MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2023.

Zadatak 1.

(a) (4 boda) Niz (a_n) zadan je rekurzivno s

$$a_1 = \frac{1}{5}, \quad a_2 = \frac{21}{25}, \quad 5a_{n+1} = a_n a_{n-1} + 4 \quad (\forall n \geq 2).$$

Ispitajte je li niz konvergentan. Ako jest, odredite mu limes.

(b) (2 boda) Konstruirajte primjer niza čiji je skup gomilišta $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Rješenje.

(a) Pretpostavimo kako je niz konvergentan. Ako s L označimo pripadni limes, nužan uvjet na L je

$$5L = L^2 + 4,$$

pa je nužno $L = 1$ ili $L = 4$. Pokažimo da je niz ograničen odozgo s 1 te da je rastući.

Za dokaz prve tvrdnje, koristimo matematičku indukciju. Za $n = 1$ i $n = 2$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo kako tvrdnja vrijedi za sve $k \leq n$ te ju dokažimo za $n + 1$. Kako je po pretpostavci $a_n < 1$ i $a_{n-1} < 1$, vrijedi da $5a_{n+1} < 5$, odnosno $a_{n+1} < 1$. Po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki n.

Pokažimo sada da je rastući. Dokaz opet provodimo koristeći indukciju. Lako se direktno provjeri da vrijedi $a_1 \leq a_2$ te $a_2 \leq a_3$. Pretpostavimo da za neki prirodni broj $n \geq 2$ vrijedi $a_n \geq a_{n-1} \geq a_{n-2}$. Tada je

$$a_{n+1} = \frac{1}{5} a_n a_{n-1} + \frac{4}{5} \geq \frac{1}{5} a_{n-1} a_{n-2} + \frac{4}{5} = a_n,$$

pa je niz rastući.

Prema dovoljnim uvjetima za konvergenciju niza, zaključujemo kako je (a_n) konvergentan. Koristeći činjenicu da je (a_n) ograničen odozgo s 1, nužni uvjeti na limes impliciraju da je $\lim_n a_n = 1$.

(b) Postoji mnogo načina kako konstruirati traženi niz, a jedna od mogućnosti je sljedeća. Neka je (p_n) strogo rastući niz prostih brojeva. Ideja je u potencije prostog broja p_n *spremiti* konstantan podniz $a_{p_n^m} = m$. Dakle, ako promatramo niz

$$a_k = \begin{cases} m & , \quad k = p_n^m \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases},$$

njegov skup gomilišta je $\mathbb{N} \cup \{0\}$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2023.

Zadatak 2.

(a) (4 boda) Odredite limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{3^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k}$$

(b) (3 boda) Neka je $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}$ ograničen niz, takav da za sve $n \geq 2$ vrijedi

$$x_n \leq \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}.$$

Dokažite da je niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergentan.

Rješenje.

(a) Označimo li $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{3^k}{k}$ i $b_n := \frac{3^n}{n}$, potrebno je odrediti $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Ideja nam je primijeniti Cesaro - Stolzov teorem pa dokažimo da je niz b_n rastuć i da $b_n \to \infty$ za $n \to \infty$. Uvjet $b_n \leq b_{n+1}$ ekvivalentan je s:

$$\frac{3^n}{n} \leq \frac{3^{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \leq 3n.$$

Dodatno, pokazali smo na vježbama da $\frac{3^n}{n} \to \infty$ za $n \to \infty$. Kako su uvjeti Cesaro - Stolzovog teorema zadovoljeni, ako limes u nastavku postoji, tada i traženi limes postoji i jednaki su :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{3^{n+1}}{n+1}}{\frac{3^{n+1}}{n+1} - \frac{3^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} = \frac{3}{2}.$$

Dakle, po Cesaro -Stolzovom teoremu limes je jednak $\frac{3}{2}$.

