

---

---

# MATEMATIČKA ANALIZA II

VJEŽBE

7. travnja 2026.

---

---



# Sadržaj

<b>1</b>	<b>Derivacija</b>	<b>5</b>
1.1	Derivacije elementarnih funkcija . . . . .	5
1.2	Derivacija inverznih i implicitno zadanih funkcija . . . . .	13
1.3	Derivacije višeg reda . . . . .	23
1.4	Tangenta i normala . . . . .	37
1.5	L'Hôpitalovo pravilo . . . . .	45
1.6	Proširenja po neprekidnosti / derivabilnosti . . . . .	55
1.7	Pad i rast. Ekstremi . . . . .	63
1.8	Asimptote. Konveksnost i konkavnost. Infleksija . . . . .	76
1.9	Ispitivanje toka funkcije . . . . .	82
<b>2</b>	<b>Integral</b>	<b>89</b>
2.1	Neodređeni i određeni integral . . . . .	89
2.1.1	Integralne sume . . . . .	92
2.2	Metoda supstitucije i metoda parcijalne integracije . . . . .	95
2.3	Integrali racionalnih funkcija . . . . .	103
2.4	Integrali iracionalnih funkcija . . . . .	107
2.5	Integrali trigonometrijskih i hiperbolnih funkcija . . . . .	112
2.6	Nepрави integrali . . . . .	116
2.7	Primjene određenih integrala . . . . .	127
2.7.1	Računanje površina . . . . .	127
2.7.2	Računanje volumena rotacijskih tijela . . . . .	127
2.7.3	Računanje oplošja rotacijskih tijela . . . . .	127

2.7.4	Računanje duljine luka krivulje . . . . .	127
<b>3</b>	<b>Red</b>	<b>129</b>
3.1	Osnovna svojstva . . . . .	129
3.2	Kriteriji konvergencije reda . . . . .	133
3.2.1	Leibnizov kriterij . . . . .	133
3.2.2	D'Alembertov kriterij . . . . .	134
3.2.3	Cauchyev kriterij . . . . .	136
3.3	Redovi potencija i Taylorovi redovi . . . . .	139

# 1 Derivacija

## 1.1 Derivacije elementarnih funkcija

Neka je  $f: I \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija,  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni interval i  $c \in I$ . Kažemo da je  $f$  **derivabilna** u  $c$  ako postoji limes

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

i taj limes označavamo s  $f'(c)$ . Još se koriste i oznake  $Df(c)$  i  $\frac{df}{dx}(c)$ . Primijetimo da je definicija također ekvivalentna s postojanjem limesa

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c+t) - f(c)}{t}.$$

**Zadatak 1.1.** Koristeći definiciju, odredite derivaciju funkcija:

(a)  $f(x) = \alpha = \text{const.}$

(c)  $f(x) = \frac{1}{x}$

(b)  $f(x) = x$

(d)  $f(x) = \cos x$

*Rješenje.* (a)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\alpha - \alpha}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} 0 = 0.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x - c}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} 1 = 1.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{-1}{xc} = -\frac{1}{c^2}.$$

(d) Koristimo limese dokazane na MA1:  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$  i  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$ .

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c+t) - f(c)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(c+t) - \cos(c)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(c)\cos(t) - \sin(c)\sin(t) - \cos(c)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left( \cos(c) \cdot \frac{\cos(t) - 1}{t} - \sin(c) \cdot \frac{\sin(t)}{t} \right) \\ &= -\sin c \end{aligned}$$

□

**Zadatak 1.2.** Nađite primjer funkcije koja je neprekidna, a nije derivabilna.

*Rješenje.* Primjer jedne takve funkcije je  $f(x) = |x|$ . Naime, u točki  $c = 0$  vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(0+t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1 \neq -1 = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(0+t) - f(0)}{t}$$

pa funkcija nije derivabilna u 0.

□

**Teorem 1.** Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  otvoren interval. Ako su funkcije  $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilne na  $I$  i  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ , tada su i funkcije  $\alpha f + \beta g$ ,  $f \cdot g$  derivabilne i vrijedi

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)'(c) &= \alpha f'(c) + \beta g'(c) \\ (f \cdot g)'(c) &= f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c). \end{aligned}$$

Ako je dodatno  $g'(c) \neq 0$ , tada je i funkcija  $\frac{f}{g}$  derivabilna u  $c$  i vrijedi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g^2(c)}$$

**Zadatak 1.3.** Derivirajte sljedeće funkcije:

(a)  $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

(f)  $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

(b)  $f(x) = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ,  $a^2 + b^2 \neq 0$

(g)  $f(x) = e^x \arcsin x$

(c)  $f(x) = 3\sqrt{x}$

(h)  $f(x) = \operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x$

(d)  $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$

(i)  $f(x) = 2^x \cdot x$

(e)  $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$

(j)  $f(x) = \arcsin x \cdot \operatorname{Arsh} x$

### Derivacija kompozicije funkcija

**Teorem 2.** Neka su  $I, J \subset \mathbb{R}$  otvoreni intervali i  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : J \rightarrow \mathbb{R}$  funkcije takve da je  $f(I) \subset J$ . Ako je  $f$  diferencijabilna u  $c$  i  $g$  diferencijabilna u  $d = f(c)$ , tada je  $g \circ f$  diferencijabilna u  $c$  i vrijedi

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

*Napomena.* Iz prethodnog teorema, matematičkom indukcijom se lako pokaže da vrijedi

$$(f_n \circ \dots \circ f_1)'(c) = f'_n(f_{n-1} \circ \dots \circ f_1(c)) \cdot f'_{n-1}(f_{n-2} \circ \dots \circ f_1(c)) \cdot \dots \cdot f'_1(c).$$

Dakle, postupak deriviranja kompozicije više funkcija "algoritamski" upamtiti kao: "deriviramo vanjsku funkciju, uvrstimo unutrašnju i nastavljamo postupak dok god postoji unutrašnja za derivirati."

**Zadatak 1.4.** Koristeći pravilo za derivaciju kompozicije funkcija (*chain rule*), derivirajte sljedeće funkcije:

(a)  $f(x) = \left(\frac{2x+3}{5}\right)^8$

(i)  $f(x) = \left(\frac{1+2x^{20}}{1-2x^{20}}\right)^{100}$

(b)  $f(x) = e^{\sin^2 x}$

(j)  $f(x) = \ln \ln(3 - 2x^2)$

(c)  $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$

(k)  $f(x) = \arccos e^{x^2}$

(d)  $f(x) = \sqrt{1 + \arcsin x}$

(l)  $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$

(e)  $f(x) = \sqrt{xe^x + x^2}$

(f)  $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$

(m)  $f(x) = \ln(\sqrt{1 + e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1 + e^x} + 1)$

(g)  $f(x) = \frac{1}{5x^2}$

(n)  $f(x) = \ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$

(h)  $f(x) = \log \sin x$

*Rješenje.* (a) Zapišemo  $f = g \circ h$ , gdje je

$$g(x) = x^8, \quad h(x) = \frac{2x+3}{5}$$

pa vrijedi

$$g'(x) = 8x^7, \quad h'(x) = \frac{2}{5}.$$

Dakle

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 8\left(\frac{2x+3}{5}\right)^7 \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5}\left(\frac{2x+3}{5}\right)^7$$

(b) Funkciju možemo zapisati kao  $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$ , gdje su

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = e^x$$

pa vrijedi

$$f_1'(x) = \cos x, \quad f_2'(x) = 2x, \quad f_3'(x) = e^x.$$

Dakle,

$$f'(x) = f_3'(f_2(f_1(x))) \cdot f_2'(f_1(x)) \cdot f_1'(x) = e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$(c) f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}$$

$$(d) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1+\arcsin x)}}$$

$$(e) f'(x) = \frac{(x+1)e^x + 1}{2\sqrt{(x+1)e^x}}$$

$$(f) f'(x) = \frac{2e^x - 2^x \ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} + \frac{5 \ln^4 x}{x}$$

$$(g) f'(x) = -2x^5 e^{-2x} \ln 5$$

$$(h) f'(x) = \frac{\tan x}{\ln 10}$$

$$(i) f'(x) = 100 \left( \frac{1+2x^{20}}{1-2x^{20}} \right)^{99} \cdot \frac{80x^{19}}{(1-2x^{20})^2}$$

$$(j) f'(x) = \frac{-4x}{(3-2x^2) \ln(3-2x^2)}$$

$$(k) f'(x) = \frac{-2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$$

$$(l) f'(x) = \frac{x-1}{x^2 \sqrt{2x^2-2x+1}}$$

□

**Zadatak 1.5.** Derivirajte sljedeće funkcije:

$$(a) f(x) = x^x, \text{ za } x > 0$$

$$(e) f(x) = x^{x^x}, \text{ za } x > 0$$

$$(b) f(x) = (\sin x)^{\cos x}, \text{ za } \sin x > 0$$

$$(f) f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$(c) f(x) = x^3 e^{x^2} \sin 2x$$

$$(g) f(x) = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$$

$$(d) f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \text{ za } x > 0$$

*Rješenje.* (a) Zapišimo funkciju u obliku baze  $e$ :

$$f(x) = e^{x \ln x}$$

Deriviramo kao kompoziciju funkcija (lančano pravilo):

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'$$

Primijenimo pravilo produkta na eksponent i vratimo početni oblik  $e^{x \ln x} = x^x$ :

$$f'(x) = x^x \cdot \left( 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

(b) Zapišimo funkciju u obliku baze  $e$ :

$$f(x) = e^{\cos x \ln(\sin x)}$$

Deriviramo kompoziciju:

$$f'(x) = e^{\cos x \ln(\sin x)} \cdot (\cos x \ln(\sin x))'$$

Primjenjujemo pravilo produkta i vraćamo početni oblik:

$$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left( -\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right)$$

$$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left( \frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln(\sin x) \right)$$

(c) Ova funkcija je umnožak triju funkcija, pa možemo direktno primijeniti generalizirano pravilo produkta  $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$ :

$$f'(x) = (x^3)'e^{x^2} \sin(2x) + x^3(e^{x^2})' \sin(2x) + x^3 e^{x^2} (\sin(2x))'$$

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^2} \sin(2x) + x^3 (e^{x^2} \cdot 2x) \sin(2x) + x^3 e^{x^2} (\cos(2x) \cdot 2)$$

Izlučimo zajednički faktor  $x^2 e^{x^2}$ :

$$f'(x) = x^2 e^{x^2} (3 \sin(2x) + 2x^2 \sin(2x) + 2x \cos(2x))$$

(d) Zapišimo u obliku baze  $e$ :

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

Deriviramo kompoziciju:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left( \frac{1}{x} \ln x \right)'$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \left( -\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \left( \frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

(e) Zapišimo u obliku baze  $e$ :

$$f(x) = e^{x^x \ln x}$$

Deriviramo kompoziciju:

$$f'(x) = e^{x^x \ln x} \cdot (x^x \ln x)'$$

Za derivaciju od  $x^x$  koristimo već dobiveni rezultat iz podzadatka (a):  $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$ .

$$f'(x) = x^{x^x} ((x^x)' \cdot \ln x + x^x \cdot (\ln x)')$$

$$f'(x) = x^{x^x} \left( x^x(\ln x + 1) \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = x^{x^x} (x^x \ln x(\ln x + 1) + x^{x-1})$$

(f) Zapišimo u obliku baze  $e$ :

$$f(x) = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

Deriviramo kompoziciju:

$$f'(x) = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} \cdot \left( x \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right)'$$

$$f'(x) = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \left( 1 \cdot \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \right)$$

Sredimo izraz u zagradi:

$$f'(x) = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) + x \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \left( -\frac{1}{x^2} \right) \right)$$

$$f'(x) = \left( 1 + \frac{1}{x} \right)^x \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right)$$

(g) Ovaj zadatak može se riješiti koristeći pravilo produkta i kvocijenta. Međutim, budući da je izraz na prirodnoj domeni pozitivan, iskoristit ćemo tzv. "logaritamsko deriviranje", tj. logaritmirat ćemo obje strane da produkt pređe u zbroj i zatim derivirati zbroj.

