MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 29. siječnja 2024.

Zadatak 1. (24 boda) Neka je dan niz

$$c_1 = 6, \quad c_{n+1} = \frac{7c_n - 10}{c_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ispitajte konvergira li niz (c_n) i ako da, odredite mu limes.

Rješenje. Pretpostavimo da niz konvergira i označimo limes sa L. Vrijedi

$$\begin{aligned} &L = \frac{7L - 10}{L} \\ &L^2 - 7L + 10 = 0 \\ &(L-2)(L-5) = 0 \end{aligned}$$

Dakle $L = 2$ ili 5.

Pokažimo indukcijom da je niz omeđen odozdo s 5. Za $n = 1$ imamo $c_1 = 6 > 5$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Pretpostavimo $c_n > 5$. Imamo

$$c_{n+1} = \frac{7c_n - 10}{c_n} = 7 - \frac{10}{c_n} > 5.$$

Pokažimo indukcijom da je niz padajući.

$$\begin{aligned} c_{n+1} \le c_n &\iff \frac{7c_n - 10}{c_n} \ge c_n \\ &\iff c_n^2 - 7c_n + 10 \ge 0 \\ &\iff (c_n - 2)(c_n - 5) \ge 0. \end{aligned}$$

Dakle niz je konvergentan i limes mu je 5.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 29. siječnja 2024.

Zadatak 2.

(a) (8 bodova) Neka je $f : X \to Y$ funkcija, te $S \subseteq X$ i $T \subseteq Y$. Dokažite

$$S \cap f^{-1}(T) \subseteq f^{-1}(f(S) \cap T).$$

(b) (16 bodova) Neka je $f : (a - \varepsilon,\ b + \varepsilon) \to \mathbb{R}$ neprekidna funkcija u svim točkama (gdje je $\varepsilon > 0$ unaprijed zadan) te neka vrijedi $f(a) < f(b)$. Dokažite da postoje $c, d \in [a, b]$ takvi da $f(c) = f(a)$, $f(d) = f(b)$ te da

$$c < x < d \implies f(c) < f(x) < f(d).$$

Rješenje.

(a) Neka je $x \in S \cap f^{-1}(T)$. To implicira da $x \in S$ i $x \in f^{-1}(T)$. Dakle, postoji neki $y \in T$ takav da $y = f(x)$. Kako je $x \in S$, zaključujemo $y \in f(S)$. Stoga vrijedi $y \in f(S) \cap T$, pa je $x \in f^{-1}(f(S) \cap T)$.

(b) Promotrimo skup

$$A := \{x \in [a, b] : f(x) \leq f(a)\}.$$

Uočimo da je $A \neq \emptyset$ jer je $a \in A$ te da je b gornja ograda za taj skup. Označimo $c := \sup A$. Zbog neprekidnosti funkcije f u točki c, možemo zaključiti da je $f(c) = f(a)$. Naime, kada bismo imali $f(c) > f(a)$, postojao bi $\delta > 0$ takav da

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \implies f(x) > f(a).$$

S druge strane, iz definicije supremuma, imamo da postoji $y \in A$ takav da

$$c - \frac{\delta}{2} < y.$$

Međutim, to je sada kontradikcija jer za takav y imamo da $f(y) \leq f(a)$ (jer je $y \in A$), a s druge strane prema prethodnoj implikaciji imamo da $f(y) > f(a)$. Slično, kada bismo imali $f(c) < f(a)$, iz neprekidnosti bismo imali da postoji $\delta > 0$ takav da

$$x \in (c - \delta, c + \delta) \implies f(x) < f(a).$$

Sada, ako uzmemo $y = c + \delta/2$, tada je $f(y) < f(a)$, što implicira da je $y \in A$. To je kontradikcija s činjenicom da je $c = \sup A$. Dakle, mora vrijediti $f(c) = f(a)$. Analognom analizom skupa

$$B := \{x \in [a, b] : f(x) \geq f(a)\}$$

možemo zaključiti da za $d := \inf(B)$ vrijedi $f(d) = f(b)$. Sada, ako uzmemo $c < x < d$, imamo da $x \notin A$ te $x \notin B$, pa zaključujemo $f(c) < f(x) < f(d)$.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 29. siječnja 2024.

Zadatak 3. Zadana je funkcija $f(x) = 2\sin(x) + \cos(2x)$

(a) (8 bodova) Odredite $f([0, \frac{7\pi}{6}])$.

(b) (8 bodova) Odredite najveći interval I koji sadrži točku $x = \pi$ na kojem je funkcija f injekcija.

(c) (8 bodova) Odredite $(f|_I)^{-1}$.

Rješenje.

(a) Primijetimo da je $f(x) = 1 - 2\sin^2(x) + 2\sin(x)$ pa možemo pisati $f = g \circ h$, gdje je $h(x) = \sin(x)$ i $g(x) = -2x^2 + 2x + 1$. Funkcija $g(x)$ postiže maksimum u točki $\frac{1}{2}$ i jednak je $\frac{3}{2}$. Kako je g monotona na $[0, \frac{1}{2}]$

$$g\left(h\left(\left[0, \frac{7\pi}{6}\right]\right)\right) = g\left(\left[-\frac{1}{2}, 1\right]\right) = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

(b) Najveći interval koji sadrži π na kojem je h injekcija je $[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]$ i vrijedi $h\left([\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}]\right) = [-1, 1]$, ali funkcija g je injekcija na $(-\infty, \frac{1}{2}]$ i na $[\frac{1}{2}, \infty)$. Točka $h(\pi) = 0$ nalazi se u prvom od ta dva intervala pa je najveći interval na kojem je f injekcija jednak $h^{-1}([-\infty, \frac{1}{2}]) \cap [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] = [\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$.

