MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 30. kolovoza 2024.

Zadatak 1. (28 bodova)

(a) (20 bodova) Odredite prirodnu domenu i nultočke, intervale monotonosti, lokalne ekstreme, intervale konveksnosti i konkavnosti, točke infleksije, sve asimptote funkcije

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt[3]{x^3 - 4}}$$

te skicirajte njen graf.

(b) (8 bodova) Odredite površinu lika u trećem kvadrantu kojeg omeđuju graf funkcije f, njezina kosa ili horizontalna asimptota (ovisno o tome koja postoji) i pravac $x = -1$.

Rješenje.

(a)

(b) Asimptota je pravac $y = x$ pa računamo površinu lika kao

$$P = \frac{1}{2} - \int_{-1}^{0} f(x)dx.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 30. kolovoza 2024.

Zadatak 2. (22 boda) Promatramo funkciju $f : [0, +\infty\rangle \longrightarrow \mathbf{R}$ definiranu s

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1}, & x \geq 0, \\ a\cos^2(x) + b, & x < 0. \end{cases}$$

gdje su $a, b \in \mathbf{R}$.

(a) (10 bodova) Izračunajte $\int_0^1 f(x)\, dx$.

(b) (7 bodova) Postoje li realni parametri a i b takvi da je funkcija f klase $C^1(\mathbf{R})$?

(c) (5 bodova) Ispitajte konvergenciju nepravog integrala $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$.

Rješenje.

(a) Uvodimo supstituciju $t = \sqrt[6]{x}$.

(b) Kako je $f'(x) = \frac{-\sqrt{x}-3\sqrt[6]{x}+2}{6(\sqrt{x}+1)^2 x^{\frac{2}{3}}}$ i

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = +\infty,$$

slijedi da nije moguće dodefinirati funkciju $f'(x)$ tako da bude neprekidna u $x = 0$.

(c) Kako je

$$\frac{\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt{x}+1} \geq \frac{\sqrt[3]{x}}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x^{\frac{1}{6}}},$$

a $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^{\frac{1}{6}}}$ divergira, po usporednom kriteriju divergira i početni integral.

MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 30. kolovoza 2024.

Zadatak 3.

a) (12 bodova) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n^2 + n^4}{(-3)^n n + \ln n}$$

b) (12 bodova) Odredite sumu reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)2^{n+1}}{n!}$$

Rješenje. a) Označimo $a_n = \frac{2^n n^2 + n^4}{(-3)^n n + \ln n}$. Sada je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}(n+1)^2 + (n+1)^4}{2^n n^2 + n} \frac{(-3)^n n + \ln n}{(-3)^{n+1}(n+1) + \ln(n+1)}$$

$$= \frac{\frac{2^{n+1}(n+1)^2}{2^n n^2} + \frac{(n+1)^4}{2^n n^2}}{1 + \frac{n}{2^n n^2}} \left| \frac{\frac{(-3)^n n}{(-3)^{n+1}(n+1)} + \frac{\ln n}{(-3)^{n+1}(n+1)}}{1 + \frac{\ln(n+1)}{(-3)^{n+1}(n+1)}} \right| \overset{n\to\infty}{\to} \frac{2}{3} < 1.$$

Dani red konvergira.
Alternativno

$$|a_n|^{\frac{1}{n}} = \left|\frac{2^n n^2 + n^4}{(-3)^n n + \ln n}\right|^{\frac{1}{n}} = \left|\frac{2^n}{(-3)^n}\right|^{\frac{1}{n}} \left|\frac{n^2 + \frac{n^4}{2^n}}{n + \frac{\ln n}{(-3)^n}}\right|^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} \frac{\left|n^2 + \frac{n^4}{2^n}\right|^{\frac{1}{n}}}{\left|n + \frac{\ln n}{(-3)^n}\right|^{\frac{1}{n}}}.$$

Iz $\lim_n \frac{n^4}{2^n} = 0$, $\lim_n \frac{\ln n}{3^n} = 0$ i $\lim_n n^{\frac{1}{n}} = 1$ od nekog n_0 imamo

$$1 \leq \left|n^2 + \frac{n^4}{2^n}\right|^{\frac{1}{n}} \leq \left|2n^2\right|^{\frac{1}{n}} \leq \left|n^3\right|^{\frac{1}{n}} \leq \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^3 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1,$$

$$1 \leq \left|n + \frac{\ln n}{(-3)^n}\right|^{\frac{1}{n}} \leq |2n|^{\frac{1}{n}} \leq \left|n^2\right|^{\frac{1}{n}} \leq \left(n^{\frac{1}{n}}\right)^2 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Dakle $\lim_n |a_n|^{\frac{1}{n}} = \frac{2}{3} < 1$, pa dani red konvergira.

b) Imamo

$$x^2 e^x = \sum_{n\geq 0} \frac{x^{n+2}}{n!} \quad / \quad '$$

$$2xe^x + x^2 e^x = \sum_{n\geq 0} (n+2) \frac{x^{n+1}}{n!}$$

$$2xe^x + x^2 e^x = 2x + \sum_{n\geq 1} (n+2) \frac{x^{n+1}}{n!} \quad / \quad x = -2$$

$$4 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(n+2)2^{n+1}}{n!}$$

MATEMATIČKA ANALIZA 2

pismeni ispit – 30. kolovoza 2024.

Zadatak 4. (26 bodova) Razvijte funkciju u red potencija oko 0, odredite radijus konvergencije i ispitajte konvergenciju u rubovima

$$f(x) = \left(\frac{x}{4+x^2}\right)^2.$$

Rješenje. Oko 0

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n\geq 0} x^n \quad /' \implies \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n\geq 1} nx^{n-1} \implies \frac{1}{(1+x)^2} = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}nx^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)x^n$$

$$\begin{aligned} f(x) = \left(\frac{x}{4+x^2}\right)^2 &= \frac{x^2}{16}\frac{1}{(1+(\frac{x}{2})^2)^2} \\ &= \frac{x^2}{16}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2\right)^n = \frac{x^2}{16}\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)\frac{x^{2n}}{4^n} \\ &= \sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)\frac{x^{2n+2}}{4^{n+2}} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{R} = \lim_n \left|(-1)^n(n+1)\frac{1}{4^{n+2}}\right|^{\frac{1}{2n+2}} = \lim_n \left((n+1)^{\frac{1}{n+1}}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{4^{\frac{n+2}{2n+2}}} = \frac{1}{2}$$

Dakle $R = 2$.
Za $x = \pm 2$ imamo red

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^n(n+1)\frac{1}{4}$$

koji divergira jer opći član ne teži u 0.