
MATEMATIČKA ANALIZA II

VJEŽBE

15. travnja 2026.

Sadržaj

1	Derivacija	5
1.1	Derivacije elementarnih funkcija	5
1.2	Derivacija inverznih i implicitno zadanih funkcija	13
1.3	Derivacije višeg reda	23
1.4	Tangenta i normala	37
1.5	L'Hôpitalovo pravilo	45
1.6	Proširenja po neprekidnosti / derivabilnosti	55
1.7	Pad i rast. Ekstremi	63
1.8	Asimptote. Konveksnost i konkavnost. Infleksija	77
1.9	Isptivanje toka funkcije	85

1 Derivacija

1.1 Derivacije elementarnih funkcija

Neka je $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija, $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $c \in I$. Kažemo da je f **derivabilna** u c ako postoji limes

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$$

i taj limes označavamo s $f'(c)$. Još se koriste i oznake $Df(c)$ i $\frac{df}{dx}(c)$. Primijetimo da je definicija također ekvivalentna s postojanjem limesa

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c+t) - f(c)}{t}.$$

Zadatak 1.1. Koristeći definiciju, odredite derivaciju funkcija:

(a) $f(x) = \alpha = \text{const.}$

(c) $f(x) = \frac{1}{x}$

(b) $f(x) = x$

(d) $f(x) = \cos x$

Rješenje. (a)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\alpha - \alpha}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} 0 = 0.$$

(b)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{x - c}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} 1 = 1.$$

(c)

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{c}}{x - c} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{-1}{xc} = -\frac{1}{c^2}.$$

(d) Koristimo limese dokazane na MA1: $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ i $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{t^2} = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(c+t) - f(c)}{t} &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(c+t) - \cos(c)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\cos(c)\cos(t) - \sin(c)\sin(t) - \cos(c)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \left(\cos(c) \cdot \frac{\cos(t) - 1}{t} - \sin(c) \cdot \frac{\sin(t)}{t} \right) \\ &= -\sin c \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.2. Nađite primjer funkcije koja je neprekidna, a nije derivabilna.

Rješenje. Primjer jedne takve funkcije je $f(x) = |x|$. Naime, u točki $c = 0$ vrijedi

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(0+t) - f(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{|t|}{t} = 1 \neq -1 = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{|t|}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(0+t) - f(0)}{t}$$

pa funkcija nije derivabilna u 0.

□

Teorem 1. *Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval. Ako su funkcije $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilne na I i $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tada su i funkcije $\alpha f + \beta g$, $f \cdot g$ derivabilne i vrijedi*

$$\begin{aligned} (\alpha f + \beta g)'(c) &= \alpha f'(c) + \beta g'(c) \\ (f \cdot g)'(c) &= f'(c) \cdot g(c) + f(c) \cdot g'(c). \end{aligned}$$

Ako je dodatno $g'(c) \neq 0$, tada je i funkcija $\frac{f}{g}$ derivabilna u c i vrijedi

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(c) = \frac{f'(c) \cdot g(c) - f(c) \cdot g'(c)}{g^2(c)}$$

Zadatak 1.3. Derivirajte sljedeće funkcije:

(a) $f(x) = x^5 - 4x^3 + 2x - 3$

(f) $f(x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

(b) $f(x) = \frac{ax^6 + b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$, $a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 \neq 0$

(g) $f(x) = e^x \arcsin x$

(c) $f(x) = 3\sqrt{x}$

(h) $f(x) = \arctg x + \text{arcctg } x$

(d) $f(x) = 3x^{\frac{2}{3}} - 2x^{\frac{5}{2}} + x^{-3}$

(i) $f(x) = 2^x \cdot x$

(e) $f(x) = \frac{2x + 3}{x^2 - 5x + 5}$

(j) $f(x) = \arcsin x \cdot \text{Arsh } x$

Derivacija kompozicije funkcija

Teorem 2. Neka su $I, J \subset \mathbb{R}$ otvoreni intervali i $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, $g : J \rightarrow \mathbb{R}$ funkcije takve da je $f(I) \subset J$. Ako je f diferencijabilna u c i g diferencijabilna u $d = f(c)$, tada je $g \circ f$ diferencijabilna u c i vrijedi

$$(g \circ f)'(c) = g'(f(c)) \cdot f'(c).$$

Napomena. Iz prethodnog teorema, matematičkom indukcijom se lako pokaže da vrijedi

$$(f_n \circ \cdots \circ f_1)'(c) = f_n'(f_{n-1} \circ \cdots \circ f_1(c)) \cdot f_{n-1}'(f_{n-2} \circ \cdots \circ f_1(c)) \cdots f_1'(c).$$

Dakle, postupak deriviranja kompozicije više funkcija "algoritamski" upamtiti kao: "deriviramo vanjsku funkciju, uvrstimo unutrašnju i nastavljamo postupak dok god postoji unutrašnja za derivirati."

