uočimo da je A izomorfizam jer $0 \notin \sigma(A)$.

Kako je A dijagonalizabilan linearni operator, postoji baza (e) za V takva da je $A(e)$ dijagonalna matrica. Kako se na dijagonali od $A(e)$ nalaze samo 1 i -1, slijedi da je $(A(e))^{-1} = A(e)$. Sada je

$$A^{-1}(e) = (A(e))^{-1} = A(e),$$

odakle slijedi $A^{-1} = A$. ■

DZ 2.5. Neka je V konačnodimenzionalan vektorski prostor i $A \in L(V)$ dijagonalizabilan linearni operator.

(a) Ako je $\sigma(A) = \{0, 1\}$, dokažite da je tada $A^2 = A$.

(b) Ako je $\sigma(A) = \{0, 1, -1\}$, dokažite da je tada A^2 projektor.

(c) Ako je $\sigma(A) = \{1, -1\}$, odredite A^k za $k \in \mathbb{N}$.

2.4 Dijagonalizacija matrice

Definicija 2.14. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Skalar $\lambda \in \mathbb{F}$ je **svojstvena vrijednost matrice** A ako postoji $X \in M_{n1}(\mathbb{F}), X \neq 0$ takav da vrijedi

$$AX = \lambda X.$$

Ovakav vektor X se naziva **svojstveni vektor matrice** A (pridružen svojstvenoj vrijednosti λ).

Spektar matrice A, u oznaci $\sigma(A)$, je skup svih svojstvenih vrijednosti matrice A.

Ako je $A \in M_n(\mathbb{F})$ i $L_A \in L(M_{n,1}(\mathbb{F}))$ linearni operator definiran s $L_A X = AX$, tada za kanonsku bazu (e) za $M_{n,1}(\mathbb{F})$ vrijedi $L_A(e) = A$. Odavde se dokaže da se problemi određivanja svojstvenih vrijednosti i svojstvenih vektora za matricu A podudaraju s istovrsnim problemima za linearni operator L_A. Posebno, kako je $k_{L_A} = k_A$, slijedi da je $\lambda \in \mathbb{F}$ svojstvena vrijednost matrice A ako i samo ako je $k_A(\lambda) = 0$.

Zadatak 2.19. Neka je $A \in M_n(\mathbb{C})$ proizvoljna matrica. Dokažite da je $\det A$ jednaka produktu, a $\mathrm{tr} A$ sumi svojstvenih vrijednosti od A (uključujući njihove kratnosti).

Rješenje: Kako je $A \in M_n(\mathbb{C})$, njen karakteristični polinom se može faktorizirati kao

$$k_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{n} (\lambda_k - \lambda),$$

pri čemu su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ svojstvene vrijednosti (među kojima može biti i istih). Tada je

$$\det A = k_A(0) = \prod_{k=1}^{n} \lambda_k.$$

Znamo da je $(-1)^{n-1} \mathrm{tr} A$ koeficijent uz λ^{n-1} u karakterističnom polinomu pa je

$$(-1)^{n-1} \mathrm{tr} A = (-1)^{n-1} \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \right),$$

to jest, $\mathrm{tr} A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k$. ■

Zadatak 2.20. Neka je $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ takva da je $\det A < 0$ (A je reda $2n$). Dokažite da A ima barem dvije realne svojstvene vrijednosti.

Rješenje: Promatramo A kao element prostora $M_{2n}(\mathbb{C})$ te zapišemo njen karakteristični polinom u obliku

$$k_A(\lambda) = \prod_{k=1}^{2n} (\lambda_k - \lambda), \quad \lambda_k \in \mathbb{C}.$$

Kako je A realna matrica, k_A ima realne koeficijente, pa sve kompleksne (nerealne) svojstvene vrijednosti dolaze u konjugiranim parovima, tj. za $\lambda_0 \in \sigma(A)$ je i $\overline{\lambda_0} \in \sigma(A)$. Bez smanjenja općenitosti možemo pretpostaviti da je $\lambda_{n+k} = \overline{\lambda_k}$ za sve $k = 1, \dots, n$. Odavde slijedi da je broj kompleksnih svojstvenih vrijednosti za A paran.