Logaritmiranjem obje strane slijedi

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \ln \left( \frac{(x+1)^3 (x-2)^{\frac{1}{4}}}{(x-3)^{\frac{2}{5}}} \right) \\ &= 3 \ln(x+1) + \frac{1}{4} \ln(x-2) - \frac{2}{5} \ln(x-3) \end{aligned}$$

Deriviranjem obje strane dobijemo:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}$$

Konačno, slijedi

$$f'(x) = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}} \left( \frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} \right)$$

□

*Napomena.* U gornjim rješenjima koristili smo zapis u kojem izraz za funkciju napišemo u zagradi i samo crticu izvan zagrade za oznaku derivacije, podrazumijevajući da tražimo derivaciju navedene funkcije ovisne u  $x$  u točki  $x$ . Na primjer, pisali smo

$$(x \ln x)' = \ln x + 1.$$

Taj zapis matematički nije korektan budući da iz njega nije jasno niti po kojoj varijabli deriviramo niti u kojoj točki izvrjednjavamo derivaciju, ali korist ćemo ga radi sažetosti zapisa kada nema mogućnosti zabune.

Objasnimo primjerom u čemu je problem. Neka je  $a \in \mathbb{R}$  realan broj, neka je  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija definirana s  $f(x) = a \cdot x \ln x$  i zanima nas formula za funkciju  $g(x) := f'(x^2)$ . Treba biti oprezan s gornjim zapisom budući da to nije isto što i  $(a \cdot x^2 \ln x^2)'$  niti je korektno pisati  $(a \cdot x \ln x)'(x^2)$  budući da iz toga nije jasno deriviramo li po varijabli  $x$  ili po  $a$  i ne možemo koristiti isti zapis za varijablu po kojoj deriviramo i fiksni broj koji uvrštavamo.

Ukoliko ne želimo uvoditi poseban naziv za funkciju  $x \mapsto a \cdot x \ln x$ , potrebno je uvesti “privremenu varijablu” (engl. dummy variable) i koristiti neku od sljedećih notacija

$$\left. \frac{d}{dt}(a \cdot t \ln t) \right|_{t=x^2} \quad \text{ili} \quad [D_t(a \cdot t \ln t)](x^2).$$

## Zadaci za vježbu

**1.6.** Derivirajte sljedeće funkcije:

(a)  $f(x) = \arcsin \frac{1}{x^2}$

(b)  $f(x) = \sqrt{e^{10x}}$

(c)  $f(x) = \left( \frac{\arcsin x}{\arccos x} \right)^5$

(d)  $f(x) = \sin((\sin x)^{\sin x})$ , za  $\sin x > 0$

(e)  $f(x) = \underbrace{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{\cdots x \sqrt{x}}}}}_{n \text{ korijena}}$

$$(f) f(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left( \operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$(g) f(x) = (x^{x^x})^{x^x}, \text{ za } x > 0$$

$$(h) f(x) = (\sin x - 1)^{\cos x + 1} + (\sin x + 1)^{1 - \cos x}$$

$$(i) f(x) = \sqrt{\ln \cos \arcsin x}$$

**1.7.** Derivirajte sljedeće funkcije:

$$(a) f(x) = e^{\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}}$$

$$(b) f(x) = \ln (2 + e^{-x} + \sqrt{e^x + e^{-x} + 4})$$

$$(c) f(x) = (\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x}$$

$$(d) f(x) = x \sin^2 3x \cos^3 \frac{x}{2}$$

$$(e) f(x) = \ln \frac{x + \cos \sqrt{\pi x}}{x - \cos \sqrt{\pi x}} + \frac{1}{3} \arcsin \ln 2x$$

**1.8.** Za koji  $a \in \mathbb{R}$  funkcija  $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x - x \ln x}$  zadovoljava jednakost

$$2x^2 f'(x) - x^2 f(x)^2 = a?$$

**1.9.** Pokažite da funkcija  $f(x) = \frac{1}{1 + x + \ln x}$  zadovoljava jednakost

$$x f'(x) = f(x)(f(x) \ln x - 1).$$

## 1.2 Derivacija inverznih i implicitno zadanih funkcija

**Teorem 3.** Neka je  $I \subset \mathbb{R}$  otvoren interval i  $f : I \rightarrow J$  neprekidna bijekcija. Ako  $f$  ima derivaciju u točki  $c \in I$  i ako je  $f'(c) \neq 0$ , tada je  $f^{-1}$  diferencijabilna u točki  $d = f^{-1}(c)$  i vrijedi

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}.$$

*Napomena.* Ukoliko vjerujemo da teorem vrijedi, formulu derivacije možemo vrlo brzo izvesti na sljedeći način.

Po definiciji inverzne funkcije za sve  $y \in J$  vrijedi

$$f \circ f^{-1}(y) = y.$$

Deriviranjem obje strane po  $y$  i korištenjem pravila za derivaciju kompozicije slijedi

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1,$$

iz čega sređivanjem slijedi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

**Zadatak 1.10.** Koristeći pravilo o deriviranju inverzne funkcije, nađite derivaciju funkcija:

(a)  $f(x) = \arcsin x$

(c)  $f(x) = \ln x$

(b)  $f(x) = \operatorname{arctg} x$

(d)  $f(x) = \operatorname{Arsh} x$

*Rješenje.* (a) Vidimo da je  $f(x) = g^{-1}(x)$ , gdje je  $g(x) = \sin x$ . Prema pravilu o deriviranju inverzne funkcije slijedi:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos g^{-1}(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Iz trigonometrijskog identiteta  $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$  slijedi  $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$  (uzimamo pozitivni korijen jer je kodomena funkcije  $\arcsin$  interval  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$  gdje je kosinus nenegativan) pa dobivamo

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(b) Primijenimo pravilo:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 f(x)}} = \cos^2 f(x).$$

Izrazimo  $\cos^2 y$  preko  $x$ . Znamo da je  $\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = \operatorname{tg}^2 y + 1$ . Iz toga slijedi:

$$\cos^2 f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(c) Primijenimo pravilo:

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{x}.$$

(d) Primijenimo pravilo:

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} f(x)}$$

Iz osnovnog hiperbolnog identiteta  $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$  slijedi  $\operatorname{ch} y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}$  (uzimamo pozitivni korijen jer je  $\operatorname{ch} y > 0$  za svaki realni broj). Supstitucijom  $\operatorname{sh} y = x$  dobivamo:

$$\operatorname{ch} \operatorname{Arsh} x = \sqrt{1 + x^2}$$

Konačno rješenje je:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

□

**Zadatak 1.11.** Zadana je funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x + e^x$ . Pokažite da je  $f$  injekcija i izračunajte  $(f^{-1})'(2 + \ln 2)$ .

*Rješenje.* Da bismo pokazali da je funkcija injekcija, dovoljno je pokazati da je strogo monotona na cijeloj svojoj domeni. To možemo provjeriti pomoću prve derivacije. Deriviramo zadanu funkciju  $f(x) = x + e^x$ :

$$f'(x) = 1 + e^x$$

Znamo da je eksponencijalna funkcija  $e^x$  strogo pozitivna na domeni pa za sve  $x \in \mathbb{R}$  slijedi

$$f'(x) = 1 + e^x > 1 > 0.$$

Budući da je prva derivacija strogo pozitivna na cijeloj domeni, po teoremu s predavanja (posljedica Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti), funkcija  $f$  je strogo rastuća pa je injekcija. Dakle,  $f^{-1}$  postoji.

Pravilo za derivaciju inverzne funkcije u točki  $y_0$  glasi:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

gdje je  $f(x_0) = y_0$ . Zadano nam je  $y_0 = 2 + \ln 2$ . Moramo pronaći odgovarajući  $x_0$  rješavanjem jednadžbe:

$$x_0 + e^{x_0} = 2 + \ln 2$$

Ovu jednadžbu možemo jednostavno riješiti opservacijom (metodom pokušaja i pogreške za očite vrijednosti). Znamo da vrijedi  $e^{\ln 2} = 2$ . Ako pretpostavimo da je  $x_0 = \ln 2$ , i uvrstimo u lijevu stranu, dobivamo:

$$\ln 2 + e^{\ln 2} = \ln 2 + 2 = 2 + \ln 2$$

Kako je funkcija  $f$  injekcija, ovo je jedinstveno rješenje, pa je naš  $x_0 = \ln 2$ .

Dakle,

$$f'(\ln 2) = 1 + e^{\ln 2} = 3$$

pa koristeći pravilo o deriviranju inverzne funkcije slijedi

$$(f^{-1})'(2 + \ln 2) = \frac{1}{f'(\ln 2)} = \frac{1}{3}.$$

□

### Derivacije implicitno zadanih funkcija

Razjasnimo najprije što je “implicitno zadana funkcija”. Prisjetimo se, za  $I \subset \mathbb{R}$ , graf funkcije  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  podskup je Kartezijevog produkta, tj.

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in I\}.$$

Međutim, već i najosnovnije krivulje koje susrećemo, kao što je kružnica, nisu tog oblika. Naime, jedinična kružnica  $S^1$  je skup točaka

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Navedeni skup nije moguće prikazati kao graf funkcije budući da za jedan  $x \in (-1, 1)$  postoje dvije vrijednosti  $y$  koje zadovoljavaju uvjet zadatka, pa krivulja ne zadovoljava tzv. vertikalni test.

U slučaju kružnice možemo cijeli skup iskazati kao uniju grafa dviju funkcija  $f_{1,2} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$  i  $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$ . Slično tako, skup možemo prikazati i kao uniju dvaju grafova funkcija  $x$  po  $y$ , tj.  $g_{1,2} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$   $g_1(y) = \sqrt{1 - y^2}$ ,  $g_2(y) = -\sqrt{1 - y^2}$ .

Međutim, za malo kompliciranije izraze nije uvijek moguće jednu varijablu eksplicitno iskazati po drugoj, ali željeli bismo i dalje moći računati derivacije tako zadanih krivulja.

Općenito, ukoliko je zadana funkcija dvije varijable,  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , želimo proučavati skupove oblika

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}. \quad (1.1)$$

Kružnica je primjer takvog skupa uz  $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ .

Za iskaz osnovnog rezultata trebamo napraviti malu digresiju i uvesti pojam parcijalne derivacije.

Parcijalnu derivaciju po prvoj varijabli u točki  $(c_x, c_y)$  definiramo kao derivaciju funkcije po  $x$ , uz uvjet da je  $y$  konstantno jednak  $c_y$ , tj.

$$\partial_1 F(c_x, c_y) := \left. \frac{d}{dt} F(t, c_y) \right|_{t=c_x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(c_x + t, c_y) - F(c_x, c_y)}{t}.$$

Analogno tome definiramo parcijalnu derivaciju po  $y$ :

$$\partial_2 F(c_x, c_y) := \left. \frac{d}{dt} F(c_x, t) \right|_{t=c_y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(c_x, c_y + t) - F(c_x, c_y)}{t}.$$

U slučaju da koristimo  $x$  i  $y$  za varijable, možemo pisati  $\partial_x F$  umjesto  $\partial_1 F$  i  $\partial_y F$  umjesto  $\partial_2 F$

Na primjer, za  $F(x, y) = x^2 + 10xy + y^2$  vrijedi

$$\partial_1 F(x, y) = 2x + 10y \quad \text{i} \quad \partial_2 F(x, y) = 10x + 2y.$$

Sljedeći teorem, koji će biti dokazan na drugoj godini, kaže da je uz minimalne uvjete moguće zaključiti da se skup  $S$  oblika (1.1) na okolini točke može zapisati kao funkcija jedne varijable po drugoj.

Navodimo specijalan slučaj teorema o implicitnoj funkciji. Značenje pojma da je  $F$  klase  $C^1$  ne možemo definirati u ovom trenutku, ali funkcije u zadacima zadovoljavat će to svojstvo.

