

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit - 2. rok – 9. veljače 2026.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Dozvoljeno je pozvati se na sljedeće limese:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^{ax}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad p, a > 0.$$

Zadatak 1. (ukupno 25 boda) Dana je funkcija

$$f(x) = \ln \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \left(3^{\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{8x - 8}} \right) \right)$$

- (a) (8 bodova) Odredite prirodnu domenu $\mathcal{D}_f$ funkcije f .
- (b) (8 bodova) Odredite sliku $\mathcal{R}_f$ funkcije f .
- (c) (9 bodova) Postoji li funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ takva da je $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
- (c1) parna?
- (c2) periodična?
- (c3) bijekcija?

Ako takva funkcija g ne postoji dokažite da ne postoji, a ako postoji napišite jedan primjer.

Rješenje.

- (a) $x \in \mathcal{D}_f$ ako vrijedi $8x - 8 \neq 0$, odnosno $x \neq 1$ i ako je $\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \left(3^{\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{8x - 8}} \right) > 0$ odnosno

$$\operatorname{arctg} \left(3^{\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{8x - 8}} \right) < \frac{\pi}{4}$$
$$3^{\frac{x^3 - 3x^2 - x + 3}{8x - 8}} < 3^0$$
$$\frac{(x+1)(x-1)(x-3)}{8(x-1)} < 0.$$

Pa zaključujemo da je $\mathcal{D}_f = \langle -1, 3 \rangle \setminus \{1\}$

- (b) Za $x \in \mathcal{D}_f$ vrijedi $f(x) = \ln \left(\frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} \left(3^{\frac{1}{8}(x+1)(x-3)} \right) \right)$

$$f_1(x) = \frac{1}{8}(x+1)(x-3) \implies f_1(\langle -1, 3 \rangle \setminus \{1\}) = \left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle$$

$$f_2(x) = 3^x \implies f_2\left(\left\langle -\frac{1}{2}, 0 \right\rangle\right) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \right\rangle$$

$$f_3(x) = \operatorname{arctg}(x) \implies f_3\left(\left\langle \frac{1}{\sqrt{3}}, 1 \right\rangle\right) = \left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right\rangle$$

$$f_4(x) = \ln \left(\frac{\pi}{4} - x \right) \implies f_4\left(\left\langle \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4} \right\rangle\right) = \left\langle -\infty, \ln \left(\frac{\pi}{12} \right) \right\rangle = \mathcal{R}_f,$$

gdje smo koristili da je $f = f_4 \circ f_3 \circ f_2 \circ f_1$.

- (c) (c1) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 0$, kako je $0 \in \mathcal{D}_f$ funkcija $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je konstantna funkcija pa je parna
- (c2) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = 0$, kako je $0 \in \mathcal{D}_f$ funkcija $f \circ g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ je konstantna funkcija pa je periodična
- (c3) Takva funkcija ne postoji jer $f : \langle -1, 3 \rangle \setminus \{1\} \rightarrow \mathbb{R}$ nije surjekcija pa ni $f \circ g$ ne može biti surjekcija, a onda ni bijekcija.

Zadatak 2. (*ukupno 25 bodova*)

- (a) (10 bodova) Neka je $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ niz realnih brojeva i $\bar{x}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$ aritmetička sredina prvih n članova niza (x_k) . Odredite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(\bar{x}_n)}{(\bar{x}_n)^2}$$

ako je

(a1) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$,

(a2) $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = c > 0$.

- (b) (15 bodova) Odredite

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(3 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n + 2^n}$$

Rješenje.