(b) Dokazat ćemo da je niz padajuć. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $m \in \mathbf{N}$ takav da je $x_m < x_{m+1}$. Označimo $\delta := x_{m+1} - x_m > 0$. Uvjet je ekvivalentan s $x_{n+1} - x_n \geq x_n - x_{n-1}$. Odatle i iz pretpostavke teleskopiranjem slijedi:

$$x_{m+n} - x_m = \sum_{k=1}^{n} (x_{m+k} - x_{m+k-1}) \geq n\delta.$$

Puštanjem $n \to \infty$ slijedi da niz nije ograničen, što je kontradikcija sa pretpostavkom. Dakle, niz je padajuć i ograničen pa ima limes.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2023.

Zadatak 3. (6 bodova)

Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{1}{(-1)^n 2n + 1} \cdot \frac{15}{m+2} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

ako postoje.

Rješenje. Uočimo da je $S = A \cdot B$ gdje je $B = \left\{ \frac{15}{m+2} : m \in \mathbb{N} \right\}$ slika padajućeg niza, a

$$A = \left\{ \frac{1}{(-1)^n 2n + 1} : n \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{1 - 2n} : n \text{ neparan} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{2n + 1} : n \text{ paran} \right\} \subseteq [-1, \frac{1}{5}]$$

Sada je $\sup A = \frac{1}{5}$, $\inf A = -1$, $\sup B = 5$, $\inf B = 0$,
pa je $\sup S = 1$, $\inf S = -5$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2023.

Zadatak 4.

(a) (4 boda) Izračunajte limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{1-\operatorname{ch} x}\cos(x)}{\operatorname{sh}(e^{x^2}-1)}$$

(b) (2 boda) Neka je $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija takva da za sve $x \in [0,1]$ vrijedi $f(x) = f(x^2)$. Dokažite da je f konstantna.

Rješenje.

(a) Koristimo limese izvedene na vježbama: $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$, $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{ch} t-1}{t^2} = \frac{1}{2}$ i $\lim_{t\to 0} \frac{\operatorname{sh}(t)}{t} = 1$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1 - e^{1-\operatorname{ch} x}\cos(x)}{\operatorname{sh}(e^{x^2}-1)} &= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{\operatorname{sh}(e^{x^2}-1)} + \cos(x)\frac{1-e^{1-\operatorname{ch} x}}{\operatorname{sh}(e^{x^2}-1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}\frac{x^2}{e^{x^2}-1}\frac{e^{x^2}-1}{\operatorname{sh}(e^{x^2}-1)} + \cos(x)\frac{1-e^{1-\operatorname{ch} x}}{1-\operatorname{ch} x}\frac{1-\operatorname{ch} x}{x^2}\frac{x^2}{e^{x^2}-1}\frac{e^{x^2}-1}{\operatorname{sh}(e^{x^2}-1)} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1 + 1\cdot(-1)\cdot(-\frac{1}{2})\cdot 1\cdot 1 = 1.
\end{aligned}$$

(b) Neka je $x \in (0,1)$ proizvoljan. Višestrukom primjenom uvjeta zaključujemo da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$f(x) = f(x^2) = f(x^4) = \cdots = f(x^{2^n}).$$

Međutim, zbog toga što $x^{2^n} \to 0$ za $n \to \infty$, zbog neprekidnosti funkcije f u 0 vrijedi:

$$f(0) = f(\lim_{n\to\infty} x^{2^n}) = \lim_{n\to\infty} f(x^{2^n}) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x).$$

Dakle $f(x) = f(0)$ za sve $x \in [0,1)$. Međutim, sada po neprekidnosti u 1 vrijedi

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} f(0) = f(0).$$

Dakle, funkcija je konstantna.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2023.

Zadatak 1.

(a) (4 boda) Niz (a_n) zadan je rekurzivno s

$$a_1 = \frac{1}{4}, \quad a_2 = \frac{13}{16}, \quad 4a_{n+1} = a_n a_{n-1} + 3 \quad (\forall n \geq 2).$$

Ispitajte je li niz konvergentan. Ako jest, odredite mu limes.

