MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 10. veljače 2024.

Zadatak 1. *(ukupno 24 boda)* Dana je funkcija

$$g(x) = \arccos(x^2 - \operatorname{sgn}(x)).$$

(a) (8 bodova) Odredite prirodnu domenu funkcije g.

(b) (8 bodova) Neka je I najveći interval unutar prirodne domene funkcije g koji sadrži 0 i na kojem je g injekcija. Odredite I i $g(I)$.

(c) (8 bodova) Odredite prasliku $g^{-1}(g(I))$ unutar prirodne domene funkcije g.

Rješenje.

(a) Funkcija sgn definirana je za sve realne brojeve, pa preostaje odrediti sve vrijednosti $x \in \mathbb{R}$ takve da je

$$-1 \leq x^2 - \operatorname{sgn}(x) \leq 1.$$

- Neka je $x > 0$. Rješavamo
$$-1 \leq x^2 - 1 \leq 1.$$
Dobijemo $x \in \langle 0, \sqrt{2}]$.
- Neka je $x = 0$. Vrijedi da je $-1 \leq 0 \leq 1$, pa je $0 \in \mathcal{D}_g$.
- Neka je $x < 0$. Rješavamo
$$-1 \leq x^2 + 1 \leq 1.$$
U ovom slučaju nema rješenja.

Dakle, $\mathcal{D}_g = [0, \sqrt{2}]$.

(b) Funkcija arccos je injekcija, pa će i funkcija $\arccos(x^2 - \operatorname{sgn}(x))$ biti injekcija tamo gdje je funkcija $x^2 - \operatorname{sgn}(x)$ injekcija.

Budući da je $x^2 - 1$ rastuća funkcija na pozitivnim realnim brojevima, jedine točke u kojoj se vrijednost ponavlja su za $x = 1$ i $x = 0$ (i tu je $g(x) = \frac{\pi}{2}$).

Dakle, $I = [0, 1\rangle$. Računamo

$$g([0,1\rangle) = g(\{0\}) \cup g(\langle 0,1\rangle) = \frac{\pi}{2} \cup \langle \arccos(0), \arccos(-1)\rangle = \frac{\pi}{2} \cup \left\langle \frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle = \left[\frac{\pi}{2}, \pi \right\rangle.$$

(c) Tražimo $x \in [0, \sqrt{2}\rangle$ takve da je $\arccos(x^2 - \operatorname{sgn}(x)) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$.

Ako je $x > 0$, tražimo $\arccos(x^2 - 1) \in \left[\frac{\pi}{2}, \pi\right\rangle$, tj. $x \in \langle 0, 1]$.

Provjerom vidimo da je za $x = 0$ također $g(x) \in g(I)$.

Dakle, $g^{-1}(g(I)) = [0, 1]$.

Zadatak 2. *(ukupno 24 boda)* Neka je t realan broj iz intervala $[0, \frac{\pi}{2}]$. Niz (a_n) zadan je rekurzivno na sljedeći način:

$$a_1 = t, \quad a_{n+1} = a_n \cos(a_n).$$

Dokažite da niz (a_n) konvergira i odredite mu limes.

Rješenje. Dokazat ćemo da (a_n) konvergira prema 0. Dokažimo najprije indukcijom da za svaki n vrijedi $a_n \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Za $n = 1$, to je jasno po uvjetu zadatka. Ako to vrijedi za neki n, tada je $\cos(a_n) \in [0, 1]$ jer $\cos 0 = 1$, $\cos(\frac{\pi}{2}) = 0$ te je kosinus padajuć na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$. Dakle, iz rekurzivne relacije slijedi $a_{n+1} \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Nadalje, iz dokazanog slijedi da za svaki n imamo $a_{n+1} \le a_n$, odnosno niz (a_n) padajuć je. Kako je (a_n) omeđen odozdo, on mora biti konvergentan, stoga označimo $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. Tada iz rekurzivne relacije slijedi

$$L = L \cos L.$$

Također, kako je $0 \le a_n \le \frac{\pi}{2}$ za svaki n, vrijedi $0 \le L \le \frac{\pi}{2}$. Kada bi bilo $L \neq 0$, tada bi dijeljenjem s L u gornjoj jednadžbi slijedilo $\cos L = 1$. Budući da je kosinus strogo padajuć na intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$, slijedilo bi $L = 0$, što je kontradikcija. Dakle, mora biti $L = 0$, čime je tvrdnja dokazana.

