

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit - 3. rok - 24. kolovoza 2026.

- Dozvoljeno je koristiti samo pribor za pisanje i brisanje. Dozvoljeno je pozvati se na sljedeće limese:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^p}{e^{ax}} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x^p} = 0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0, \quad p, a > 0.$$

Zadatak 1. (ukupno 25 bodova)

- (a) (15 bodova) Zadana je funkcija formulom

$$f(x) = \arcsin(x^2 - 2x).$$

Odredite prirodnu domenu $\mathcal{D}_f$ i sliku $f(\mathcal{D}_f)$. Je li f injekcija? Ako nije, odredite najveći interval $I \subseteq \mathcal{D}_f$ koji sadrži točku 2 takav da je $f|_I$ injekcija te odredite $f|_I^{-1}$.

- (b) (10 bodova) Postoji li funkcija $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ koja nije periodična, ali takva da je $g \circ g$ periodična?

Rješenje.

- (a) Zapišimo $f = g_2 \circ g_1$, gdje je

$$g_1(x) = x^2 - 2x = (x - 1)^2 - 1, \quad g_2(u) = \arcsin u.$$

Domena. Kako je $\mathcal{D}(\arcsin) = [-1, 1]$, vrijedi $x \in \mathcal{D}_f$ ako i samo ako je

$$-1 \leq (x - 1)^2 - 1 \leq 1.$$

Lijeva nejednakost vrijedi za svaki $x \in \mathbb{R}$ jer je $(x - 1)^2 \geq 0$. Desna nejednakost daje

$$(x - 1)^2 \leq 2 \iff |x - 1| \leq \sqrt{2} \iff x \in [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}].$$

Dakle $\mathcal{D}_f = [1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}]$.

Slika. Funkcija g_1 je strogo padajuća na $[1 - \sqrt{2}, 1]$ i strogo rastuća na $[1, 1 + \sqrt{2}]$, s minimumom $g_1(1) = -1$ i rubnim vrijednostima $g_1(1 \pm \sqrt{2}) = 1$, pa je $g_1(\mathcal{D}_f) = [-1, 1]$. Budući da je $\arcsin$ strogo rastuća bijekcija s $[-1, 1]$ na $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, slijedi

$$f(\mathcal{D}_f) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

Injektivnost. Funkcija f nije injekcija. Naime, graf od g_1 simetričan je obzirom na pravac $x = 1$, tj. za svaki $x \in \mathcal{D}_f$ vrijedi

$$f(2 - x) = \arcsin((1 - x)^2 - 1) = \arcsin((x - 1)^2 - 1) = f(x),$$

a $2 - x \in \mathcal{D}_f$. Primjerice, $f(0) = f(2) = 0$.

Interval I . Na intervalu $[1, 1 + \sqrt{2}]$ je g_1 strogo rastuća, a g_2 strogo rastuća, pa je $f|_{[1, 1 + \sqrt{2}]}$ strogo rastuća, dakle injekcija. Taj interval sadrži točku 2 (jer je $1 + \sqrt{2} > 2$). Pokažimo da je najveći takav.

Neka je $I \subseteq \mathcal{D}_f$ interval koji sadrži 2 i neki $x < 1$. Stavimo $\delta := \min\{1 - x, 1\} > 0$. Tada je $1 - \delta \geq x$ i $1 + \delta \leq 2$, pa su obje točke $1 - \delta$ i $1 + \delta$ u intervalu $[x, 2] \subseteq I$. Zbog $f(1 - \delta) = f(1 + \delta)$ i $1 - \delta \neq 1 + \delta$ funkcija $f|_I$ nije injekcija. Dakle

$$I = [1, 1 + \sqrt{2}].$$

Inverz. Promotrimo restrikcije komponentnih funkcija

$$\begin{aligned} g_1|_I : [1, 1 + \sqrt{2}] &\rightarrow [-1, 1], & g_1(x) &= (x - 1)^2 - 1, \\ g_2 : [-1, 1] &\rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right], & g_2(u) &= \arcsin u. \end{aligned}$$

Objekt su bijekcije: $g_1|_I$ je strogo rastuća i $g_1(I) = [-1, 1]$ (vidi gore), a g_2 je bijekcija po definiciji funkcije arcsin. Stoga je $f|_I = g_2 \circ g_1|_I$ bijekcija kao kompozicija bijekcija te vrijedi

$$f|_I^{-1} = (g_2 \circ g_1|_I)^{-1} = (g_1|_I)^{-1} \circ g_2^{-1}.$$

Računamo inverze pojedinih komponenti. Inverz funkcije g_2 je

$$g_2^{-1} : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1], \quad g_2^{-1}(y) = \sin y.$$