- (a) (a1) Po Cesaro-Stolzovom teoremu dobivamo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = 0$ pa slijedi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(\bar{x}_n)}{(\bar{x}_n)^2} = \frac{1}{2}$$

- (a2) Po Cesaro-Stolzovom teoremu dobivamo da je $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{x}_n = c$ pa slijedi da je

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos(\bar{x}_n)}{(\bar{x}_n)^2} = \frac{1 - \cos(c)}{c^2}$$

- (b) Budući da je

$$\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 1, & \text{za } n \equiv 1 \pmod{4} \\ -1, & \text{za } n \equiv 3 \pmod{4} \\ 0, & \text{za } n \equiv 0 \pmod{2}. \end{cases}$$

po teoremu o sendviču slijedi da je

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(3 \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right)^n + 2^n} = 3$$

Zadatak 3. (*ukupno 25 bodova*)

(a) (15 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$A = \left\{ \sin\left(\frac{m}{n}\right) : m, n \in \mathbb{N}, m^2 \leq 5n^2 \right\}.$$

(b) (10 bodova) Neka je $(a_n)_n$ odozgo omeđen niz realnih brojeva. Vrijedi li nužno

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n = \sup\{a_n : n \in \mathbb{N}\}?$$

Rješenje.

(a) Primijetimo da je

$$A = \{\sin(q) : q \in \langle 0, \sqrt{5} \rangle \cap \mathbb{Q}\} = \sin(\langle 0, \sqrt{5} \rangle \cap \mathbb{Q}).$$

Dakle, budući da je $\sqrt{5} \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$ i da je $\sin$ rastuća na $[0, \pi/2]$ i padajuća na $[\pi/2, \pi]$, slijedi

$$A \subset \sin(\langle 0, \sqrt{5} \rangle) = \langle 0, 1 \rangle.$$

Promatranjem niza $a_n = \sin(1/n) \in A$ i korištenjem neprekidnosti funkcije $\sin$ u 0, slijedi da je $\lim_n a_n = 0$ pa je $\inf A = 0$. S druge strane, kako je $\mathbb{Q}$ gust u $\mathbb{R}$, slijedi da postoji niz $q_n \in \langle 0, \sqrt{5} \rangle \cap \mathbb{Q}$ takav da $q_n \rightarrow \pi/2$. Tada je niz $b_n = \sin(q_n) \in A$ i po neprekidnosti funkcije $\sin$ u $\pi/2$ vrijedi $\lim_n b_n = 1$ pa je $\sup A = 1$.

(b) Ne. Promotrimo niz $(a_n)_n$ zadan s $a_n = 1/n$. Očito je odozgo omeđen s 1. Budući da konvergira u 0, vrijedi $\limsup_n a_n = 0$. S druge strane, zbog $a_1 = 1$ vrijedi

$$\sup\{1/n : n \in \mathbb{N}\} = 1.$$

Zadatak 4. (ukupno 25 bodova)

(a) (15 bodova) Odredite postoji li limes

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin(x).$$

(b) (10 bodova) Neka je $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija, takva da je $f(0) = f(2) = 0$. Dokažite da postoji $x \in [0, 2]$ takav da je $f(x) = f(x+1)$.

Rješenje.

(a) Koristeći ocjenu $|\sin(1/x)| \leq 1$, primijetimo da za $x > 0$ vrijedi

$$\left| \frac{1}{\sqrt{x}} \sin\left(\frac{1}{x}\right) \sin(x) \right| \leq \frac{\sin x}{\sqrt{x}}.$$

Koristeći tabličini limes i teorem o limesu produkta slijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{x} \cdot \frac{\sin x}{x} = 0 \cdot 1 = 0.$$

Dakle, po teoremu o sendviču, i traženi je limes jednak 0.

(b) Promotrimo $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zadanu s $g(x) := f(x+1) - f(x)$. Funkcija g je neprekidna kao razlika neprekidnih funkcija i vrijedi

$$g(0) + g(1) = (f(1) - f(0)) + (f(2) - f(1)) = f(2) - f(0) = 0.$$

Ako je $g(0) = 0$, tada je $x = 0$ rješenje problema. U suprotnom su $g(0)$ i $g(1)$ različitog predznaka. Tada po teoremu o međuvrijednosti postoji $x \in [0, 1]$ takav da je $g(x) = 0$ pa za taj x vrijedi $f(x) = f(x+1)$.