(c) Kako je $f([\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]) = [-3, \frac{3}{2}]$, vrijedi $(f|_I) : [-3, \frac{3}{2}] \to [\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]$. Računamo:

$$(g|_{[-1,\frac{1}{2}]})^{-1}(y) = \frac{1 - \sqrt{3 - 2y}}{2} \quad \text{i} \quad (h|_{[\frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}]})^{-1}(y) = \pi - \arcsin(x)$$

pa vrijedi:

$$f^{-1} = \pi - \arcsin\left(\frac{1 - \sqrt{3 - 2y}}{2}\right)$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 29. siječnja 2024.

Zadatak 4.

(a) (16 bodova) Odredite

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x}(e^{\frac{\sin(x)}{x}} - 1)$$

(b) (8 bodova)Neka je $\alpha > 0$ i $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija takva da za sve $x \in \mathbb{R}$ vrijedi $|f(x) - x| \leq |x|^{1+\alpha}$. Dokažite da postoji sljedeći limes i odredite ga

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{f(x)} - 1}{x}.$$

(c) (4 boda) Nađite primjer **neprekidne** funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ koja zadovoljava $|f(x) - x| \leq |x|$ za sve $x \in \mathbb{R}$, ali za koju limes iz prethodnog podzadatka ne postoji.

Rješenje.

(a) Vrijedi $0 \leq |\frac{\sin(x)}{x}| \leq \frac{1}{|x|}$ pa po teoremu o sendviču $\frac{\sin x}{x} \to 0$. Prema tome, izraz je jednak

$$\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \frac{e^{\frac{\sin x}{x}} - 1}{\frac{\sin x}{x}}.$$

Po teoremu o sendviču vrijedi $\frac{\sin(x)}{\sqrt{x}} \to 0$, pa koristeći limes $\frac{e^t-1}{t} = 1$ i teorem o limesu produkta zaključujemo da je traženi limes jednak $0 \cdot 1 = 0$.

(b) Po uvjetu zadatka iz nejednakosti trokuta zaključujemo:

$$0 \leq |f(x)| \leq |f(x) - x| + |x| \leq |x|^{1+\alpha} + |x|$$

pa iz teorema o sendviču slijedi $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$. Koristeći $\lim_{t\to 0} \frac{e^t-1}{t} = 1$ slijedi

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{f(x)} - 1}{f(x)} = \lim_{x\to 0} \ln 2 \frac{e^{f(x)\ln 2} - 1}{f(x)\ln 2} = \ln 2.$$

Prema tome, da pokažemo da limes postoji, po propoziciji o limesu produkta, dovoljno je dokazati da postoji limes

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x},$$

ali po uvjetu vrijedi

$$0 \leq \left| \frac{f(x)}{x} - 1 \right| \leq |x|^{\alpha}$$

pa koristeći teorem o sendviču zaključujemo da je traženi limes jednak jedan. Konačno, zaključujemo da je traženi limes jednak

$$\lim_{x\to 0} \frac{2^{f(x)} - 1}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2^{f(x)} - 1}{f(x)} \cdot \frac{f(x)}{x} = \ln 2$$

(c) Uvjet zadatka ekvivalentan je s:

$$\left|\frac{f(x)}{x}-1\right|\leq 1$$

pa je dovoljno odabrati da izraz unutar apsolutne vrijednosti bude omeđena funkcija koja je neprekidna na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ i koja nema limes u 0. U točki 0 stavit ćemo bilo što. Definiramo na primjer

$$f(x)=\begin{cases}2x, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}.$$

Funkcija je neprekidna na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ jer su konstantna i linearna funkcija neprekidne, dok iz

$$0\leq |f(x)|\leq 2|x|$$

i teorema o sendviču slijedi neprekidnost u 0. Tražena nejednakost u zadatku također očito slijedi iz definicije funkcije:

$$|2x-x|\leq |x| \quad \text{i} \quad |0-x|\leq |x|.$$

S druge strane, izraz

$$\frac{f(x)}{x}=\begin{cases}2, & x\geq 0\\ 0, & x<0\end{cases}$$

očito nema limes u 0 jer su limesi s lijeva i s desna različiti. Prema tome, kao u prethodnom dijelu vrijedi

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2^{f(x)}-1}{x}=2\ln 2\neq 0=\lim_{x\to 0^-}\frac{2^{f(x)}-1}{x}$$

Napomena. Ukoliko želimo pokazati da ne postoje čak ni jednostrani limesi, definiramo

$$f(x):=\begin{cases}x+x\sin\left(\frac{1}{x}\right), & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}.$$

Tada je f neprekidna na $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ zbog toga što je kompozicija neprekidnih funkcija. Za neprekidnost točki 0 za $x\neq 0$ računamo:

$$|f(x)-f(0)|=|x+x\sin(\frac{1}{x})|\leq 2|x|$$

pa po teoremu o sendviču vrijedi da je funkcija neprekidna u 0. S druge strane, izraz

$$\frac{f(x)}{x}=1+\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

nema limes budući da za nizove $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2n\pi}$ i $y_n=\frac{1}{\frac{3\pi}{2}+2n\pi}$ koji konvergiraju u 0 s pozitivne strane vrijedi

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x}=1+\sin(\frac{\pi}{2}+2n\pi)=\lim_{n\to\infty}2=2$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{x}=1+\sin(\frac{3\pi}{2}+2n\pi)=\lim_{n\to\infty}0=0$$