

Prve i druge vježbe : Logika

Teorijski podsjetnik

- Za sudove A i B definiramo sljedeće logičke veznike:
 - **negacija** $\neg A$ (ne A), istinita kada je A lažan.
 - **konjunkcija** $A \wedge B$ (A i B), istinita samo kada su A i B oboje istiniti.
 - **disjunkcija** $A \vee B$ (A ili B), istinita kada je barem jedan od A i B istinit.
 - **implikacija** $A \Rightarrow B$ (ako A onda B), lažna je samo u slučaju kada je A istinit, a B lažan.
 - **ekvivalencija** $A \Leftrightarrow B$ (A ako i samo ako B), istinita samo u slučaju kada su A i B oboje istiniti ili oboje lažni.
- Za sud oblika $A \Rightarrow B$ definiramo **obrat** $B \Rightarrow A$ i **obrat po kontrapoziciji** $\neg B \Rightarrow \neg A$. Obrat po kontrapoziciji je semantički ekvivalentan početnom sudu.
- Za jednomjesni predikat $P(x)$ definiramo sljedeće kvantifikatore:
 - **univerzalni kvantifikator** $\forall$, $(\forall x)P(x)$ znači da za svaki x vrijedi $P(x)$,
 - **egzistencijalni kvantifikator** $\exists$, $(\exists x)P(x)$ znači da postoji neki x za koji vrijedi $P(x)$,
 - **kvantifikator jedinstvene egzistencije** $\exists!$, $(\exists!x)P(x)$ znači da postoji točno jedan x za koji vrijedi $P(x)$.
- Pravila za negiranje: $\neg(\neg A) \equiv A$, $\neg(A \wedge B) \equiv \neg A \vee \neg B$, $\neg(A \vee B) \equiv \neg A \wedge \neg B$, $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$, $\neg(A \Leftrightarrow B) \equiv (A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)$.

1. Neka je $A \equiv 2^3 = 8$ i $B \equiv 7 > 5$. Zapišite sljedeće sudove i odredite im istinitost:

- | | |
|--------------------------------|---------------------------------------|
| (a) $A \Rightarrow \neg B$ | (d) $\neg(\neg A)$ |
| (b) $A \vee \neg B$ | (e) $(A \wedge \neg B) \Rightarrow A$ |
| (c) $\neg A \Leftrightarrow B$ | |

2. Zapišite sljedeće sudove simbolima i odredite im istinitost:

- (a) “Ako je $3 + 2 = 7$, onda je $4 + 4 = 8$.”
- (b) “Nije istina da je $6^2 = 32$ ako i samo ako je $4 \geq 10$.”
- (c) “Nije istina da je $\log_2 16 = 3$ ili $\cos 0 = 1$.”
- (d) “Nije istina da, ako je 10 djeljiv s 3, onda je $\sqrt{9} = 4$.”

3. Neka su A, B, C sudovi. Odredite sud F takav da sud

$$((A \Leftrightarrow \neg B) \wedge C) \Rightarrow ((A \vee B) \wedge (\neg C \vee F))$$

bude tautologija (uvijek istinit).

4. Zapišite simbolima sljedeće sudove i ispitajte im istinitost:

- (a) “Svaki cijeli broj djeljiv je s 1.”
- (b) “Postoji jedinstven prirodan broj čiji je kvadrat jednak 9.”
- (c) “Za svaki realan broj postoji prirodan broj koji je veći od njega”
- (d) “Postoji prirodan broj koji je djelitelj svakog prirodnog broja”

5. Zapišite sljedeće sudove riječima i provjerite njihovu istinitost:

- (a) $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N})(n < m)$
- (b) $(\exists m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(n < m)$

Što možete zaključiti o redoslijedu kvantifikatora?

6. Odredite istinitost sljedećih sudova:

- (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x = x^2)$
- (b) $(\exists x \in \mathbb{R})(x = x^2)$
- (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(x + 1 > x)$
- (d) $(\exists x \in \mathbb{R})(x + 2 = x)$
- (e) $(\exists x \in \mathbb{R})(|x| = 0)$
- (f) $(\forall y \in \mathbb{N})(\exists x \in \mathbb{N})(y \geq x)$
- (g) $(\exists x \in \mathbb{N})(\forall y \in \mathbb{N})(y \geq x)$
- (h) $(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(y \geq x)$
- (i) $(\forall y \in \mathbb{R}_+)(\exists x \in \mathbb{R}_+)(xy = 1)$

7. Zapišite sljedeće sudove simbolima:

- (a) "Svaki prirodan broj manji je od nekog prirodnog broja"
- (b) "Postoji prirodan broj veći od svakog prirodnog broja"
- (c) "Svaki prirodan broj koji je djeljiv s 14 je djeljiv s 2 i sa 7"
- (d) "Svaki prirodan broj koji je kvadrat parnog broja je djeljiv s 4"
- (e) "Za svaka dva prirodna broja vrijedi: ako je njihov produkt djeljiv nekim prostim brojem, onda je istim prostim brojem djeljiv barem jedan od njih"

8. Zapišite negacije sljedećih sudova:

- (a) $(\exists x \in \mathbb{N})(x + 1 = 8)$
- (b) $(\forall x \in \mathbb{N})(x < 8)$
- (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x^2 + y^2 \geq 4)$
- (d) $(\forall x \in \mathbb{R})(x > 0 \vee x < 0)$
- (e) $(\forall x \in \mathbb{Q})(x \cdot 0 = 0 \wedge x \cdot 1 = x)$
- (f) $(\exists a \in \mathbb{R}_+)(a \neq -1 \Rightarrow a = -2)$
- (g) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - x \geq 0 \Leftrightarrow (x < 0 \vee x \geq 1))$
- (h) $((\exists x \in \mathbb{Q})(x^2 = 2)) \Rightarrow ((\forall y \in \mathbb{Q})(y + \sqrt{2} \in \mathbb{Q}))$

9. Napišite obrat po kontrapoziciji sljedećih implikacija:

- (a) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 7x + 12 > 0 \Rightarrow x < 3)$
- (b) $(\forall x \in \mathbb{R})(x^2 - 2x > 0 \Rightarrow (x > 2 \vee x < 0))$
- (c) $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})((x > 0 \wedge y > 0) \Rightarrow xy > 0)$
- (d) $(\forall n \in \mathbb{N})(2 \mid n \Rightarrow (\exists k \in \mathbb{Z})(n = 4k \vee n = 4k + 2))$

10. Označimo $P(x) \equiv$ "x je prost broj". Zadana je tvrdnja:

"Postoji prirodan broj manji od svakog prostog broja manjeg od 100."

Napišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji. Odredite istinitost zadane i svih dobivenih tvrdnji.

11. Zadana je tvrdnja:

"Za svaka dva prirodna broja vrijedi: ako je jedan od njih veći od drugog, onda postoji paran broj manji od njihovog zbroja."

Napišite simbolima zadanu tvrdnju te njenu negaciju, obrat i obrat po kontrapoziciji. Odredite istinitost zadane i svih dobivenih tvrdnji.