**Teorem 4** (Teorem o implicitnoj funkciji). *Neka su  $I, J \subset \mathbb{R}$  otvoreni intervali i neka je  $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$  funkcija klase  $C^1$ . Ako u točki  $(x_0, y_0) \in I \times J$  vrijedi  $F(x_0, y_0) = 0$  i  $\partial_2 F(x_0, y_0) \neq 0$ , tada postoje otvoreni intervali  $I' \subset I$ ,  $J' \subset J$ , takvi da je  $x_0 \in I'$  i jedinstvena funkcija  $f : I' \rightarrow J'$  takva da vrijedi  $f(x_0) = y_0$  i vrijedi*

$$\{(x, y) \in I' \times J' : F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in I'\}.$$

Dodatno, vrijedi  $f \in C^1(I')$  i derivacija zadovoljava

$$f'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, f(x))}{\partial_2 F(x, f(x))}.$$

U prijevodu, na okolini točke  $(x_0, y_0)$  skup  $S$  može se prikazati kao graf funkcije  $y$  u ovisnosti o  $x$ . Analogno, ako je  $\partial_1 F(x_0, y_0) \neq 0$ , tada postoje intervali kao u iskazu teorema i jedinstvena funkcija  $g : J' \rightarrow I'$  klase  $C^1(J')$  takva da je  $g(y_0) = x_0$  i vrijedi

$$\{(x, y) \in I' \times J' : F(x, y) = 0\} = \{(g(y), y) : y \in J'\}.$$

Dodatno,  $g \in C^1(J')$  i derivacija zadovoljava

$$g'(y) = -\frac{\partial_2 F(g(y), y)}{\partial_1 F(g(y), y)}.$$

Pokažimo korištenje prethodnog rezultata na primjerima.

**Važno!** Zadaci u nastavku riješeni su detaljno radi potpunosti. Međutim, za polaganje ovog kolegija dovoljno je razumjeti samo tehniku deriviranja funkcije i nije potrebno provjeravati uvjete teorema o implicitnoj funkciji.

**Zadatak 1.12.** Funkcija  $y = y(x)$  zadovoljava jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Izračunajte

(a)  $y'(0)$

(b)  $y'(3)$ , ako je  $y(3) < 0$

*Rješenje.* Zadatak ćemo riješiti na dva načina.

Neka je

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 25.$$

Provjeru uvjeta  $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$  izostavljamo.

Računamo:

$$\partial_2 F(x, y) = \partial_y F(x, y) = \partial_y(x^2 + y^2) = 2y.$$

Odredimo točke koje se traže u zadatku:

- (a) Za  $x = 0$  vrijedi  $0^2 + y^2 = 25 \implies y = \pm 5$ . Promatramo točke  $(0, 5)$  i  $(0, -5)$ . U obje točke je  $\partial_y F(0, \pm 5) = \pm 10 \neq 0$ .

Kako su uvjeti teorema o implicitnoj funkciji ispunjeni i u točki  $(0, 5)$  i  $(0, -5)$ , postoje intervali  $I' \ni 0$ ,  $J' \ni 5$  (odnosno  $J' \ni -5$ ) i jedinstvena funkcija  $f : I' \rightarrow J'$  takva da je  $f(0) = 5$  (odnosno  $f(0) = -5$ ), takva da je  $x^2 + f(x)^2 = 25$ . Međutim, kako je  $y = y(x)$  jedna takva funkcija, vrijedi  $y = f$ . Po teoremu je  $f$  derivabilna u 0 pa je i  $y$  derivabilna u 0.

- (b) Za  $x = 3$  vrijedi  $3^2 + y^2 = 25 \implies y^2 = 16$ . Zbog uvjeta  $y(3) < 0$ , primjenjujemo teorem na točku  $(3, -4)$ . U njoj je  $\partial_y F(3, -4) = -8 \neq 0$ .

Kako su uvjeti teorema o implicitnoj funkciji ispunjeni u točki  $(3, -4)$ , postoje intervali  $I' \ni 3$ ,  $J' \ni -4$  i jedinstvena funkcija  $f : I' \rightarrow J'$  takva da je  $f(3) = -4$  i da vrijedi  $x^2 + f(x)^2 = 25$ . Međutim, kako je  $y$  jedna takva funkcija, vrijedi  $y = f$ . Po teoremu je  $f$  derivabilna u 3 pa je i  $y$  derivabilna u 3.

Računamo sad derivacije.

*1. način.* Korištenjem formule iz teorema

Izračunajmo parcijalnu derivaciju po  $x$ :

$$\partial_x F(x, y) = 2x$$

Prema teoremu, derivacija implicitno zadane funkcije je:

$$y'(x) = -\frac{\partial_x F(x, y)}{\partial_y F(x, y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

(a) Za  $x = 0$  i  $y = \pm 5$  dobivamo:

$$y'(0) = -\frac{0}{\pm 5} = 0$$

(b) Za točku  $(3, -4)$  dobivamo:

$$y'(3) = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

2. način. Implicitnim deriviranjem jednadžbe

Derivirajmo jednadžbu  $x^2 + y^2 = 25$  po varijabli  $x$ , tretirajući  $y$  kao složenu funkciju ovisnu o  $x$ :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\ 2x + 2y \cdot y' &= 0 \end{aligned}$$

Izrazimo  $y'$ :

$$2yy' = -2x \implies y' = -\frac{x}{y}$$

Dobili smo identičan izraz za derivaciju. Računanjem dobivamo iste vrijednosti:

(a) Uvrstimo  $x = 0$ :  $2(0) + 2y \cdot y' = 0 \implies 2y \cdot y' = 0$ . Kako je  $y = \pm 5 \neq 0$ , slijedi  $y'(0) = 0$ .

(b) Uvrstimo  $x = 3, y = -4$ :  $2(3) + 2(-4)y' = 0 \implies 8y' = 6 \implies y'(3) = \frac{3}{4}$ .

*Napomena.* U nastavku ćemo koristiti drugi način iz prethodnog zadatka budući da je direktniji i u izračunu ne zahtijeva pojam parcijalne derivacije prilikom računanja. Međutim, treba imati na umu da zbog toga što uvjet teorema ne mora uvijek biti zadovoljen, moguće je dobiti naizgled iznenađujuć rezultat primjenom drugog načina, bez provjere uvjeta. Naime, pokušamo li odrediti derivaciju  $y'(x)$  u točki  $x = 5$ , zbog toga što je  $\partial_y F(5, 0) = 0$ , tada bismo na drugi način dobili:

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot y'(5) = 0 \implies 10 = 0.$$

To, naravno, nije pogreška u teoremu, već smo pokušali primijeniti teorem u točki u kojoj uvjeti nisu zadovoljeni, odnosno derivacija  $y'(5)$  ne postoji. Promotrimo li graf kružnice, vidimo da ne možemo definirati funkciju  $y(x)$  desno od točke  $x = 5$ . Raspisom po definiciji možemo se uvjeriti da ne postoji niti lijeva derivacija. Naime

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\sqrt{25 - x^2} - 0}{x - 5} = |t = 5 - x| = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{25 - (5 - t)^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{10t - t^2}}{t} = -\infty.$$

□

**Zadatak 1.13.** Funkcija  $y = y(x)$  zadovoljava

$$2y = x^2 + \sin y.$$

Izračunajte  $y'(x)$  u točkama  $x \in \mathbb{R}$  u kojima derivacija postoji.

*Rješenje.* Svedimo zadanu jednadžbu na oblik  $F(x, y) = 0$ :

$$F(x, y) = x^2 + \sin(y) - 2y = 0$$

Ključni uvjeti teorema su  $F(x_0, y_0) = 0$  i  $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$ . Izračunajmo najprije parcijalnu derivaciju:

$$\partial_y(x^2 + \sin(y) - 2y) = \cos(y) - 2 \leq -1 < 0.$$

Dakle, u svakoj točki  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  za koju vrijedi  $F(x_0, y_0) = 0$  vrijedi i  $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$  pa postoje intervali  $I' \ni x_0$ ,  $J' \ni y_0$  i jedinstvena funkcija  $f: I' \rightarrow J'$  takva da je  $f(x_0) = y_0$  i vrijedi

$$\{(x, y) \in I' \times J' : F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in I'\}.$$

Kako je  $f$  jedinstvena funkcija, a  $y$  je jedna takva funkcija, vrijedi  $y = f$ . Nadalje,  $f$  je derivabilna u  $x_0$  pa je i  $y$  derivabilna u  $x_0$ . Izračunajmo derivaciju te funkcije u okolini točke  $x_0 \in \mathbb{R}$ .

Deriviramo obje strane zadane jednadžbe  $2y = x^2 + \sin(y)$  po varijabli  $x$ . Pritom tretiramo  $y$  kao funkciju ovisnu o  $x$  ( $y = y(x)$ ):

$$\frac{d}{dx}(2y) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin(y)),$$

što je ekvivalentno s:

$$2 \cdot y' = 2x + \cos(y) \cdot y',$$

odnosno

$$y' = \frac{2x}{2 - \cos(y)}.$$

Konačno, preostaje provjeriti uvjet  $F(x_0, y_0) = 0$ , tj. preostaje odrediti za koje sve  $x_0 \in \mathbb{R}$  postoji  $y_0 \in \mathbb{R}$  takav da je  $F(x_0, y_0) = 0$ .

Neka je  $x_0 \in \mathbb{R}$  fiksna, ali proizvoljna. Kako je funkcija  $y \mapsto F(x_0, y)$  strogo padajuća (njezina derivacija jednaka je  $\partial_y F(x_0, y) < 0$ ), i vrijedi

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} (\sin y - 2y) = \mp\infty,$$

slijedi da je funkcija  $y \mapsto F(x_0, y)$  bijekcija s  $\mathbb{R}$  na  $\mathbb{R}$ . Dakle, za svaki  $x_0 \in \mathbb{R}$  postoji jedinstveni  $y_0 \in \mathbb{R}$  takav da je  $F(x_0, y_0) = 0$  pa je  $y(x_0) = y_0$  i funkcija  $y = y(x)$  je derivabilna u svakoj točki  $x \in \mathbb{R}$ .

*Napomena.* Primijetimo da smo u ovom rješenju koristili  $y$  kao oznaku za drugu koordinatu točaka u  $\mathbb{R}^2$  i kao oznaku za funkciju čijim je grafom opisan skup nultočaka funkcije  $F$ . Strogo gledajući, to nije matematički ispravan zapis. Međutim, ako samo trebamo izračunati derivaciju funkcije “ $y$  po  $x$ ”, često ne želimo uvoditi novu oznaku pa je ovakav zapis standardan u literaturi.  $\square$

**Zadatak 1.14.** Pretpostavimo da funkcija  $y = y(x)$  zadovoljava

$$x^3 + 4x^2y + y^3 - 1 = 0.$$

Izračunajte  $y'(0)$ .

*Rješenje.* Odredimo vrijednost od  $y$  u toj točki gdje je  $x = 0$ . Uvrstimo  $x = 0$  u početnu jednadžbu:

$$\begin{aligned} 0^3 + 4(0)^2y + y^3 - 1 &= 0 \\ y^3 - 1 = 0 &\implies y = 1 \end{aligned}$$

Tražena vrijednost derivacije računa se u točki  $(0, 1)$ .

Da se uvjerimo da derivacija postoji, izračunajmo  $\partial_y F(0, 1)$ .

$$\partial_y(x^3 + 4x^2y + y^3 - 1) = 4x^2 + 3y^2.$$

Dakle,

$$\partial_y F(0, 1) = 3 \neq 0$$

pa derivacija funkcije postoji po teoremu o implicitnoj funkciji.

Izračunajmo traženu derivaciju. Deriviramo obje strane jednadžbe po varijabli  $x$ . Pritom  $y$  tretiramo kao funkciju ovisnu o  $x$ , stoga za član  $4x^2y$  koristimo pravilo produkta, a za  $y^3$  lančano pravilo:

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 4x^2y + y^3 - 1) = \frac{d}{dx}(0)$$

implicira

$$3x^2 + (8x \cdot y + 4x^2 \cdot y') + 3y^2 \cdot y' = 0.$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  slijedi

$$y'(0) = 0.$$

□

**Zadatak 1.15.** Neka je  $y = y(x)$  funkcija koja zadovoljava

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Dokažite da je  $y$  derivabilna u svim točkama za koje je  $x \neq y(x)$  i da u tim točkama vrijedi sljedeća jednakost

$$y'(x - y) = x + y.$$

*Rješenje.* Pretpostavimo da je funkcija  $y = y(x)$  derivabilna u nekoj točki  $x_0$  za koju vrijedi  $x_0 \neq y(x_0)$ . Deriviranjem lijeve strane slijedi:

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y' \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}.$$

Računamo derivaciju desne strane:

$$\left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)' = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2}.$$

Izjednačavanjem dobivenih izraza slijedi tvrdnja.