Zadatak 3. *(ukupno 26 bodova)*

(a) (16 bodova) Odredite limes inferior i superior niza $a_n = \sqrt{2n} - \lfloor \sqrt{2n} \rfloor$.

(b) (10 bodova) Neka su $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ proizvoljni nizovi pozitivnih realnih brojeva. Dokažite ili opovrgnite identitet:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n + \liminf_{n\to\infty} b_n = \liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n)$$

Rješenje.

(a) Po definiciji funkcije $\lfloor \cdot \rfloor$ znamo da za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$ pa zaključujemo da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $0 \leq a_n \leq 1$. Prema tome, zaključujemo da je $\liminf_{n\to\infty} a_n \geq 0$ i $\limsup_{n\to\infty} a_n \leq 1$. Dokažimo da vrijede jednakosti u prethodne dvije nejednakosti. Naime, promatramo li podniz: $(a_{2n^2})_n$, tada vrijedi:

$$a_{2n^2} = \sqrt{4n^2} - \lfloor \sqrt{4n^2} \rfloor = 2n - 2n = 0.$$

S druge strane, za podniz $(a_{2n^2-1})_n$ vrijedi

$$a_{2n^2-1} = \sqrt{4n^2 - 2} - \lfloor \sqrt{4n^2 - 2} \rfloor.$$

Kako je

$$(2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1 \leq 4n^2 - 2 < 4n^2 = (2n)^2,$$

korjenovanjem slijedi

$$2n - 1 \leq \sqrt{4n^2 - 2} < 2n$$

pa zaključujemo da je $\lfloor \sqrt{4n^2 - 2} \rfloor = 2n - 1$. Dakle, vrijedi

$$\begin{aligned} a_{2n^2-1} = \sqrt{4n^2 - 2} - (2n-1) &= \frac{4n^2 - 2 - (2n-1)^2}{\sqrt{4n^2 - 2} + (2n-1)} \\ &= \frac{4n - 3}{\sqrt{4n^2 - 2} + (2n-1)} \frac{: n}{: n} \\ &= \frac{4 - \frac{3}{n}}{\sqrt{4 - \frac{2}{n^2}} + 2 - \frac{1}{n}} \to \frac{4}{2+2} = 1, \end{aligned}$$

gdje smo kod puštanja limesa koristili teorem o limesu zbroja i produkta te neprekidnost funkcije korijen u točki 4. Prema tome, zaključujemo $\liminf_{n\to\infty} a_n = 0$ i $\liminf_{n\to\infty} a_n = 1$.

(b) Tvrdnja ne vrijedi. Promotrimo nizove: $a_n = 2 + (-1)^n$ i $b_n = 2 + (-1)^{n+1}$. Tvrdimo da je skup gomilišta nizova $(a_n)_n$ i $(b_n)_n$ jednak $\{1, 3\}$. Naime, promatrajući parne i neparne članove zaključujemo da 1 i 3 jesu gomilišta, a kako za svaki $c \in \mathbb{R} \setminus \{1, 3\}$ i $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|a_n - c| \geq \min\{|3-c|, |1-c|\} = \delta > 0$, ni jedan podniz ne može konvergirati k c. Dakle, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} b_n = 1$, dok je $a_n + b_n = 4$ pa je $\liminf_{n\to\infty}(a_n + b_n) = 4$.