Kada A ne bi imala niti jednu realnu svojstvenu vrijednost, tada bi iz prethodnog zadatka slijedilo

$$\det A = \prod_{k=1}^{2n} \lambda_k = \prod_{k=1}^{n} |\lambda_k|^2 \geq 0,$$

što je u kontradikciji s pretpostavkom zadatka. Prema tome, A ima barem jednu svojstvenu vrijednost u $\mathbb{R}$. Kada bi A imala točno jednu realnu svojstvenu vrijednost (računajući kratnost), tada bi broj kompleksnih svojstvenih vrijednosti bio neparan, što nije slučaj. ■

Zadatak 2.21. Neka su $A,B \in M_n(\mathbb{F})$. Dokažite da je $k_{AB} = k_{BA}$ i $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

Rješenje: Dokazali smo da za svake dvije matrice $T,S \in M_n(\mathbb{F})$ vrijedi

$$\det(I+ST) = \det(I+TS).$$

Neka je $\lambda \neq 0$. Primjenom gornje tvrdnje na matrice $-\frac{1}{\lambda}A$ i B dobivamo

$$\det\left(I - \frac{1}{\lambda}AB\right) = \det\left(I - \frac{1}{\lambda}BA\right)$$

odakle za svaki $\lambda \neq 0$ vrijedi

$$k_{AB}(\lambda) = \det(AB - \lambda I) = (-\lambda)^n \det\left(I - \frac{1}{\lambda}AB\right) = (-\lambda)^n \det\left(I - \frac{1}{\lambda}BA\right) = \det(BA - \lambda I) = k_{BA}(\lambda).$$

Dakle, polinomi k_{AB} i k_{BA} se podudaraju u beskonačno točaka, pa su oni jednaki. ■

Zadatak 2.22. Neka je V n-dimenzionalni vektorski prostor te $A,B \in L(V)$. Dokažite da je $k_{AB} = k_{BA}$. Posebno, vrijedi i $\sigma(AB) = \sigma(BA)$.

Rješenje: Neka je (e) proizvoljna baza za V. Prema prethodnom zadatku je $k_{A(e)B(e)} = k_{B(e)A(e)}$, pa je

$$k_{AB} = k_{(AB)(e)} = k_{A(e)B(e)} = k_{B(e)A(e)} = k_{(BA)(e)} = k_{BA}.$$

■

Kao što smo na prirodan način definirali svojstvene vrijednosti i pridružene svojstvene vektore za matricu $A \in M_n(\mathbb{F})$, možemo i dati definiciju dijagonalizibilnosti matrice.

Definicija 2.15. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Kažemo da se matrica A **može dijagonalizirati** ili da je **dijagonalizabilna**, ako postoji regularna matrica $S \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $S^{-1}AS$ dijagonalna matrica.

Propozicija 2.16. *Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ dijagonalizabilna matrica, te $S \in M_n(\mathbb{F})$ regularna matrica takva da je $D = S^{-1}AS$ dijagonalna matrica. Neka su na dijagonali matrice D redom skalari $\lambda_1,\dots,\lambda_n$. Tada su $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ svojstvene vrijednosti matrice A, a stupci $S_1,\dots,S_n$ matrice S su redom pridruženi svojstveni vektori.*

Uočimo da, ukoliko je matrica A dijagonalizabilna, matrice D i S nisu jedinstvene: uvijek možemo promijeniti poredak svojstvenih vrijednosti u dijagonalnoj matrici D (što će rezultirati i odgovarajućom promjenom u poretku stupaca matrice S) ili odabrati neke druge svojstvene vektore.

Kao i kod dijagonalizacije linearnog operatora, dijagonalizacija matrice bit će moguća ukoliko postoji baza sastavljena od svojstvenih vektora matrice. Vrijede analogne tvrdnje kao i kod dijagonalizacije linearnog operatora (preko geometrijskih i algebrarskih kratnosti).

Zadatak 2.23. Dijagonalizirajte, ako je moguće, matricu $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ u $M_2(\mathbb{R})$ i u $M_2(\mathbb{C})$.

Rješenje: Dobijemo da je $k_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$.

Kako k_A nema realnih nultočki, A se ne može dijagonalizirati u $M_2(\mathbb{R})$.

Promatrajmo sada A kao element $M_2(\mathbb{C})$. Tada je $\sigma(A) = \{i, -i\}$. Kada matrica reda 2 ima dvije različite svojstvene vrijednosti, ona je dijagonalizabilna, dakle A se može dijagonalizirati u $M_2(\mathbb{C})$. Sada izračunamo da je $\begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti i, te da je $\begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix}$ svojstveni vektor pridružen svojstvenoj vrijednosti $-i$. Slijedi da za

$$S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{bmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{bmatrix}$$

vrijedi $A = SDS^{-1}$. ■

Zadatak 2.24. Odredite sve $x \in \mathbb{R}$ za koje se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & -4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 3 & 3 & -1 & -2 \\ 6 & 6 & 2 & -6 \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati. Zatim za najmanji $x \in \mathbb{N}$ za koji je matricu moguće dijagonalizirati pronađite pripadne S i D takve da je $A = SDS^{-1}$.