Preostaje provjeriti da je funkcija  $y = y(x)$  doista derivabilna u svim točkama koje zadovoljavaju  $y(x) \neq x$ .

Definirajmo funkciju  $F$  (koristimo privremene varijable jer smo s  $y$  već označili funkciju od  $x$ ):

$$F(x_1, y_1) = \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1} - \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + y_1^2).$$

Primijetimo da je

$$\partial_2 F(x_1, y_1) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{x_1} - \frac{1}{2(x_1^2 + y_1^2)} \cdot 2y_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x_1 - y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Neka je  $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$  točka takva da je  $F(x_0, y_0) = 0$  i  $x_0 \neq y_0$ . Tada iz gornjeg računa slijedi  $\partial_2 F(x_0, y_0) \neq 0$ , pa po Teoremu o implicitnoj funkciji postoji interval oko  $x_0$  i jedinstvena funkcija  $f$  definirana na tom intervalu takva da je  $F(x, f(x)) = 0$ . Kako je  $y$  jedna takva funkcija, vrijedi  $y = f$ . Funkcija  $f$  je derivabilna u  $x_0$  po teoremu, pa je stoga i  $y$  derivabilna.

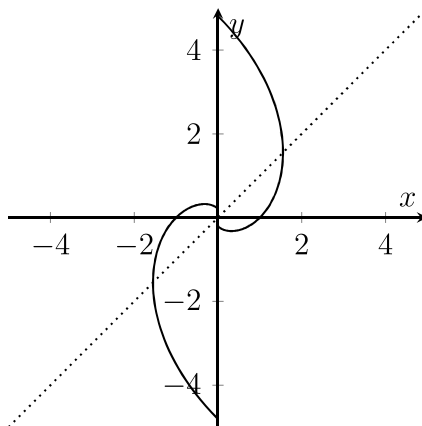
Skup točaka

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\}$$

može se parametrizirati u polarnim koordinatama  $x = r \cos \phi$ ,  $y = r \sin \phi$  pomoću

$$r(\phi) = \begin{cases} e^\phi, & \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ e^{\phi-\pi}, & \phi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

i on izgleda ovako:



Graf funkcije  $y = y(x)$  u zadatku podskup je tog skupa i vidimo da u točkama za koje vrijedi  $x = y$  ne može postojati derivacija jer je tangenta okomita.  $\square$

## Zadaci za vježbu

**1.16.** Ako je  $x \ln y - y \ln x = 1$ , izračunajte  $y'(1)$ .

**1.17.** Ako je  $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 1$ , izračunajte  $y'$ .

**1.18.** Izračunajte  $y'(0)$  ako je funkcija  $y = y(x)$  implicitno zadana jednačbom

(a)

$$\ln y + \frac{x}{y} = 1.$$

(b)

$$x^3 y^5 + \sin x \cdot y^4 + \cos x \cdot y^3 + \operatorname{ch} x \cdot y^2 + y - 3e^x = 0.$$

**1.19.** Izračunajte derivaciju funkcije  $y(x)$  implicitno zadane

(a) jednačbom  $ye^y = e^{x+1}$ , u točki  $x = 0$ ,  $y = 1$ ,

(b) jednačbom  $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$ , u točki  $x = 1$ ,  $y = 1$ .

**1.20.** Funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadovoljava

$$e^{f(x)} + x^2 f(x) - e^{-x} = 0 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Izračunajte  $f'$  i  $f''$  (tj. izrazite ih pomoću  $f$ ). Specijalno, koliko je  $f'(0)$  i  $f''(0)$ ?

**1.21.** Funkcija  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana je formulom

$$f(x) := x + x^3 + e^{x^3}.$$

Pokažite da je  $f$  injekcija i da je  $10 + e^8 \in \mathcal{R}_f$ , te odredite  $(f^{-1})'(e^8 + 10)$ .

### 1.3 Derivacije višeg reda

$n$ -tu derivaciju funkcije  $f$  označavamo s  $f^{(n)}$  ili u Leibnizovoj notaciji s  $(\frac{d}{dx})^n f$ .

**Zadatak 1.22.** Odredite  $f''$  ako je

(a)  $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$

(b)  $f(x) = e^x \cos x$

*Rješenje.* (a) Prvo računamo prvu derivaciju primjenom pravila za deriviranje umnoška  $(uv)' = u'v + uv'$  i činjenicu da je  $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$ :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + x^2)' \cdot \operatorname{arctg} x + (1 + x^2) \cdot (\operatorname{arctg} x)' \\ &= 2x \operatorname{arctg} x + 1 \end{aligned}$$

Sada deriviramo  $f'(x)$ . Ponovno primjenjujemo pravilo produkta na prvi član, dok je derivacija konstante 1 jednaka nuli:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x)' \cdot \operatorname{arctg} x + 2x \cdot (\operatorname{arctg} x)' + 0 \\ &= 2 \operatorname{arctg} x + 2x \cdot \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

(b) Prvo računamo prvu derivaciju primjenom pravila za deriviranje umnoška:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)' \\ &= e^x (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

Sada deriviramo  $f'(x)$ , ponovno koristeći pravilo produkta:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^x)' \cdot (\cos x - \sin x) + e^x \cdot (\cos x - \sin x)' \\ &= -2e^x \sin x \end{aligned}$$

□

**Zadatak 1.23.** Neka je

$$f(x) = x(2x - 1)^{1010}(x + 3)^{1015}.$$

Izračunajte  $f^{(2026)}(x)$  i  $f^{(2027)}(x)$ .

*Rješenje.* Odredimo najprije derivaciju monoma  $g(x) = x^n$ , gdje je  $n \in \mathbb{N}$ . Počnimo računati prve derivacije:

$$g'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$g''(x) = n \cdot (n-1) \cdot x^{n-2}$$

$$g'''(x) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot x^{n-3}$$

Iz ovoga možemo prepoznati uzorak. Općenita formula za  $k$ -tu derivaciju, za  $k \leq n$  može se pokazati indukcijom po  $k$ :

$$g^{(k)}(x) = n \cdot (n-1) \cdots (n-k+1) \cdot x^{n-k},$$

gdje poistovjetimo  $x^0 := 1$ . Deriviramo li još jednom, zaključujemo da za sve  $k > n$  vrijedi

$$g^{(k)}(x) = 0.$$

Funkcija  $f(x)$  je polinom stupnja je  $1 + 1010 + 1015 = 2026$ .

Umnožak vodećih članova nam daje vodeći član cijelog polinoma:

$$x \cdot 2^{1010} x^{1010} \cdot x^{1015} = 2^{1010} x^{2026}$$

Naš zadani izraz  $f(x)$  možemo dakle zapisati u obliku:

$$f(x) = 2^{1010} x^{2026} + P(x)$$

gdje je  $P(x)$  polinom čiji su svi članovi strogo manjeg stupnja od 2026. Koristeći formulu za derivaciju monoma slijedi

$$f^{(2026)}(x) = 2^{1010} \cdot 2026!.$$

Još jednim deriviranjem trivijalno slijedi

$$f^{(2027)}(x) = 0.$$

□

**Zadatak 1.24.** Neka je  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilna funkcija takva da je

$$g(1) = 1, \quad g'(1) = 2, \quad g''(1) = -1.$$

Ako je  $f(x) = x^3 g(x)$ , izračunajte  $f''(1)$ .

*Rješenje.* Primjenom pravila za deriviranje umnoška,  $(uv)' = u'v + uv'$  slijedi

$$f'(x) = 3x^2 g(x) + x^3 g'(x).$$

Još jednim deriviranjem slijedi

$$f''(x) = 6xg(x) + 6x^2 g'(x) + x^3 g''(x).$$

Uvrštavanjem  $x = 1$  i uvjeta zadatka slijedi

$$f''(1) = 17.$$

□

**Zadatak 1.25.** Neka je  $f(x) = \frac{1}{ax+b}$ , za  $a, b \in \mathbb{R}$ . Odredite  $f^{(n)}$  za  $n \in \mathbb{N}$ .

*Rješenje.* Zapišimo zadanu funkciju u obliku potencije radi lakšeg deriviranja:

$$f(x) = (ax+b)^{-1}$$

Sada računamo prve derivacije koristeći pravilo za deriviranje kompozicije funkcija (lančano pravilo).

$$f'(x) = -1 \cdot (ax+b)^{-2} \cdot (ax+b)' = -1 \cdot a(ax+b)^{-2}$$

Deriviramo još jednom:

$$f''(x) = -1 \cdot (-2) \cdot (ax+b)^{-3} \cdot a \cdot (ax+b)' = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a^2(ax+b)^{-3}$$

Izračunajmo i treću derivaciju:

$$f'''(x) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (ax+b)^{-4} \cdot a^2 \cdot (ax+b)' = (-1)^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a^3(ax+b)^{-4}$$

Iz izračunatih prvih derivacija možemo naslutiti formulu za  $n$ -tu derivaciju:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot a^n \cdot (ax+b)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Tvrđnja se lako dokaže matematičkom indukcijom. □

Mogu se pokazati i sljedeće formule:

$$\begin{aligned} (a^x)^{(n)} &= a^x \ln^n a, \text{ za } a > 0 \\ (\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ (\operatorname{sh} x)^{(n)} &= \begin{cases} \operatorname{sh} x & n \text{ paran} \\ \operatorname{ch} x & n \text{ neparan} \end{cases} \\ (\operatorname{ch} x)^{(n)} &= \begin{cases} \operatorname{ch} x & n \text{ paran} \\ \operatorname{sh} x & n \text{ neparan} \end{cases} \\ (x^m)^{(n)} &= m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n}, \text{ za } m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

**Zadatak 1.26.** Odredite  $f^{(n)}$  ako je

(a)  $f(x) = \ln(3x+1)$

(b)  $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - x - 2}$$

*Rješenje.* (a) Izračunajmo prvu derivaciju:

$$f'(x) = \frac{1}{3x+1} \cdot (3x+1)' = \frac{3}{3x+1} = 3(3x+1)^{-1}$$

Sada vidimo da je prva derivacija oblika na koji možemo primijeniti formulu iz prethodnog zadatka ( $a = 3, b = 1$ ). Da bismo dobili  $n$ -tu derivaciju početne funkcije, zapravo moramo primijeniti formulu za  $(n-1)$ -vu derivaciju na funkciju  $f'(x)$ :

$$f^{(n)}(x) = (f')^{(n-1)}(x) = 3 \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \cdot 3^{n-1}}{(3x+1)^{(n-1)+1}}.$$

Množenjem  $3 \cdot 3^{n-1}$  dobivamo konačno rješenje:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \cdot 3^n}{(3x+1)^n}.$$

(b) Primijetimo

$$f(x) = -1 + 2(-x+1)^{-1}$$

Za svaku derivaciju  $n \geq 1$ , derivacija konstante  $-1$  je nula. Na drugi dio primjenjujemo formulu uz  $a = -1$  i  $b = 1$ :

$$f^{(n)}(x) = 0 + 2 \cdot \frac{(-1)^n n! (-1)^n}{(-x+1)^{n+1}} = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

(c) Rastavimo izraz na parcijalne razlomke. Nazivnik se rastavlja kao razlika kvadrata:  $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ .

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1).$$

Usporedbom koeficijenata slijedi  $A + B = 0$  i  $A - B = 1$  pa dobivamo

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-1} - \frac{1}{2}(x+1)^{-1}.$$

Primijenimo opću formulu iz prethodnog zadatka na oba člana ( $a = 1$  u oba slučaja, uz  $b = -1$  i  $b = 1$ ):

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n n! 1^n}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n n! 1^n}{(x+1)^{n+1}}$$

Izlučivanjem zajedničkih faktora dobivamo konačno rješenje:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left[ \frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]$$

(d) Budući da je stupanj brojnika veći od stupnja nazivnika, prvo podijelimo polinome:

$$(x^3 + x) : (x^2 - x - 2) = x + 1 \text{ i ostatak } 4x + 2$$

Dakle, funkciju možemo zapisati kao:

$$f(x) = x + 1 + \frac{4x + 2}{x^2 - x - 2}$$

Sada nazivnik ostatka rastavimo na faktore:  $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$ . Rastavljamo ostatak na parcijalne razlomke:

$$\frac{4x + 2}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$$

$$4x + 2 = A(x + 1) + B(x - 2)$$

Izjednačavanjem koeficijenata slijedi  $A = \frac{10}{3}$  i  $B = \frac{2}{3}$  pa vrijedi:

$$f(x) = x + 1 + \frac{10}{3}(x - 2)^{-1} + \frac{2}{3}(x + 1)^{-1}$$

Ovdje moramo biti oprezni jer polazni dio funkcije ima polinom stupnja 1 ( $x + 1$ ). Zbog toga moramo rješenje razdvojiti u dva slučaja:

**Slučaj za  $n = 1$ :**

$$f'(x) = 1 - \frac{10}{3(x - 2)^2} - \frac{2}{3(x + 1)^2}$$

**Slučaj za  $n \geq 2$ :** Za viši red derivacije, linearni dio ( $x + 1$ ) nestaje (postaje 0), a na preostala dva člana primjenjujemo našu formulu ( $a = 1$  u oba):

$$f^{(n)}(x) = \frac{10}{3} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x - 2)^{n+1}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x + 1)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{3} \left[ \frac{10}{(x - 2)^{n+1}} + \frac{2}{(x + 1)^{n+1}} \right]$$

□

**Zadatak 1.27.** Odredite  $f^{(2026)}$  ako je

(a)  $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$

(b)  $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$

*Rješenje.* (a) Koristeći  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  i formulu za sinus dvostrukog kuta slijedi

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x).$$

Iz formule za kosinus dvostrukog kuta dobijemo  $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$  pa slijedi

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x).$$

Sada tražimo 2026. derivaciju ovog pojednostavljenog izraza. Indukcijom se lagano vidi da vrijedi

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{(n)} (f(at)) \Big|_{t=x} = a^n f^{(n)}(x).$$

Iz formule za  $n$ -tu derivaciju kosinusa sada slijedi

$$f^{(2026)}(x) = \frac{1}{4} \cdot (\cos(4x))^{(2026)} = \frac{1}{4} \cdot 4^{2026} \cdot (-\cos(4x)) = -4^{2025} \cos(4x)$$

(b) Koristimo formulu za pretvorbu umnoška u zbroj:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)].$$

$$f(x) = (\sin 3x \sin x) \sin 2x = \frac{1}{2} [\cos(2x) - \cos(4x)] \sin 2x$$

Prvi član prepoznajemo kao sinus dvostrukog kuta, a za drugi član ponovno koristimo pretvorbu, ovaj put po formuli

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) - \sin(A - B)],$$

uz  $A = 4x, B = 2x$ , pa dobivamo:

$$f(x) = \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \sin(4x) - \frac{1}{4} \sin(6x).$$

Koristeći pravilo za  $n$ -tu derivaciju sinusa slijedi

$$f^{(2026)}(x) = -2^{2024} \sin(2x) - 4^{2025} \sin(4x) + \frac{6^{2026}}{4} \sin(6x)$$

□

**Teorem 5.** *Ako su  $u, v \in C^n(I)$ , tada za derivaciju produkta vrijedi Leibnizova formula:*

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

*Dokaz.* Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Za  $n = 1$ , tvrdnja slijedi iz formule za derivaciju produkta. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj  $n \in \mathbb{N}$  i dokažimo da formula vrijedi i za  $n + 1$ . Krenimo od  $(n + 1)$ -ve derivacije, koju zapisujemo kao derivaciju  $n$ -te derivacije:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n+1)} &= ((u \cdot v)^{(n)})' \\ &= \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n-k+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k+1)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)} \end{aligned}$$

Supstitucijom  $j = k + 1$  u prvoj sumi, izraz je jednak

$$\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} u^{(j)} v^{(n+1-j)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)}$$

Vraćanjem oznake indeksa na  $k$ , dobili smo:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n+1-k)} \\ &= \binom{n}{0} u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left[ \binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} u^{(n+1)} v^{(0)} \end{aligned}$$

Koristeći Pascalovo pravilo za zbrajanje binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

i svojstva rubnih binomnih koeficijenata  $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$  i  $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$ , slijedi

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n+1)} &= \binom{n+1}{0} u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} u^{(n+1)} v^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(k)} v^{(n+1-k)} \end{aligned}$$

□

**Zadatak 1.28.** Odredite  $f^{(n)}$  za

(a)  $f(x) = x^2 e^{-2x}$

(b)  $f(x) = x^2 e^x \operatorname{sh} x$

*Rješenje.* (a) Koristimo Leibnizovu formulu uz  $u(x) = x^2$ ,  $v(x) = e^{-2x}$ . Budući da je  $u^{(k)}(x) = 0$  za  $k \geq 3$ , slijedi

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n)} &= \binom{n}{0} u^{(0)} v^{(n)} + \binom{n}{1} u^{(1)} v^{(n-1)} + \binom{n}{2} u^{(2)} v^{(n-2)} \\ &= x^2 v^{(n)} + 2nx v^{(n-1)} + n(n-1) v^{(n-2)} \end{aligned}$$

Koristeći

$$v^{(m)}(x) = (-2)^m e^{-2x}$$

slijedi

$$f^{(n)}(x) = (-2)^{n-2} e^{-2x} (4x^2 - 4nx + n^2 - n)$$

(b) Koristeći  $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ , slijedi

$$e^x \operatorname{sh} x = e^x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2}$$

pa početnu funkciju možemo zapisati kao razliku:

$$f(x) = x^2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x^2$$

Zbog linearnosti derivacije,  $n$ -tu derivaciju računamo za svaki član zasebno:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} (x^2 e^{2x})^{(n)} - \frac{1}{2} (x^2)^{(n)}$$

Na prvi član primjenjujemo Leibnizovu formulu ( $u = x^2$ ,  $v = e^{2x}$ , a  $v^{(m)} = 2^m e^{2x}$ ):

$$(x^2 e^{2x})^{(n)} = x^2 \cdot 2^n e^{2x} + 2nx \cdot 2^{n-1} e^{2x} + n(n-1) \cdot 2^{n-2} e^{2x}.$$

Dakle,

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-3} e^{2x} (4x^2 + 4nx + n^2 - n) - \frac{1}{2} (x^2)^{(n)}$$

□

**Zadatak 1.29.** Odredite  $f^{(100)}(0)$  za

(a)  $f(x) = x^2 \sin x \cos x$

(b)  $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

*Rješenje.* (a) Koristeći formulu za sinus dvostrukog kuta vrijedi

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x).$$

Koristeći Leibnizovu formulu uz  $u(x) = x^2$  i  $v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$ , slijedi Za sve derivacije reda  $k \geq 3$ , vrijedi  $u^{(k)}(0) = 0$  pa slijedi

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} u^{(k)}(x) v^{(100-k)}(x) = \sum_{k=0}^2 \binom{100}{k} u^{(k)}(x) v^{(100-k)}(x) \\ &= \binom{100}{0} x^2 v^{(100)}(x) + \binom{100}{1} 2x v^{(99)}(x) + \binom{100}{2} 2v^{(98)}(0) \end{aligned}$$

Za  $x = 0$ , slijedi

$$f^{(100)}(0) = 2 \binom{100}{2} v^{(98)}(0)$$

Konačno, koristeći formulu za  $m$ -tu derivaciju sinusa,

$$(\sin(ax))^{(m)} = a^m \sin\left(ax + m\frac{\pi}{2}\right)$$

slijedi

$$v^{(98)}(0) = \frac{1}{2} \cdot 2^{98} \sin\left(2 \cdot 0 + 98\frac{\pi}{2}\right) = 2^{97} \sin(49\pi) = 0.$$

Dakle,

$$f^{(100)}(0) = 9900 \cdot 0 = 0.$$

(b) Zapišimo funkciju kao produkt dviju funkcija:

$$f(x) = (1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Koristeći Leibnizovu formulu slijedi

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} u^{(k)}(x) v^{(100-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{100}{k} u^{(k)}(x) v^{(100-k)}(x). \end{aligned}$$

Za  $x = 0$  slijedi

$$f^{(100)}(0) = v^{(100)}(0) + 100v^{(99)}(0)$$

pa dovoljno naći opću formulu za  $m$ -tu derivaciju funkcije  $v(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$ . Deriviramo prvih nekoliko puta:

$$\begin{aligned}v'(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right) (1-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \\v''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (1-x)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-1) = \frac{1 \cdot 3}{2^2}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \\v'''(x) &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) (1-x)^{-\frac{7}{2}} \cdot (-1) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}(1-x)^{-\frac{7}{2}}\end{aligned}$$

Uočavamo pravilnost. U brojniku dobivamo produkt neparnih brojeva, što označavamo dvostrukim faktorijelom, pa se indukcijom pokaže da opća formula za  $m$ -tu derivaciju glasi:

$$v^{(m)}(x) = \frac{(2m-1)!!}{2^m} (1-x)^{-\frac{2m+1}{2}}$$

Za  $x = 0$ , slijedi

$$v^{(m)}(0) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}.$$

Uvrštavanjem u formulu dobijemo

$$f^{(100)}(0) = \frac{199!!}{2^{100}} + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}} = \frac{197!! \cdot (199 + 200)}{2^{100}} = \frac{399 \cdot 197!!}{2^{100}}.$$

□

### Računanje derivacija višeg reda pomoću diferencijalnih jednakosti

Ponekad nije teško pronaći jednostavnu diferencijalnu jednadžbu koju zadovoljava funkcija. Zatim se na tu jednakost primijeni Leibnizova formula kako bismo rekursivno odredili derivaciju višeg reda.

**Zadatak 1.30.** Neka je  $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Odredite  $f^{(n)}(0)$ .

*Rješenje.* Neka je zadana funkcija  $y = f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ . Prva derivacija ove funkcije je:

$$y' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{2x}{2}\right) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

Iz slijedi

$$y' = -xy$$

Deriviranjem jednakosti  $(n - 1)$  puta i korištenjem Leibnizove formule uz  $u = -x$ ,  $v = y$ , slijedi

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u^{(k)} v^{(n-1-k)} = \binom{n-1}{0} (-x) y^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} (-1) y^{(n-2)}.$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  slijedi

$$y^{(n)}(0) = -0 \cdot y^{(n-1)}(0) - (n-1) y^{(n-2)}(0) = -(n-1) y^{(n-2)}(0)$$

Da bismo riješili ovu rekurziju, trebaju nam "početni uvjeti", odnosno vrijednosti funkcije i prve derivacije u nuli:

$$\begin{aligned} y^{(0)}(0) &= y(0) = e^0 = 1 \\ y^{(1)}(0) &= y'(0) = -0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Na temelju rekurzije  $y^{(n)}(0) = -(n-1) y^{(n-2)}(0)$ , vidimo da se svaka derivacija računa preko derivacije koja je za dva reda niža. Zbog toga se rješenje grana u dva slučaja:

### 1. Slučaj: $n$ je neparan broj ( $n = 2k + 1$ )

Budući da je  $y^{(1)}(0) = 0$ , svaka sljedeća neparna derivacija bit će pomnožena s nulom pa za neparne derivacije vrijedi:

$$f^{(2k+1)}(0) = 0, \quad \text{za } k \in \mathbb{N}_0$$

### 2. Slučaj: $n$ je paran broj ( $n = 2k$ )

Krenimo od  $y^{(0)}(0) = 1$ :

$$\begin{aligned} y^{(2)}(0) &= -1 \cdot y^{(0)}(0) = -1 \\ y^{(4)}(0) &= -3 \cdot y^{(2)}(0) = (-3)(-1) = 3 \cdot 1 \\ y^{(6)}(0) &= -5 \cdot y^{(4)}(0) = (-5)(-3)(-1) = -(5 \cdot 3 \cdot 1). \end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom lako se vidi da je

$$y^{(2k)}(0) = -(2k-1) \cdot y^{(2k-2)}(0) = (-1)^k (2k-1)!!,$$

gdje je !! oznaka za dvostruki faktorijel, odnosno umnožak svih uzastopnih neparnih brojeva do  $(2k-1)$ . Konačno

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n \text{ neparan} \\ (-1)^k (n-1)!!, & \text{ako je } n \text{ paran i } n = 2k \end{cases}$$

□

**Zadatak 1.31.** Neka je  $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$ . Odredite  $f^{(99)}(0)$  i  $f^{(100)}(0)$ .