Zadatak 4. *(ukupno 26 bodova)*

(a) (16 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija te neka je $x_0 \in \mathbb{R}$. Definiramo funkciju

$$g\colon (0,\infty) \to \mathbb{R}, \quad g(\delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}.$$

Dokažite da je g dobro definirana, rastuća te da vrijedi

$$\lim_{\delta \to 0^+} g(\delta) = 0.$$

(b) (10 bodova) Neka je $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da vrijedi sljedeće: za svaki zatvoren omeđen interval $I \subseteq \mathbb{R}$, njegova slika $f(I)$ također je zatvoren omeđen interval. Mora li f biti neprekidna?

Uputa. Promatrajte funkciju s pravilom pridruživanja $\cos(\frac{1}{x})$.

Rješenje.

(a) Neka je $\delta > 0$ proizvoljan. Po Bolzano–Weierstrassovom teoremu postoji realan broj $M > 0$ takav da za sve $x \in [x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ vrijedi $|f(x)| \le M$. Tada iz nejednakosti trokuta za sve $x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ imamo

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x)| + |f(y)| \le M + M = 2M.$$

Dakle, skup

$$S_\delta := \{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)\}$$

neprazan je i omeđen odozgo pa ima supremum, odnosno $g(\delta)$ dobro je definirano. Također, ako je $0 < \delta_1 < \delta_2$, tada imamo $S_{\delta_1} \subseteq S_{\delta_2}$, odakle uzimanjem supremuma slijedi $g(\delta_1) \le g(\delta_2)$. Dakle, g je rastuća. Nadalje, za dani $\varepsilon > 0$, po neprekidnosti f u x_0 možemo odabrati $\delta_0 > 0$ takav da za $|x - x_0| < \delta_0$ imamo $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Tada za sve $x, y \in (x_0 - \delta_0, x_0 + \delta_0)$ iz nejednakosti trokuta dobivamo

$$|f(x) - f(y)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(y) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

odakle slijedi $g(\delta_0) \le \varepsilon$. Kako je g rastuća, za sve $0 < \delta < \delta_0$ slijedi $0 \le g(\delta) \le \varepsilon$. Dakle, vrijedi $\lim_{\delta \to 0^+} g(\delta) = 0$, čime je dokaz završen.

(b) f ne mora biti neprekidna. Zaista, promotrimo f s pravilom pridruživanja

$$f(x) = \begin{cases} \cos\left(\frac{1}{x}\right) & \text{ako } x \ne 0 \\ 0 & \text{ako } x = 0 \end{cases}.$$

Ona nije neprekidna jer npr. $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{2n\pi} = 0$, dok

$$\lim_{n \to \infty} f\left(\frac{1}{2n\pi}\right) = 1 \ne 0 = f(0).$$

S druge strane, pretpostavimo da je $I = [a, b]$ zatvoren omeđen interval. Uvedimo funkciju

$$g\colon \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \frac{1}{x}.$$

Ako I ne sadrži 0, tada je restrikcija $f|_I = \cos \circ g|_I$ neprekidna kao kompozicija neprekidnih funkcija pa po Bolzano–Weierstrassovom teoremu slijedi da je slika $f(I)$ zatvoren omeđen interval. Ako I sadrži 0, tada je $a \le 0 \le b$ pa imamo tri slučaja. Ako je $a = 0 = b$, tada je $f(I) = \{0\}$. Ako je $b > 0$, tada

$$f(I) \supseteq f((0, b]) = (\cos \circ g|_{(0,b]})((0, b]) = \cos(g((0, b])) = \cos\left(\left[\frac{1}{b}, \infty\right)\right) = [-1, 1],$$

odakle slijedi $f(I) = [-1, 1]$ jer očigledno f poprima vrijednosti samo u intervalu $[-1, 1]$. Slično, ako je $a < 0$, tada

$$f(I) \supseteq f([a, 0)) = (\cos \circ g|_{[a,0)})([a, 0)) = \cos(g([a, 0))) = \cos\left(\left(-\infty, \frac{1}{a}\right]\right) = [-1, 1]$$

pa opet zaključujemo $f(I) = [-1, 1]$. Dakle, u svakom slučaju, $f(I)$ je zatvoren omeđen interval.