Rješenje: Karakteristični polinom matrice A je

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = (\lambda - 1)(\lambda + 2)^2(\lambda - x).$$

Sada razlikujemo tri slučaja:

- $x \notin \{1, -2\}$

  U ovom slučaju je $\sigma(A) = \{1, -2, x\}$ te je $a(1) = 1$, $a(-2) = 2$ i $a(x) = 1$. Kako je geometrijska kratnost manja ili jednaka algebarskoj, vrijedi $g(1) = a(1) = 1$ i $g(x) = a(x) = 1$. Trebamo još odrediti $g(-2)$. Vrijedi $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 = a(-2)$. Dakle, u ovom slučaju se matrica može dijagonalizirati.

- $x = -2$

  Sada je $\sigma(A) = \{1, -2\}$, $a(1) = 1$ i $a(-2) = 3$. Vrijedi $g(1) = a(1) = 1$, dok je $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 < a(-2)$. U ovom slučaju se matrica ne može dijagonalizirati.

- $x = 1$

  Ovdje je $\sigma(A) = \{1, -2\}$, $a(1) = 2$ i $a(-2) = 2$. Vrijedi $g(-2) = d(A + 2I) = 4 - r(A + 2I) = 2 = a(-2)$, $g(1) = d(A - I) = 4 - r(A - I) = 2 = a(1)$. U ovom slučaju se matrica može dijagonalizirati.

Dakle, matrica A se može dijagonalizirati ako i samo ako je $x \neq -2$. Provedimo sada dijagonalizaciju za $x = 1$. Potrebne su nam baze za $V_A(1)$ i $V_A(-2)$, gdje standardnim načinom dobijemo

$$V_A(1) = [\{(1, -1, 0, 0), (2, 0, 1, 2)\}], \qquad V_A(-2) = [\{(1, 0, -3, 0), (2, 0, 0, 3)\}].$$

Dakle, ako stavimo

$$D = \operatorname{diag}(1, 1, -2, -2), \qquad S = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

tada je $A = SDS^{-1}$. ■

Zadatak 2.25. Odredite sve $b, c, d \in \mathbb{R}$ za koje se matrica

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & c \\ 1 & d & b \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

može dijagonalizirati. Zatim odredite A^{20} za $b = c = d = 0$.

Rješenje: Prvo dobijemo da je

$$k_A(\lambda) = \det(A - \lambda I) = \cdots = (1-\lambda)^2(d-\lambda).$$

Imamo dva slučaja:

- Ako je $d = 1$, tada je $a(1) = 3$. S druge strane je

$$g(1) = d(A-I) = d\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) \leq 2,$$

  pa vidimo da A nije dijagonalizibilna u ovom slučaju.

- Ako je $d \neq 1$ tada je $a(1) = 2$ i $a(d) = 1$. Stoga je posebno i $a(d) = g(d) = 1$. Matrica A će biti dijagonalizabilna ako i samo ako je $g(1) = a(1) = 2$. Kako je

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & c \\ 1 & d-1 & b \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

  vidimo da je $d(A-I) = 2$ ako i samo ako je $c = 0$.

Prema tome, matrica A se može dijagonalizirati ako i samo ako je $b \in \mathbb{R}$, $c = 0$ i $d \neq 1$.

Odredimo sada A^{20} u slučaju $d = b = c = 0$, tj.

$$A^{20} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{20}.$$

Kako je u ovom slučaju matrica A dijagonalizibilna, postoji regularna matrica S takva da je $A = SDS^{-1}$, gdje je $D = \operatorname{diag}(1,1,0)$. Tada je

$$A^{20} = (SDS^{-1})^{20} = (SDS^{-1})(SDS^{-1})\dots(SDS^{-1}) = SD^{20}S^{-1} = S\operatorname{diag}(1^{20},1^{20},0^{20})S^{-1} = SDS^{-1} = A.$$

■

Zadatak 2.26. Neka je $A \in M_n$ dijagonalizabilna matrica takva da je $\lambda^4 = 3\lambda^2$ za svaki $\lambda \in \sigma(A)$. Dokažite da je tada $A^4 = 3A^2$.

Rješenje: Neka su S regularna i D dijagonalna matrica takve da je $A = SDS^{-1}$. Kako su na dijagonali od D svojstvene vrijednosti od A, iz pretpostavke zadatka slijedi da je $D^4 = 3D^2$. Sada je

$$A^4 = SD^4S^{-1} = 3SD^2S^{-1} = 3A^2.$$

■

DZ 2.6. Neka je $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in M_3(\mathbb{R})$.