*Rješenje.* Označimo li  $y = f(x)$ , vrijedi

$$y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{1-x^2} = \frac{1+xy}{1-x^2}.$$

Množenjem obje strane sa  $(1-x^2)$  slijedi da funkcija zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1-x^2)y' = 1+xy.$$

Derivirajmo ovu jednakost  $(n-1)$  puta koristeći Leibnizovu formulu za derivaciju produkta.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1-x^2)^{(k)} (y')^{(n-1-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{(k)} y^{(n-1-k)}.$$

Sređivanjem slijedi

$$(1-x^2)y^{(n)} - 2x(n-1)y^{(n-1)} - (n-1)(n-2)y^{(n-2)} = xy^{(n-1)} + (n-1)y^{(n-2)}.$$

Uvrštavanjem  $x=0$  slijedi:

$$y^{(n)}(0) = (n-1)^2 y^{(n-2)}(0).$$

Dakle, svaka derivacija ovisi o dva reda nižoj derivaciji pa izračunajmo početne uvjete,  $y(0)$  i  $y'(0)$ :

$$y(0) = \frac{\arcsin 0}{\sqrt{1-0^2}} = 0.$$

Vrijednost prve derivacije možemo lako očitati iz zadane diferencijalne jednadžbe  $(1-x^2)y' = 1+xy$  uvrštavanjem  $x=0$ :

$$(1-0)y'(0) = 1+0 \implies y'(0) = 1$$

### **Računanje traženih vrijednosti:**

Rekurzija povezuje derivacije istog pariteta (svaka ovisi o onoj dva reda nižoj).

Računamo  $f^{(100)}(0)$ . Ovo je parna derivacija. Krenemo li od početnog uvjeta  $y(0) = 0$ :

$$y^{(2)}(0) = 1^2 \cdot y(0) = 0$$

Sve daljnje parne derivacije bit će jednake nuli jer se uvijek množe s prethodnom koja je nula. Stoga je:

$$f^{(100)}(0) = 0$$

Računamo sad  $f^{(99)}(0)$ . Ovo je neparna derivacija. Krenemo li od  $y'(0) = 1$ :

$$y^{(3)}(0) = 2^2 \cdot y'(0) = 2^2$$

$$y^{(5)}(0) = 4^2 \cdot y^{(3)}(0) = 4^2 \cdot 2^2$$

$$y^{(7)}(0) = 6^2 \cdot y^{(5)}(0) = 6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2$$

Indukcijom se sada lako vidi da je

$$y^{(2k+1)} = ((2k)!)^2.$$

Dakle,

$$f^{(99)}(0) = (98!)^2 = (2^{49} \cdot 49!)^2 = 2^{98} (49!)^2.$$

□

## Zadaci za vježbu

**1.32.** Dokažite da funkcija  $y(x) = \frac{e^{5x+2}}{e^x}$  zadovoljava jednakost:

$$y''' - 13y' - 12y = 0.$$

**1.33.** (a) Odredite  $f^{(8)}$  za  $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$ .

(b) Odredite  $f^{(5)}$  za  $f(x) = x \ln x$ .

(c) Odredite  $f^{(5)}$  za  $f(x) = \frac{x}{\ln x}$ .

(b) Odredite  $f''$  za  $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$ .

(b) Odredite  $f''$  za  $f(x) = x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$ .

**1.34.** (a) Pokažite da funkcija  $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$ , gdje su  $C_1$  i  $C_2$  realne konstante zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + y = 0.$$

(b) Pokažite da funkcija  $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$ , gdje su  $C_1$  i  $C_2$  realne konstante zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' - y = 0.$$

**1.35.** Dokažite Leibnizovu formulu. [Uputa: Matematičkom indukcijom po  $n \in \mathbb{N}$ .]

**1.36.** Neka je  $f(x) = x^3 \operatorname{sh} x$ . Odredite  $f^{(n)}$ .

**1.37.** Neka je  $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$ . Odredite  $f^{(n)}$ .

**1.38.** Izračunajte  $f^{(100)}(0)$  i  $f^{(101)}(0)$  ako je funkcija  $f$  zadana formulom:

(a)  $f(x) = (x \sin 2x)^3$

(d)  $f(x) = x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}$

(b)  $f(x) = \operatorname{Arsh} x$

(c)  $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2x-3}$

(e)  $f(x) = \sqrt[3]{(1-2x)^2}$

**1.39.** Neka je  $y(x) = \arcsin x$ . Odredite  $y^{(n)}(0)$ .

[Uputa:  $(1-x^2)y'' = xy'$ .]

**1.40.** Neka je  $y(x) = \cos(3 \arcsin x)$ . Odredite  $y^{(n)}(0)$ . [Uputa:  $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$ .]

**1.41.** Neka je  $f(x) = x^n$ . Dokažite:

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n.$$

**1.42.** Funkcija  $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  zadana je formulom

$$P(x) = e^{x^2} \cdot (e^{-x^2})^{(2006)}$$

Dokažite da je  $P$  polinom, odredite mu stupanj i vodeći koeficijent.

**1.43.** Dokažite da za svaki  $n \in \mathbb{N}$  i svaku  $n$  puta derivabilnu funkciju  $f$  vrijedi jednakost

$$\left( x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

[Uputa: Matematičkom indukcijom po  $n \in \mathbb{N}$ .]

## 1.4 Tangenta i normala

Ako funkcija  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ima derivaciju u točki  $x_0 \in I$ , onda jednadžbe tangente i normale na graf funkcije  $f$  u točki  $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$  glase:

$$\begin{aligned} t \quad \dots \quad y - y_0 &= f'(x_0)(x - x_0) \\ n \quad \dots \quad y - y_0 &= -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \end{aligned}$$

**Zadatak 1.44.** Točkom  $T(2, 0)$  povucite tangentu na krivulju  $y = x^4$ .

*Rješenje.* Točka  $T$  nalazi se izvan krivulje pa označimo sa  $D(x_0, y_0)$  točku dirališta koja leži na krivulji.

Budući da diralište  $D(x_0, y_0)$  leži na krivulji, njegove koordinate zadovoljavaju njezinu jednadžbu:

$$y_0 = x_0^4$$

Koeficijent smjera tangente u točki dirališta iznosi  $k = f'(x_0) = 4x_0^3$ . Uvrstimo ove elemente u opću jednadžbu tangente:

$$y - x_0^4 = 4x_0^3(x - x_0)$$

Znamo da tangenta mora prolaziti kroz zadanu točku  $T(2, 0)$ . Stoga ćemo koordinate točke  $T$  uvrstiti umjesto  $x$  i  $y$  u našu jednadžbu tangente i riješiti je po nepoznatici  $x_0$ :

$$0 - x_0^4 = 4x_0^3(2 - x_0),$$

što je ekvivalentno s

$$x_0^3(3x_0 - 8) = 0.$$

Ova jednadžba daje nam dva rješenja za  $x$ -koordinatu dirališta:  $x_0 = 0$  i  $x_0 = \frac{8}{3}$ , što znači da iz točke  $T$  možemo povući točno dvije tangente na zadanu krivulju.

Prvi koeficijent smjera je  $k_1 = 4(0)^3 = 0$  pa uvrštavanjem u jednadžbu pravca kroz točku  $T(2, 0)$  dobijemo jednadžbu

$$y - 0 = 0 \cdot (x - 2),$$

tj.

$$y = 0.$$

Drugi koeficijent smjera je:

$$k_2 = 4 \left( \frac{8}{3} \right)^3$$

pa uvrštavanjem u jednadžbu pravca kroz točku  $T(2, 0)$  dobijemo jednadžbu pravca

$$y - 0 = 4 \left( \frac{8}{3} \right)^3 (x - 2).$$

□

**Zadatak 1.45.** Pokažite da se tangente na krivulju

$$y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$$

povučene u točkama na krivulji s ordinatom 1 sijeku u ishodištu.

*Rješenje.* Da bismo pronašli apscise ( $x$ -koordinate) tih točaka, uvrstit ćemo  $y = 1$  u jednadžbu krivulje:

$$1 = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$$

Rješavanjem slijedi da imamo dvije točke dirališta:  $T_1(1, 1)$  i  $T_2(-1, 1)$ .

Za jednadžbu tangente potreban nam je koeficijent smjera, odnosno prva derivacija funkcije. Deriviranjem funkcije slijedi

$$y' = \frac{16x}{(3 + x^2)^2}$$

Računamo koeficijente smjera za svaku točku dirališta uvrštavanjem pripadajućeg  $x$ :

Za točku  $T_1(1, 1)$ :

$$k_1 = y'(1) = \frac{16(1)}{(3 + 1^2)^2} = \frac{16}{16} = 1$$

Za točku  $T_2(-1, 1)$ :

$$k_2 = y'(-1) = \frac{16(-1)}{(3 + (-1)^2)^2} = \frac{-16}{16} = -1$$

Koristimo formulu za jednadžbu pravca  $y - y_0 = k(x - x_0)$ .

Prva tangenta  $t_1$  (kroz točku  $T_1$ ):

$$y - 1 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x.$$

Druga tangenta  $t_2$  (kroz točku  $T_2$ ):

$$y - 1 = -1(x - (-1)) \Leftrightarrow y = -x.$$

Točka presjeka tangenti je  $(0, 0)$  i time je tvrdnja dokazana. □

**Zadatak 1.46.** U proizvoljnoj točki krivulje

$$y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

povučena je tangenta. Dokažite da odsječak tangente između presjeka s osi ordinata i točke dirališta ima konstantnu duljinu i odredite ju.

*Rješenje.* Neka je  $D(x_0, y_0)$  proizvoljna točka dirališta na krivulji. Prvo moramo pronaći derivaciju funkcije  $y = f(x)$  kako bismo odredili koeficijent smjera tangente u toj točki.

Množenjem brojnika i nazivnika unutar logaritma s  $(a + \sqrt{a^2 - x^2})$  slijedi

$$\begin{aligned} y &= \ln \left( \frac{(a + \sqrt{a^2 - x^2})^2}{x^2} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} \\ &= a \ln (a + \sqrt{a^2 - x^2}) - a \ln x - \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

Označimo  $u = \sqrt{a^2 - x^2}$ . Tada je  $u' = -\frac{x}{u}$  i vrijedi

$$\begin{aligned} y' &= a \frac{1}{a+u} \cdot u' - \frac{a}{x} - u' = u' \left( \frac{a}{a+u} - 1 \right) - \frac{a}{x} \\ &= \left( -\frac{x}{u} \right) \left( \frac{-u}{a+u} \right) - \frac{a}{x} = \frac{-u^2 - au}{x(a+u)} \\ &= -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \end{aligned}$$

Jednadžba tangente na krivulju u točki  $D(x_0, y_0)$  glasi:

$$Y - y_0 = y'(x_0)(X - x_0)$$

Tražimo točku  $T(0, Y_T)$  u kojoj tangenta siječe os ordinata ( $y$ -os). Vrijedi

$$Y_T - y_0 = y'(x_0)(0 - x_0)$$

$$Y_T = y_0 - x_0 y'(x_0).$$

Odsječak tangente između osi ordinata i dirališta je dužina  $\overline{TD}$ . Njezinu duljinu  $d$  računamo pomoću formule za udaljenost dviju točaka:

$$d = \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - Y_T)^2}$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da je  $y_0 - Y_T = x_0 y'(x_0)$ . Uvrstimo to u korijen:

$$d = \sqrt{x_0^2 + (x_0 y'(x_0))^2} = |x_0| \sqrt{1 + (y'(x_0))^2} = |x_0| \sqrt{1 + \frac{a^2 - x_0^2}{x_0^2}} = |a|.$$

Dakle, duljina odsječka tangente između  $y$ -osi i točke dirališta ne ovisi o koordinati  $x_0$  i iznosi  $|a|$ .  $\square$

**Zadatak 1.47.** Odredite jednadžbu tangente i normale u točki  $T(1, 1)$  na krivulju implicitno zadanu jednadžbom

$$x^5 + y^5 - 2xy = 0.$$

*Rješenje.* Provjeravamo leži li točka  $T$  na krivulji uvrštavanjem njezinih koordinata:

$$1^5 + 1^5 - 2(1)(1) = 1 + 1 - 2 = 0$$

Točka  $T$  nalazi se na krivulji, pa predstavlja diralište.