(b) (2 boda) Konstruirajte primjer niza čiji je skup gomilišta $2\mathbb{N} \cup \{0\}$.

Rješenje.

(a) Pretpostavimo kako je niz konvergentan. Ako s L označimo pripadni limes, nužan uvjet na L je

$$4L = L^2 + 3,$$

pa je nužno $L = 1$ ili $L = 3$. Pokažimo da je niz ograničen odozgo s 1 te da je rastući.

Za dokaz prve tvrdnje, koristimo matematičku indukciju. Za $n = 1$ i $n = 2$ tvrdnja očito vrijedi. Pretpostavimo kako tvrdnja vrijedi za sve $k \leq n$ te ju dokažimo za $n + 1$. Kako je po pretpostavci $a_n < 1$ i $a_{n-1} < 1$, vrijedi da $4a_{n+1} < 4$, odnosno $a_{n+1} < 1$. Po principu matematičke indukcije, tvrdnja vrijedi za svaki n.

Pokažimo sada da je rastući. Dokaz opet provodimo koristeći indukciju. Lako se direktno provjeri da vrijedi $a_1 \leq a_2$ te $a_2 \leq a_3$. Pretpostavimo da za neki prirodni broj $n \geq 2$ vrijedi $a_n \geq a_{n-1} \geq a_{n-2}$. Tada je

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n a_{n-1} + \frac{3}{4} \geq \frac{1}{4}a_{n-1}a_{n-2} + \frac{3}{4} = a_n,$$

pa je niz rastući.

Prema dovoljnim uvjetima za konvergenciju niza, zaključujemo kako je (a_n) konvergentan. Koristeći činjenicu da je (a_n) ograničen odozgo s 1, nužni uvjeti na limes impliciraju da je $\lim_n a_n = 1$.

(b) Postoji mnogo načina kako konstruirati traženi niz, a jedna od mogućnosti je sljedeća. Neka je (p_n) strogo rastući niz prostih brojeva. Ideja je u potencije prostog broja p_n *spremiti* konstantan podniz $a_{p_n^m} = 2m$. Dakle, ako promatramo niz

$$a_k = \begin{cases} 2m & , \quad k = p_n^m \\ 0 & , \quad \text{inače} \end{cases},$$

njegov skup gomilišta je $2\mathbb{N} \cup \{0\}$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2023.

Zadatak 2.

(a) (4 boda) Odredite limes

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{4^n} \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k}{k}$$

(b) (3 boda) Neka je $(x_n)_{n\in\mathbf{N}} \in \mathbf{R}$ ograničen niz, takav da za sve $n \geq 2$ vrijedi

$$x_n \geq \frac{x_{n-1} + x_{n+1}}{2}.$$

Dokažite da je niz $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ konvergentan.

Rješenje.

(a) Označimo li $a_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{4^k}{k}$ i $b_n := \frac{4^n}{n}$, potrebno je odrediti $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$. Ideja nam je primijeniti Cesaro - Stolzov teorem pa dokažimo da je niz b_n rastuć i da $b_n \to \infty$ za $n \to \infty$. Uvjet $b_n \leq b_{n+1}$ ekvivalentan je s:

$$\frac{4^n}{n} \leq \frac{4^{n+1}}{n+1} \Leftrightarrow n+1 \leq 4n.$$

Dodatno, pokazali smo na vježbama da $\frac{4^n}{n} \to \infty$ za $n \to \infty$. Kako su uvjeti Cesaro - Stolzovog teorema zadovoljeni, ako limes u nastavku postoji, tada i traženi limes postoji i jednaki su :

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1} - a_n}{b_{n+1}} \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{4^{n+1}}{n+1}}{\frac{4^{n+1}}{n+1} - \frac{4^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} = \frac{4}{3}.$$

Dakle, po Cesaro -Stolzovom teoremu limes je jednak $\frac{4}{3}$.