Za inverz od $g_1|_I$ rješavamo $u = (x - 1)^2 - 1$ po $x \in [1, 1 + \sqrt{2}]$:

$$(x - 1)^2 = u + 1 \iff |x - 1| = \sqrt{u + 1} \iff x = 1 + \sqrt{u + 1},$$

pri čemu smo u posljednjoj ekvivalenciji koristili $x \geq 1$, tj. $|x - 1| = x - 1$. Dakle

$$(g_1|_I)^{-1} : [-1, 1] \rightarrow [1, 1 + \sqrt{2}], \quad (g_1|_I)^{-1}(u) = 1 + \sqrt{u + 1}.$$

Konačno,

$$f|_I^{-1}(y) = (g_1|_I)^{-1}(g_2^{-1}(y)) = 1 + \sqrt{1 + \sin y}, \quad y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right].$$

(b) Postoji. Jedan primjer takve funkcije je:

$$g(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}.$$

Tada za svaki $x \geq 0$ vrijedi $g(g(x)) = g(1) = 1$, dok za $x < 0$ vrijedi $g(g(x)) = g(0) = 1$ pa zaključujemo da je $g \circ g(x) = 1$ za sve $x \in \mathbb{R}$ pa je periodična s obzirom na svaki period. S druge strane, funkcija g očito nije periodična jer kad bi $\tau > 0$ bio period, moralo bi vrijediti $0 = g(-\tau) = g(-\tau + \tau) = g(0) = 1$, što je očito kontradikcija.

Alternativno rješenje. Može se provjeriti da funkcija

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & x = 1, \\ 0, & \text{inače,} \end{cases}$$

također zadovoljava uvjete zadatka.

Zadatak 2. (ukupno 25 bodova)

(a) (10 bodova) Izračunajte limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{\ln n}.$$

(b) (15 bodova) Odredite sva gomilišta niza (x_n) zadanog s

$$x_n = \sqrt[n]{3^n + \cos(n\pi)2^n}.$$

Rješenje.

(a) Označimo

$$a_n = \sum_{k=1}^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{k}}\right), \quad b_n = \ln n.$$

Niz (b_n) strogo je rastući i neograničen, pa rješenje tražimo preko Cesaro-Stolzova teorema.

Računamo

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{b_n - b_{n-1}} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}}{\ln \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{\frac{1}{n}}{\ln \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}}{\frac{1}{n}} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{\frac{1}{n-1}}{\ln \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)} \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Stoga, prema Cesaro–Stolzovu teoremu,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n \left(1 - \cos \frac{1}{\sqrt{k}}\right)}{\ln n} = \frac{1}{2}.$$

(b) Uočimo da je

$$\cos(n\pi) = 1,$$

za parne n i

$$\cos(n\pi) = -1,$$

za neparne n .

Sada je

$$x_{2n} = \sqrt[2n]{3^{2n} + 2^{2n}}.$$

No, vrijedi da je

$$3 = \sqrt[2n]{3^{2n}} \leq \sqrt[2n]{3^{2n} + 2^{2n}} \leq \sqrt[2n]{3^{2n} + 3^{2n}} = \sqrt[2n]{2 \cdot 3^{2n}} = 3 \cdot \sqrt[2n]{2} \longrightarrow 3$$

Dakle, po teoremu o sendviču, ovaj limes je 3, pa je to jedno gomilište danog niza. Analogno, za neparan n gledamo limes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[2n+1]{3^{2n+1} - 2^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \sqrt[2n+1]{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot \exp \left(\ln \left(1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{2n+1}\right) \cdot \frac{1}{2n+1} \right) = 3.$$

Dakle, još jedno gomilište niza je 3. Kada bi niz imao još neko gomilište c , tada bi imao podniz (x_{p_n}) koji bi konvergirao prema njemu. No, tada bi taj podniz imao ili beskonačno mnogo članova s parnim n , a konačno s neparnim n ili beskonačno mnogo s neparnim n , a konačno s parnim n ili beskonačno i s parnim i s neparnim n . Dakle, u svakom slučaju je opet $c = 3$.

Slijedi da je jedino moguće gomilište 3.

Zadatak 3. (ukupno 25 bodova)

(a) (20 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{(2n+1)(2^m-1)}{n \cdot 2^m} - \frac{k}{k+1} : n, m, k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Ima li skup S minimum, odnosno maksimum?

(b) (5 bodova) Postoji li beskonačan skup $A \subset \mathbb{R}$ takav da svaki njegov neprazan podskup ima maksimum?

Rješenje.