Deriviramo cijelu jednadžbu po varijabli  $x$ . Pritom  $y$  tretiramo kao funkciju od  $x$ , što znači da moramo koristiti lančano pravilo za članove s  $y$ , te pravilo derivacije produkta za član  $xy$ :

$$(x^5 + y^5 - 2xy)' = (0)'$$

Odatle slijedi

$$5x^4 + 5y^4y' - 2y - 2xy' = 0,$$

odnosno nakon sređivanja

$$y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}.$$

Koeficijent smjera tangente ( $k_t$ ) u točki  $T(1, 1)$  dobivamo uvrštavanjem  $x = 1$  i  $y = 1$  u dobivenu derivaciju:

$$k_t = y'(1, 1) = \frac{2(1) - 5(1)^4}{5(1)^4 - 2(1)} = \frac{2 - 5}{5 - 2} = \frac{-3}{3} = -1$$

Sada uvrštavamo  $T(1, 1)$  i  $k_t = -1$  u opću jednadžbu pravca  $y - y_0 = k(x - x_0)$ :

$$y - 1 = -1(x - 1),$$

odnosno

$$y = -x + 2.$$

Normala je okomita na tangentu, pa za njezin koeficijent smjera ( $k_n$ ) vrijedi relacija  $k_t \cdot k_n = -1$ :

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Uvrštavamo  $T(1, 1)$  i  $k_n = 1$  u jednadžbu pravca:

$$y - 1 = 1(x - 1),$$

iz čega slijedi jednadžba normale

$$y = x.$$

□

**Zadatak 1.48.** Pod kojim se kutem sijeku tangente na kružnicu

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$$

povučene točkom  $T(4, 1)$ ?

*Rješenje.* Neka je  $D(x_0, y_0)$  točka dirališta tangente na kružnicu. Da bismo našli koeficijent smjera tangente  $k$ , deriviramo jednadžbu kružnice implicitno po varijabli  $x$ :

$$2x + 2yy' + 4 - 2y' = 0.$$

Dakle,

$$y' = -\frac{x+2}{y-1}$$

pa jednadžba tangente u točki  $D(x_0, y_0)$  glasi

$$y - y_0 = -\frac{x_0 + 2}{y_0 - 1}(x - x_0),$$

Budući da tangenta prolazi i kroz točku  $T(4, 1)$ , vrijedi

$$1 - y_0 = -\frac{x_0 + 2}{y_0 - 1}(4 - x_0).$$

Sređivanjem dobivamo:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 2y_0 - 7 = 0.$$

Budući da diralište  $D(x_0, y_0)$  leži na kružnici, ono zadovoljava i njezinu jednadžbu:

$$x_0^2 + y_0^2 + 4x_0 - 2y_0 - 11 = 0.$$

Oduzimanjem jednadžbi slijedi

$$x_0 = \frac{2}{3}$$

pa uvrštavanjem u neku od jednadžbi dobijemo i

$$y_0 = 1 \pm \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

Odatle slijedi da su nagibi tangenti,  $(k_1, k_2)$  jednaki

$$k_{1,2} = \frac{y_0 - 1}{x_0 - 4} = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Dakle,  $k_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$  i  $k_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$ .

Konačno, kut  $\varphi$  pod kojim se sijeku tangente računamo pomoću formule za tangens kuta:

$$\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = 4\sqrt{5}$$

pa slijedi da je kut pod kojim se sijeku tangente:

$$\varphi = \arctan(4\sqrt{5}) \approx 83.62^\circ$$

□

**Zadatak 1.49.** Pokažite da se parabole

$$\begin{aligned}y^2 &= 4x + 4 \\y^2 &= -12x + 36\end{aligned}$$

sijeku pod pravim kutem.

*Rješenje.* Da bismo pronašli točke u kojima se parabole sijeku, izjednačit ćemo njihove jednadžbe:

$$4x + 4 = -12x + 36 \implies x = 2$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu slijedi

$$y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$

Parabole se sijeku u točkama  $T_1(2, 2\sqrt{3})$  i  $T_2(2, -2\sqrt{3})$ . Derivacijom implicitnih jednadžbi dobivamo koeficijente smjera tangenti ( $k = y'$ ).

Za prvu parabolu:

$$y^2 = 4x + 4 \implies 2yy' = 4 \implies y'_1 = \frac{2}{y}$$

Za drugu parabolu:

$$y^2 = -12x + 36 \implies 2yy' = -12 \implies y'_2 = -\frac{6}{y}$$

Dvije krivulje se sijeku pod pravim kutem (ortogonalne su) ako je umnožak koeficijenata smjera njihovih tangenti u točki presjeka jednak  $-1$ . Izračunajmo umnožak za proizvoljnu točku presjeka s ordinatom  $y_0$ :

$$k_1 \cdot k_2 = y'_1(y_0) \cdot y'_2(y_0) = \left(\frac{2}{y_0}\right) \left(-\frac{6}{y_0}\right) = -\frac{12}{y_0^2} = -1,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

**Zadatak 1.50.** Za koje  $n \in \mathbb{N}$  krivulja  $y = \arctg(nx)$  siječe os  $x$  pod kutem većim od  $89^\circ$ ?

*Rješenje.* Krivulja siječe os apscisa kada je  $y = 0$ :

$$\arctg(nx) = 0 \implies x = 0$$

Točka presjeka je  $(0, 0)$ .

Kut  $\alpha$  pod kojim krivulja siječe os  $x$  određen je vrijednošću prve derivacije u točki presjeka ( $x = 0$ ):

$$\tan \alpha = y'(0)$$

Deriviramo zadanu funkciju:

$$y' = \frac{1}{1 + (nx)^2} \cdot n = \frac{n}{1 + n^2x^2}$$

Uvrštavanjem  $x = 0$  dobivamo:

$$\tan \alpha = y'(0) = n$$

Iz uvjeta zadatka traži se da je kut veći od  $89^\circ$ . Budući da je funkcija tangens strogo rastuća za šiljaste kutove, slijedi:

$$n > \tan(89^\circ) \approx 57.29.$$

.

Kako  $n$  mora biti prirodan broj ( $n \in \mathbb{N}$ ), najmanji takav broj koji zadovoljava nejednakost je 58.  $\square$

**Zadatak 1.51.** Uz koji parametar  $a \in \mathbb{R}$  krivulja  $y = ax^2$  dodiruje krivulju  $y = \ln x$ ?

**Napomena.** Teža varijanta ovog zadatka bila bi: "Odredite parametar  $a \in \mathbb{R}$  takav da krivulje  $y = ax^2$  i  $y = \ln x$  imaju točno jedno sjecište."

**Zadatak 1.52.** Odredite kut pod kojim se sijeku krivulje

$$\begin{aligned} x^3 + y^3 - x &= 0 \\ x^2 + y^3 + 2 &= 0 \end{aligned}$$

**Zadatak 1.53.** Nađite zajedničke tangente na krivulje

$$\begin{aligned} y &= x^2 - 6x + 5 \\ y &= -x^2 - 4x. \end{aligned}$$

## Zadaci za vježbu

**1.54.** Nađite sve pravce koji prolaze kroz ishodište i sijeku hiperbolu  $xy = a^2$  pod pravim kutem.

**1.55.** Zadana je krivulja

$$y = \frac{x - 4}{x - 2}.$$

Pokažite da su tangente na tu krivulju u točkama presjeka s koordinatnim osima paralelne.

**1.56.** Odredite općenitu formulu za jednadžbu tangente na krivulju implicitno zadanu s

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

**1.57.** Odredite sve vrijednosti parametra  $b \in \mathbb{R}$  za koje je pravac  $y = x + b$  tangenta krivulje

$$y = \frac{x}{x+4}.$$

**1.58.** Na krivulji  $y = \frac{1}{1+x^2}$  nađite točku u kojoj je tangenta paralelna s osi apscisa.

**1.59.** Pokažite da se krivulje familija

$$y^2 = 4a^2 - 4ax, \quad a > 0$$

$$y^2 = 4b^2 + 4bx, \quad b > 0$$

sijeku pod pravim kutem.

**1.60.** Pokažite da parabola

$$y = a(x - x_1)(x - x_2), \quad a \neq 0, x_1 < x_2$$

presijeca os apscisa u dvije točke pod jednakim kutem.

**1.61.** Pod kojim se kutem sijeku krivulje:

(a)  $y = x^2$  i  $x = y^2$ ,

(b)  $y = \sin x$  i  $y = \cos x$ ?

**1.62.** Uz koje uvjete na koeficijente  $a, b, c \in \mathbb{R}$  je os apscisa tangenta na krivulju

$$y = ax^2 + bx + c?$$

**1.63.** Nađite pravac koji je tangenta na krivulju

$$y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 6$$

u barem dvije točke.

**1.64.** Dana je krivulja  $y = xe^{\frac{1}{x}}$ .

(a) Nađite jednadžbu tangente na tu krivulju u točki s apscisom  $a > 0$ .

(b) Što se događa s tangentom kada  $a \rightarrow +\infty$ ?

**1.65.** Nađite zajedničke tangente na krivulje

$$y + x^2 = -4$$

$$x^2 + y^2 = 4.$$

**1.66.** Odredite kut pod kojim se krivulje

$$y^2 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

$$xy^2 - 1 = 0$$

sijeku u prvom kvadrantu.

## 1.5 L'Hôpitalovo pravilo

**Teorem 6.** Neka je  $I \subseteq \mathbb{R}$  otvoreni interval,  $c \in I$  (može biti i  $c = \pm\infty$ ) i neka su  $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$  derivabilne funkcije takve da je  $g'(x) \neq 0$  na  $I \setminus \{c\}$ . Pretpostavimo da limes  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  postoji u  $\overline{\mathbb{R}}$  i da vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:

$$(a) \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = \infty.$$

Tada limes  $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$  postoji i vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

**Zadatak 1.67.** Izračunajte

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$(e) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{1 + x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$$

$$(f) \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 4x + 3}{2x^2 - 1}$$

$$(g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$$

*Rješenje.* Pri rješavanju koristimo L'Hopitalovo pravilo (u nastavku označeno s L'H).

(a) Primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo izravno:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Kao interval  $I$  u iskazu teorema možemo uzeti  $I = (-1, 1)$ . Kao i na MA1, za formalnu primjenu teorema potrebno je gornji izraz "čitati unazad". Naime, postojanje zadnjeg limesa opravdava primjenu L'Hopitalovog pravila u prvom koraku.

*Napomena:* Iako zadatak traži L'Hopitalovo pravilo i ono daje točan rezultat, ovo se smatra kružnim dokazom. Naime, da bismo znali da je derivacija od  $\sin x$  jednaka  $\cos x$ , moramo već unaprijed znati ovaj osnovni trigonometrijski limes.

(b) Primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo dva puta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Kao i na MA1, za formalnu primjenu teorema potrebno je gornji izraz "čitati unazad". Naime, postojanje zadnjeg limesa opravdava drugu primjenu L'Hopitalovog pravila, a tada postojanje predzadnjeg limesa, uz odabir intervala  $I = (-1, 1)$ , opravdava primjenu prvog L'Hopitalovog pravila.

(c) Prvo moramo preurediti izraz u oblik  $\frac{\infty}{\infty}$  spuštanjem  $e^{-x}$  u nazivnik:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(d) L'Hopitalovo pravilo primjenjujemo dok se ne riješimo neodređenosti (dva puta):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 4x + 3}{2x^2 - 1} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^2 - 4}{4x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{30x}{4} = +\infty$$

(e) Primjenjujemo pravilo i koristimo ulančavanje za derivaciju logaritma:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{1 + x} &= \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+e^x} \cdot e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

(f) Kotangens zapisujemo kao recipročnu vrijednost tangensa kako bismo dobili oblik  $\frac{0}{0}$ :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1^2}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

(g) Primjenjujemo pravilo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

□

**Zadatak 1.68.** U sljedećim primjerima izrazi ne zadovoljavaju neki od uvjeta L'Hopitalovog pravila. Odredite koji od uvjeta teorema nije zadovoljen i uvjerite se da se neispravnom primjenom L'Hopitalovog pravila dobije pogrešan rezultat.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{2x+3}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f(x)e^{\sin x}}, \text{ gdje je } f(x) = x + \sin x \cos x.$$

*Rješenje.* (a) Limes nije neodređenog oblika (nije ni  $\left[\frac{0}{0}\right]$  ni  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ ).