(b) Dokazat ćemo da je niz rastuć. Pretpostavimo suprotno, tj. da postoji $m \in \mathbf{N}$ takav da je $x_m > x_{m+1}$. Označimo $\delta := x_m - x_{m+1} > 0$. Uvjet je ekvivalentan s $x_{n+1} - x_n \leq x_n - x_{n-1}$. Odatle i iz pretpostavke teleskopiranjem slijedi:

$$x_{m+n} - x_m = \sum_{k=1}^{n} (x_{m+k} - x_{m+k-1}) \leq -n\delta.$$

Puštanjem $n \to \infty$ slijedi da niz nije ograničen, što je kontradikcija sa pretpostavkom. Dakle, niz je padajuć i ograničen pa ima limes.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2023.

Zadatak 3. (6 bodova) Odredite infimum i supremum skupa

$$S = \left\{ \frac{1}{(-1)^m 3m - 5} \cdot \frac{16}{n+1} : n, m \in \mathbb{N} \right\}$$

ako postoje.

Rješenje. Uočimo da je $S = A \cdot B$ gdje je $B = \left\{ \frac{16}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$ slika padajućeg niza, a

$$A = \left\{ \frac{1}{(-1)^m 3m - 5} : m \in \mathbb{N} \right\} = \left\{ \frac{1}{-5 - 3m} : m \text{ neparan} \right\} \cup \left\{ \frac{1}{3m - 5} : m \text{ paran} \right\} \subseteq [\frac{-1}{8}, 1]$$

Sada je $\sup A = 1$ $\inf A = -\frac{1}{8}$, $\sup B = 8$, $\inf B = 0$,
pa je $\sup S = 8$, $\inf S = -1$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Drugi kolokvij – 31. siječnja 2023.

Zadatak 4.

(a) (4 boda) Izračunajte limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{1-\cos x}\,\mathrm{ch}(x) - 1}{\sin(e^{x^2} - 1)}$$

(b) (2 boda) Neka je $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ neprekidna funkcija takva da za sve $x \in [0,1]$ vrijedi $f(x) = f(x^3)$. Dokažite da je f konstantna.

Rješenje.

(a) Koristimo limese izvedene na vježbama: $\lim_{t\to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$, $\lim_{t\to 0} \frac{1-\cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$, $\lim_{t\to 0} \frac{\mathrm{ch}\, t - 1}{t^2} = \frac{1}{2}$ i $\lim_{t\to 0} \frac{\sin(t)}{t} = 1$.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0} \frac{e^{1-\cos x}\,\mathrm{ch}(x) - 1}{\sin(e^{x^2} - 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{\sin(e^{x^2} - 1)} + \mathrm{ch}(x) \frac{e^{1-\cos x} - 1}{\sin(e^{x^2} - 1)} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{ch}(x) - 1}{x^2} \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin(e^{x^2} - 1)} + \mathrm{ch}(x) \frac{e^{1-\cos x} - 1}{1 - \cos x} \frac{1 - \cos x}{x^2} \frac{x^2}{e^{x^2} - 1} \frac{e^{x^2} - 1}{\sin(e^{x^2} - 1)} \\
&= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = 1
\end{aligned}$$

(b) Neka je $x \in (0,1)$ proizvoljan. Višestrukom primjenom uvjeta zaključujemo da za svaki $n \in \mathbf{N}$ vrijedi

$$f(x) = f(x^3) = f(x^9) = \cdots = f(x^{3^n}).$$

Međutim, zbog toga što $x^{3^n} \to 0$ za $n \to \infty$, zbog neprekidnosti funkcije f u 0 vrijedi:

$$f(0) = f(\lim_{n\to\infty} x^{3^n}) = \lim_{n\to\infty} f(x^{3^n}) = \lim_{n\to\infty} f(x) = f(x).$$

Dakle $f(x) = f(0)$ za sve $x \in [0,1)$. Međutim, sada po neprekidnosti u 1 vrijedi

$$f(1) = \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} f(0) = f(0).$$

Dakle, funkcija je konstantna.