(a) Može li se A dijagonalizirati? Ako da, nađite regularnu matricu S i dijagonalnu matricu D takve da je $S^{-1}AS = D$.

(b) Odredite A^{30}.

Rješenje:

(a) Dobijemo $k_A(\lambda) = ... = (1-\lambda)^2(3-\lambda)$, iz čega slijedi $\sigma(A) = \{1,3\}$ te $a(1) = 2$ i $a(3) = 1$.
Prvo računamo $V_A(1)$:

$$A - I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(1) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \Rightarrow g(1) = 2.$$

Sada za $V_A(3)$ imamo:

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow V_A(1) = \left[\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\} \right] \Rightarrow g(3) = 1.$$

To znači da je A dijagonalizabilna matrica i da za

$$S = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

vrijedi $S^{-1}AS = D$.

(b) Računamo:

$$A^{30} = SD^{30}S^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{30} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0.5 + 0.5 \cdot 3^{30} & 0 & -0.5 + 0.5 \cdot 3^{30} \\ 0 & 1 & 0 \\ -0.5 + 0.5 \cdot 3^{30} & 0 & 0.5 + 0.5 \cdot 3^{30} \end{bmatrix}.$$

■

DZ 2.7. Neka su $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ i $B = \begin{bmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$. Pokažite da su A i B dijagonalizabilne matrice. Jesu li dijagonalizabilne i matrice $A+B$ i AB?

DZ 2.8. Neka su dane matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Dokažite da je $k_A = k_B$, da je A dijagonalizabilna, a B nije.

DZ 2.9. Neka je $A \in M_n$ dijagonalizabilna matrica. Dokažite da su i sljedeće matrice dijagonalizabilne:

(a) A^k za $k \in \mathbb{N}$

(b) $A^3 + A^2 + I$

(c) αA za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$

(d) $T^{-1}AT$ za svaku regularnu matricu T

(e) $\alpha I + A$ za svaki $\alpha \in \mathbb{R}$

DZ 2.10. Neka su su B i C kvadratne matrice, te A blok-matrica dana kao:

$$A = \begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & C \end{bmatrix}.$$

(a) Pokažite da je $k_A(\lambda) = k_B(\lambda)k_C(\lambda)$ za svaki $\lambda \in \mathbb{C}$.

(b) Ako su X i Y redom svojstveni vektori matrica B i C, pokažite da su vektori:

$$\begin{bmatrix} X \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{bmatrix} 0 \\ Y \end{bmatrix}$$

svojstveni vektori matrice A.

2.5 Matrični polinomi

Definicija 2.17. Neka je $p(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ proizvoljni polinom u jednoj varijabli x s koeficijentima iz $\mathbb{F}$ i neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$. Tada pod matričnim polinomom podrazumijevamo

$$p(A) = a_m A^m + a_{m-1}A^{m-1} + \cdots + a_1 A + a_0 I.$$

Uočimo da potencije kvadratne matrice međusobno komutiraju pa s matričnim polinomima možemo postupati kao s polinomima u varijabli koja je element polja $\mathbb{F}$. Npr. vrijede identiteti kao što su

$$A^2 - I = (A-I)(A+I) \quad \text{ili} \quad (A+I)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k.$$

Naravno, sličan zaključak ne možemo provesti za matrične poliome u više varijabli. Primjerice, kako općenito je $AB \neq BA$, to je i

$$A^2 - B^2 \neq (A-B)(A+B).$$

Zadatak 2.27. Neka je matrica $A \in M_n(\mathbb{F})$ takva da je $A^k = 0$ i $A^{k-1} \neq 0$ za neki $k \in \mathbb{N}$. Dokažite da je matrica $I - A$ regularna i nađite $(I-A)^{-1}$.

Rješenje: Pogledajmo polinom $p(A) = \sum_{j=0}^{k-1} A^j$. Tada je

$$\begin{aligned} (I-A)p(A) &= (I-A)\left(\sum_{j=0}^{k-1} A^j\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} A^j - \sum_{j=1}^{k} A^j \\ &= I - A^k = I. \end{aligned}$$

Prema tome, $I - A$ je regularna matrica i $(I-A)^{-1} = \sum_{j=1}^{k-1} A^j$. ■

Teorem 2.18. *(Hamilton-Cayley) Svaka kvadratna matrica poništava svoj svojstveni polinom, tj. vrijedi* $k_A(A) = 0$.