(a) Uočimo da je $S = A \cdot B + C$, gdje je

$$A = \left\{ 2 + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad B = \left\{ 1 - \frac{1}{2^m} : m \in \mathbb{N} \right\}, \quad C = \left\{ -\frac{k}{k+1} : k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Skup A . Niz $a_n = 2 + \frac{1}{n}$ strogo je padajuć, pa je $\sup A = \max A = a_1 = 3$. Nadalje, $a_n > 2$ za svaki $n \in \mathbb{N}$, a za svaki $\varepsilon > 0$ postoji $n \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} < \varepsilon$, tj. $a_n < 2 + \varepsilon$. Dakle $\inf A = 2$ i taj se infimum ne postiže.

Skup B . Niz $b_m = 1 - \frac{1}{2^m}$ strogo je rastuć, pa je $\inf B = \min B = b_1 = \frac{1}{2}$. Kako je $b_m < 1$ za svaki m i $\lim_{m \rightarrow \infty} b_m = 1$, slijedi $\sup B = 1$ i taj se supremum ne postiže.

Skup C . Niz $c_k = -\frac{k}{k+1} = -1 + \frac{1}{k+1}$ strogo je padajuć, pa je $\sup C = \max C = c_1 = -\frac{1}{2}$. Kako je $c_k > -1$ za svaki k i $\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = -1$, slijedi $\inf C = -1$ i taj se infimum ne postiže.

Skup $A \cdot B$. Vrijedi $A \subseteq \langle 2, 3 \rangle$ i $B \subseteq [\frac{1}{2}, 1)$, dakle $A, B \subseteq \langle 0, +\infty \rangle$, pa možemo primijeniti formule za produkt skupova pozitivnih brojeva:

$$\sup(A \cdot B) = \sup A \cdot \sup B = 3 \cdot 1 = 3, \quad \inf(A \cdot B) = \inf A \cdot \inf B = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1.$$

Konačno. Iz formula za sumu skupova slijedi

$$\sup S = \sup(A \cdot B) + \sup C = 3 - \frac{1}{2} = \frac{5}{2}, \quad \inf S = \inf(A \cdot B) + \inf C = 1 - 1 = 0.$$

Minimum i maksimum. Nijedan se ne postiže. Naime, za sve $n, m, k \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) < 3 \cdot 1 = 3 \quad \text{ i } \quad -\frac{k}{k+1} \leq -\frac{1}{2},$$

pa je svaki element od S strogo manji od $\frac{5}{2}$, tj. $\frac{5}{2} \notin S$ i S nema maksimum. Slično, za sve $n, m, k \in \mathbb{N}$ je

$$\left(2 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{2^m}\right) > 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 > \frac{k}{k+1},$$

pa je svaki element od S strogo veći od 0, tj. $0 \notin S$ i S nema minimum.

(b) Postoji. Primjer takvog skupa je skup $A = -\mathbb{N} = \{-k : k \in \mathbb{N}\}$. Naime, za bilo koji neprazan podskup $B \subset A$ vrijedi da je $-B \subset \mathbb{N}$. S predavanja znamo da tada skup $-B$ ima minimum m jer svaki podskup prirodnih brojeva ima najmanji element. Odatle slijedi da je $-m$ maksimum skupa B .

Zadatak 4. (*ukupno 25 bodova*)

(a) (*15 bodova*) Odredite postoji li limes i, ako postoji, izračunajte ga:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos x}{x^2}.$$

(b) (*10 bodova*) Neka je $f : [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Dokažite da postoji $c \in [0, 1]$ takav da vrijedi

$$f(c+1) - f(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

Rješenje.

(a) Vrijedi

$$\frac{e^{\sin^2 x} - \cos x}{x^2} = \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x^2} + \frac{1 - \cos x}{x^2}.$$

Za prvi član imamo

$$\frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x^2} = \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{\sin^2 x} \cdot \frac{\sin^2 x}{x^2}.$$

Kako je $\sin^2 x \rightarrow 0$ kada $x \rightarrow 0$, iz poznatih limesa

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1 \quad \text{i} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

slijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - 1}{x^2} = 1.$$

Nadalje,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2(x/2)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(x/2)}{x/2} \right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Konačno,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\sin^2 x} - \cos x}{x^2} = \frac{3}{2}.$$

(b) Definirajmo funkciju

$$g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x+1) - f(x).$$

Budući da je f neprekidna, funkcija g je neprekidna na $[0, 1]$.

Vrijedi

$$g(0) = f(1) - f(0)$$

i

$$g(1) = f(2) - f(1).$$

Prema tome,

$$\frac{g(0) + g(1)}{2} = \frac{f(1) - f(0) + f(2) - f(1)}{2} = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$

Broj

$$\frac{g(0) + g(1)}{2}$$

nalazi se između $g(0)$ i $g(1)$. Budući da je g neprekidna, prema teoremu o međuvrijednosti postoji $c \in [0, 1]$ takav da

$$g(c) = \frac{g(0) + g(1)}{2}.$$

Stoga

$$f(c+1) - f(c) = \frac{f(2) - f(0)}{2}.$$