Budući da je funkcija neprekidna u nuli, izraza je jednak  $\frac{2}{3}$ . Primijenimo li L'Hospitalovo pravilo na neispravan način dobivamo krivi rezultat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{2x+3} \stackrel{\text{L'H (Krivo!)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)'}{(2x+3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Limes kvocijenta derivacija ne postoji.

Izraz jest oblika  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$  (jer  $x \rightarrow \infty$ , a sinus je omeđen). Primijenimo li deriviranje, dobivamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

Vrijednost kosinusa oscilira između  $-1$  i  $1$  kako  $x \rightarrow \infty$  pa ovaj limes ne postoji (formalno, promotrimo nizove  $x_n = 2n\pi$  i  $y_n = (2n+1)\pi$ ). S druge strane, dijeljenjem brojnika i nazivnika s  $x$  slijedi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

(c) Derivacija nazivnika prima vrijednost nula beskonačno mnogo puta u okolini točke  $+\infty$ .

Početni izraz je oblika  $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ . Lako je vidjeti da, skraćivanjem faktora  $f(x)$  (koji je za  $x > 1$  različit od 0), dobivamo  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\sin x}$ . Zbog oscilacije sinusa, taj limes ne postoji. Za formalni dokaz, promotrimo nizove  $x_n = 2n\pi$  i  $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ .

Pokažimo što se događa ako pokušamo primijeniti pravilo. Derivacija brojnika je

$$f'(x) = 1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x.$$

Nazivnik je  $g(x) = f(x)e^{\sin x}$ . Njegova derivacija je:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x} \cos x \\ &= 2 \cos^2(x)e^{\sin x} + (x + \sin x \cos x)e^{\sin x} \cos x \\ &= e^{\sin x} \cos x \cdot (2 \cos x + x + \sin x \cos x). \end{aligned}$$

Vidimo da je  $g'(x) = 0$  za svaki  $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ . Dakle, ne postoji interval  $(M, +\infty)$  na kojemu je nazivnik L'Hospitalovog razlomka različit od nule. Ipak, pogledamo li kvocijent derivacija na točkama gdje je  $\cos x \neq 0$ , imamo:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 \cos^2 x}{e^{\sin x} \cos x \cdot (2 \cos x + x + \sin x \cos x)} = \frac{2 \cos x}{e^{\sin x} (2 \cos x + x + \sin x \cos x)}.$$

Kada  $x \rightarrow \infty$ , brojnik je omeđen, a nazivnik teži u beskonačnost (jer dominira faktor  $x$ ). Dakle, neispravnom primjenom pravila zaključili bismo da je:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{L'H (Krivo!)}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

iako početni limes ne postoji. □

**Zadatak 1.69.** Izračunajte

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$

(e)  $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\cos \frac{\pi}{2} x}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

(f)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

*Rješenje.* (a) Prvo svodimo na zajednički nazivnik kako bismo dobili oblik  $\frac{0}{0}$  i zatim primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + (\cos x - x \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2(1) - 0} = 0. \end{aligned}$$

Prokomentirajmo primjene L'Hopitalovog pravila. Opravdajmo najprije drugu primjenu L'Hopitalovog pravila. Označimo nazivnik početnog razlomka s  $g(x) = x \sin x$ . Tada za nazivnik u drugoj primjeni pravila vrijedi  $g'(x) = \sin x + x \cos x$ , a njegova je derivacija

$$g''(x) = 2 \cos x - x \sin x.$$

Budući da je  $g''$  neprekidna u 0 i vrijedi  $g''(0) = 2 > 0$ , po teoremu o očuvanju predznaka neprekidne funkcije slijedi da postoji  $\delta_2 > 0$  tako da za sve  $x \in (-\delta_2, \delta_2)$  vrijedi

$$g''(x) > 0.$$

Tada možemo odabrati  $I_2 := (-\delta_2, \delta_2)$  kao traženu okolinu u drugoj primjeni L'Hopitalovog pravila.

Prelazimo sada na opravdanje prve primjene. Kao što smo vidjeli, vrijedi

$$g'(x) = \sin x + x \cos x$$

pa je potrebno dokazati da postoji interval  $I_1$  oko 0 tako da je  $g'(x) \neq 0$  za sve  $x \in I_1 \setminus \{0\}$ .

Budući da smo pokazali da je  $g''(x) > 0$  za sve  $x \in I_2$ , koristeći Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti za  $x \in I_2 \setminus \{0\}$ , vidimo da postoji  $y_x$  između 0 i  $x$  takav da vrijedi

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = g''(y_x) \implies g'(x) = xg''(y_x).$$

Kako je  $x \neq 0$  i  $g''(y_x) > 0$ , slijedi da je  $g'(x) \neq 0$ . Dakle, i u prvoj primjeni možemo uzeti interval  $I_1 = I_2$ .

*Napomena.* U komentaru nakon rješenja vidjet ćemo da zapravo nije potrebno opravdavati postojanje intervala na kojem je derivacija različita od 0 ukoliko primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo više puta i tvrdnja vrijedi u zadnjem koraku.

(b) Svodimo izraz na zajednički nazivnik i primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{(x+1)\ln(x+1) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+1)\ln(x+1) + x} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x+1) + 1 + 1} = \frac{1}{\ln 1 + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c) Primijetimo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$$

Sada računamo samo limes eksponenta, koji je oblika  $0 \cdot (-\infty)$ . Spuštanjem varijable  $x$  u nazivnik dobivamo oblik pogodan za L'Hopitalovo pravilo:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[ \frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Konačno, koristeći neprekidnost funkcije  $x \mapsto e^x$  u 0 slijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

*Napomena.* Primijetimo da smo limes funkcije  $x \ln x$  u prethodnom zadatku mogli pokušati riješiti i tako da prebacimo  $\ln x$  u nazivnik na sljedeći način:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \ln^2 x).$$

Međutim, posljednji izraz još je kompliciraniji od početnog. Zašto se to dogodilo? Kada  $\ln x$  ostavimo u brojniku, deriviranje ga pretvara u jednostavan algebarski izraz  $\frac{1}{x}$ , dok deriviranje razlomka  $\frac{1}{\ln x}$  zbog pravila ulančavanja povećava potenciju logaritma u nazivniku i dodatno komplicira izraz. Pouka je da ukoliko jedna primjena L'Hopitalovog pravila ne riješi problem, možemo pokušati primijeniti ga na drugačiji način, koji može biti bolji.

(d) Ponovno zapisujemo izraz pomoću baze  $e$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

Računamo limes eksponenta, koji je odmah oblika  $\frac{\infty}{\infty}$ :

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Koristeći neprekidnost funkcije  $x \mapsto e^x$  u 0, slijedi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

(e) Zapisujemo pomoću baze  $e$ :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\cos \frac{\pi}{2} x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\cos(\frac{\pi}{2} x) \ln(1-x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^-} \cos(\frac{\pi}{2} x) \ln(1-x)}$$

Limes eksponenta je oblika  $0 \cdot (-\infty)$ . Prebacujemo kosinus u nazivnik kako bismo dobili recipročnu funkciju (sekans) i oblik  $\frac{-\infty}{\infty}$  i primijenili L'Hopitalovo pravilo:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2} x)}} = \left[ \frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2} x)}{\cos^2(\frac{\pi}{2} x)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2 \cos^2(\frac{\pi}{2} x)}{\pi(1-x) \sin(\frac{\pi}{2} x)}.$$

Kako bismo si olakšali daljnji račun, razdvojimo limes na dio koji uvrštavanjem ne daje nulu i dio koji daje neodređenost  $\frac{0}{0}$ :

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{\pi \sin(\frac{\pi}{2} x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} x)}{1-x}$$

Prvi limes teži u  $\frac{-2}{\pi \cdot 1} = -\frac{2}{\pi}$ . Na drugi limes primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2} x)}{1-x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \cos(\frac{\pi}{2} x) \cdot (-\sin(\frac{\pi}{2} x)) \cdot \frac{\pi}{2}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Ukupni limes eksponenta je  $L = -\frac{2}{\pi} \cdot 0 = 0$ . Vraćamo u eksponent:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\cos \frac{\pi}{2} x} = e^0 = 1$$

(f) Prelazimo na bazu  $e$ :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x^2)}$$

Računamo limes eksponenta (oblik  $\frac{\infty}{\infty}$ ):

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x} = 0$$

Vraćamo rezultat u eksponent:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

□

**Zadatak 1.70.** Odredite limese, ako postoje

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^n}, n \in \mathbb{N}, a > 0$

(b)  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(x-1)$

(d)  $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^{10} \sin x) \frac{\arcsin x - \operatorname{Arsh} x}{x^3}$

*Rješenje.* (a) Primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo deriviranjem brojnika i nazivnika. Kako bismo izbjegli komplicirane dvojne razlomke, derivacije funkcija  $\arcsin x$  i  $\operatorname{arctg} x$  zapisat ćemo pomoću negativnih eksponenata:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} &= \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-1/2} - (1+x^2)^{-1}}{3x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x) - (-1)(1+x^2)^{-2}(2x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)^{-3/2} + 2x(1+x^2)^{-2}}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-3/2} + 2(1+x^2)^{-2}}{6} = \frac{1^{-3/2} + 2 \cdot 1^{-2}}{6} = \frac{1+2}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Zapisat ćemo umnožak kao razlomak.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \left[ \frac{-\infty}{\infty} \right]$$

Primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo:

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x \ln^2 x}{x-1} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &= \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x})}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -(\ln^2 x + 2 \ln x) = 0 \end{aligned}$$

- (c) Ovo je klasičan primjer u kojem se L'Hopitalovo pravilo primjenjuje višekratno. Budući da je  $n \in \mathbb{N}$ , nakon svake primjene pravila stupanj polinoma u nazivniku se smanjuje za 1, dok eksponencijalna funkcija u brojniku (uz konstantu  $a$ ) ostaje suštinski ista:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ae^{ax}}{nx^{n-1}} = \left[ \frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \dots$$

Nakon  $n$  uzastopnih primjena L'Hopitalovog pravila, nazivnik će se derivirati u konstantu  $n!$ , a u brojniku će iskočiti  $a^n$ :

$$\stackrel{n \times \text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^n e^{ax}}{n!}$$

Budući da je  $a > 0$ , funkcija  $e^{ax}$  teži u  $+\infty$  kada  $x \rightarrow +\infty$ . Kako je nazivnik strogo pozitivna konstanta ( $n!$ ), limes iznosi:

$$= +\infty$$

- (d) Prije ikakvog deriviranja, razdvojimo limes na umnožak dvaju limesa jer prvi faktor trivijalno možemo izračunati uvrštavanjem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^{10} \sin x) \frac{\arcsin x - \text{Arsh } x}{x^3} = \underbrace{\left( \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^{10} \sin x) \right)}_{=\cos(0)=1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \text{Arsh } x}{x^3}$$

Sada nam ostaje riješiti samo drugi limes, koji je oblika  $\frac{0}{0}$ . Kao i u (a) dijelu, koristimo negativne eksponente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \text{Arsh } x}{x^3} &= \left[ \frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-1/2} - (1+x^2)^{-1/2}}{3x^2} = \left[ \frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x) - (-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}(2x))}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)^{-3/2} + x(1+x^2)^{-3/2}}{6x} \\ &= \frac{1^{-3/2} + 1^{-3/2}}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Početni je limes, po teoremu o limesu produkta, jednak  $1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$ .

□

## Zadaci za vježbu

1.71. Izračunajte

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\text{ctg } x}$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$$

**1.72.** Izračunajte

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}, n \in \mathbb{N}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x}, n \in \mathbb{N}$$

**1.73.** Izračunajte

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \cos \frac{1}{x} \right)^x$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x}$$

**1.74.** Izračunajte

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x^3 + x^2 + x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arcsin} \sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}, n \in \mathbb{N}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x}{e^x - \cos x}, n \in \mathbb{N}$$

**1.75.** Može li se primijeniti L'Hôpitalovo pravilo na

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} ?$$

Izračunajte gornji limes.

**1.76.** Izračunajte

(a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

(c)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \sqrt{1 + x^2 \ln \frac{ex}{x+1}} - x \right)$

(d)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left( x - x^2 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) \right)$