Hamilton-Cayleyjev teorem nam daje još jednu metodu invertiranja regularnih matrica. Neka je $A \in M_n(\mathbb{F})$ regularna matrica te $k_A(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k$ njen karakteristični polinom. Prema Hamilton-Cayleyjevom teoremu je $k_A(A) = 0$, tj.

$$\sum_{k=0}^{n} a_k A^k = 0.$$

Kako je A regularna matrica, vrijedi $a_0 = \det A \neq 0$, pa je

$$I = -\frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k A^k\right) = A\left(-\frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}A^k\right)\right),$$

Iz ovoga slijedi da je

$$A^{-1} = -\frac{1}{a_0}\left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}A^k\right).$$

Zadatak 2.28. Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem odredite inverz matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Rješenje: Prvo odredimo karakteristični polinom dane matrice:

$$k_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -1 \\ -1 & 3-\lambda & -1 \\ -1 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 5\lambda + 2.$$

Prema Hamilton-Cayleyjevom teoremu i raspravi koja je prethodila ovom zadatku imamo

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(A^2 - 4A + 5I\right).$$

Kako je $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & -2 \\ -3 & 5 & -1 \end{bmatrix}$, dobivamo

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{bmatrix}\right).$$

■

Zadatak 2.29. Neka je $A \in M_n$ proizvoljna matrica i

$$M = \left[\left\{A^k : k \in \mathbb{N} \cup \{0\}\right\}\right].$$

Dokažite da je $\dim M \leq n$.

Rješenje: Prema Hamilton-Cayleyjevom teoremu, $A^n = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k$ za neke skalare $\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1}$, dakle,

$$A^n \in \left[\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}\right].$$

Nadalje,

$$A^{n+1} = A \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^k = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k A^{k+1} \in \left[\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}\right].$$

Na isti način dobijemo da su sve potencije od A sadržane u prostoru $\left[\{I, A, \ldots, A^{n-1}\}\right]$, čija je dimenzija manja ili jednaka n.

■

DZ 2.11. Odredite karakteristični polinom matrice

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

(rj. $k_A(\lambda) = (3-\lambda)(6-\lambda^2)$).

DZ 2.12. Koristeći Hamilton-Cayleyev teorem izrazite A^{-1} u obliku $p(A)$ za neki polinom p, ako je

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & -3 & 4 & 1 \\ -8 & -2 & -7 & 5 & 4 \end{bmatrix}.$$

(rj. $A^{-1} = \frac{1}{32}\left(A^4 - 10A^3 + 40A^2 - 80A + 80I\right)$)

DZ 2.13. Neka je $A \in M_2(\mathbb{F})$, $A \neq \alpha I$, za svaki $\alpha \neq 0$. Dokažite da je A singularna ako i samo ako je $A^2 = \beta A$ za neki $\beta \in \mathbb{F}$.

Rješenje: Za karakteristični polinom od A imamo

$$k_A(\lambda) = \lambda^2 - (\mathrm{tr}A)\,\lambda + \det A.$$

Po Hamilton-Cayleyjevom teoremu je $k_A(A) = A^2 - (\mathrm{tr}A)A + (\det A)I = 0$, to jest $A^2 = (\mathrm{tr}A)A - (\det A)IA$.

Pretpostavimo da je A singularna matrica. Tada je $\det A = 0$ i zato $A^2 = (\mathrm{tr}A)A$, što daje tvrdnju.

Obratno, neka je $A^2 = \beta A$ za neki $\beta \in \mathbb{F}$. Kada bi A bila regularna onda bismo, množeći prethodnu jednakost s A^{-1}, dobili $A = \beta I$, što po pretpostavci zadatka nije slučaj. Slijedi da je A singularna. ■

Uočimo da iz uvjeta prethodnog zadatka vrijedi ako je $A^2 = \beta A$ i $A \neq 0$, onda je $\beta = \mathrm{tr}A$ (raspišite). Dakle, slučaj $\mathrm{tr}A \neq \beta$ je moguć samo za $A = 0$.

DZ 2.14. Neka je $A \in M_n$ proizvoljna regularna matrica i

$$M = \left[\left\{A^k : k \in \mathbb{Z}\right\}\right].$$

(Pritom, ako je $k < 0$ tada je $A^k = (A^{-1})^{-k}$; na primjer, $A^{-5} = (A^{-1})^5$). Što možete reći o $\dim M$?

DZ 2.15. Neka su A i B slične matrice i p polinom. Dokažite da je $p(A) = 0$ ako i samo ako je $p(B) = 0$.

Rješenje: Neka je S regularna matrica takva da je $B = S^{-1}AS$. Tada je $B^k = (S^{-1})^k AS$ za svaki $k \in \mathbb{N}$, te onda lako slijedi da je $p(B) = (S^{-1})p(A)S$. Odavde slijedi tvrdnja. ■