Zadatak 1.4. Koristeći pravilo za derivaciju kompozicije funkcija (*chain rule*), derivirajte sljedeće funkcije:

- | | |
|---|--|
| (a) $f(x) = \left(\frac{2x+3}{5}\right)^8$ | (i) $f(x) = \left(\frac{1+2x^{20}}{1-2x^{20}}\right)^{100}$ |
| (b) $f(x) = e^{\sin^2 x}$ | (j) $f(x) = \ln \ln(3 - 2x^2)$ |
| (c) $f(x) = \sqrt{\operatorname{ctg} x}$ | (k) $f(x) = \arccos e^{x^2}$ |
| (d) $f(x) = \sqrt{1 + \arcsin x}$ | (l) $f(x) = \frac{\sqrt{2x^2 - 2x + 1}}{x}$ |
| (e) $f(x) = \sqrt{xe^x + x^2}$ | (m) $f(x) = \ln(\sqrt{1 + e^x} - 1) - \ln(\sqrt{1 + e^x} + 1)$ |
| (f) $f(x) = \sqrt[3]{2e^x - 2^x + 1} + \ln^5 x$ | (n) $f(x) = \ln \frac{(x-2)^5}{(x+1)^3}$ |
| (g) $f(x) = \frac{1}{5x^2}$ | |
| (h) $f(x) = \log \sin x$ | |

Rješenje. (a) Zapišemo $f = g \circ h$, gdje je

$$g(x) = x^8, \quad h(x) = \frac{2x+3}{5}$$

pa vrijedi

$$g'(x) = 8x^7, \quad h'(x) = \frac{2}{5}.$$

Dakle

$$f'(x) = g'(h(x))h'(x) = 8\left(\frac{2x+3}{5}\right)^7 \cdot \frac{2}{5} = \frac{16}{5}\left(\frac{2x+3}{5}\right)^7$$

(b) Funkciju možemo zapisati kao $f = f_3 \circ f_2 \circ f_1$, gdje su

$$f_1(x) = \sin x, \quad f_2(x) = x^2, \quad f_3(x) = e^x$$

pa vrijedi

$$f'_1(x) = \cos x, \quad f'_2(x) = 2x, \quad f'_3(x) = e^x.$$

Dakle,

$$f'(x) = f'_3(f_2(f_1(x))) \cdot f'_2(f_1(x)) \cdot f'_1(x) = e^{\sin^2 x} \cdot 2 \sin x \cdot \cos x$$

$$(c) f'(x) = \frac{-1}{\sin^2 x \sqrt{\operatorname{ctg} x}}$$

$$(d) f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{(1-x^2)(1+\arcsin x)}}$$

$$(e) f'(x) = \frac{(x+1)e^x + 1}{2\sqrt{(x+1)e^x}}$$

$$(f) f'(x) = \frac{2e^x - 2^x \ln 2}{3\sqrt[3]{(2e^x - 2^x + 1)^2}} + \frac{5 \ln^4 x}{x}$$

$$(g) f'(x) = -2x^5 e^{-2x} \ln 5$$

$$(h) f'(x) = \frac{\tan x}{\ln 10}$$

$$(i) f'(x) = 100 \left(\frac{1+2x^{20}}{1-2x^{20}} \right)^{99} \cdot \frac{80x^{19}}{(1-2x^{20})^2}$$

$$(j) f'(x) = \frac{-4x}{(3-2x^2) \ln(3-2x^2)}$$

$$(k) f'(x) = \frac{-2xe^{x^2}}{\sqrt{1-e^{2x^2}}}$$

$$(l) f'(x) = \frac{x-1}{x^2 \sqrt{2x^2 - 2x + 1}}$$

□

Zadatak 1.5. Derivirajte sljedeće funkcije:

$$(a) f(x) = x^x, \text{ za } x > 0$$

$$(e) f(x) = x^{x^x}, \text{ za } x > 0$$

$$(b) f(x) = (\sin x)^{\cos x}, \text{ za } \sin x > 0$$

$$(f) f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$(c) f(x) = x^3 e^{x^2} \sin 2x$$

$$(g) f(x) = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}}$$

$$(d) f(x) = x^{\frac{1}{x}}, \text{ za } x > 0$$

Rješenje. (a) Zapišimo funkciju u obliku baze e :

$$f(x) = e^{x \ln x}$$

Deriviramo kao kompoziciju funkcija (lančano pravilo):

$$f'(x) = e^{x \ln x} \cdot (x \ln x)'$$

Primijenimo pravilo produkta na eksponent i vratimo početni oblik $e^{x \ln x} = x^x$:

$$f'(x) = x^x \cdot \left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = x^x (\ln x + 1)$$

(b) Zapišimo funkciju u obliku baze e :

$$f(x) = e^{\cos x \ln(\sin x)}$$

Deriviramo kompoziciju:

$$f'(x) = e^{\cos x \ln(\sin x)} \cdot (\cos x \ln(\sin x))'$$

Primjenjujemo pravilo produkta i vraćamo početni oblik:

$$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left(-\sin x \cdot \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{1}{\sin x} \cdot \cos x \right)$$

$$f'(x) = (\sin x)^{\cos x} \left(\frac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln(\sin x) \right)$$

(c) Ova funkcija je umnožak triju funkcija, pa možemo direktno primijeniti generalizirano pravilo produkta $(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$:

$$f'(x) = (x^3)'e^{x^2} \sin(2x) + x^3(e^{x^2})' \sin(2x) + x^3 e^{x^2} (\sin(2x))'$$

$$f'(x) = 3x^2 e^{x^2} \sin(2x) + x^3 (e^{x^2} \cdot 2x) \sin(2x) + x^3 e^{x^2} (\cos(2x) \cdot 2)$$

Izlučimo zajednički faktor $x^2 e^{x^2}$:

$$f'(x) = x^2 e^{x^2} (3 \sin(2x) + 2x^2 \sin(2x) + 2x \cos(2x))$$

(d) Zapišimo u obliku baze e :

$$f(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

Deriviramo kompoziciju:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x} \ln x} \cdot \left(\frac{1}{x} \ln x \right)'$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \left(-\frac{1}{x^2} \cdot \ln x + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = x^{\frac{1}{x}} \left(\frac{1 - \ln x}{x^2} \right)$$

(e) Zapišimo u obliku baze e :

$$f(x) = e^{x^x \ln x}$$

Deriviramo kompoziciju:

$$f'(x) = e^{x^x \ln x} \cdot (x^x \ln x)'$$

Za derivaciju od x^x koristimo već dobiveni rezultat iz podzadatka (a): $(x^x)' = x^x(\ln x + 1)$.

$$f'(x) = x^{x^x} ((x^x)' \cdot \ln x + x^x \cdot (\ln x)')$$

$$f'(x) = x^{x^x} \left(x^x(\ln x + 1) \cdot \ln x + x^x \cdot \frac{1}{x} \right)$$

$$f'(x) = x^{x^x} (x^x \ln x(\ln x + 1) + x^{x-1})$$

(f) Zapišimo u obliku baze e :

$$f(x) = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})}$$

Deriviramo kompoziciju:

$$f'(x) = e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} \cdot \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)'$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \left(1 \cdot \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x}} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right)$$

Sredimo izraz u zagradi:

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) + x \cdot \frac{x}{x+1} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right)$$

$$f'(x) = \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x \left(\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{1}{x+1} \right)$$

(g) Ovaj zadatak može se riješiti koristeći pravilo produkta i kvocijenta. Međutim, budući da je izraz na prirodnoj domeni pozitivan, iskoristit ćemo tzv. “logaritamsko deriviranje”, tj. logaritmirat ćemo obje strane da produkt pređe u zbroj i zatim derivirati zbroj.

Logaritmiranjem obje strane slijedi

$$\begin{aligned} \ln f(x) &= \ln \left(\frac{(x+1)^3(x-2)^{\frac{1}{4}}}{(x-3)^{\frac{2}{5}}} \right) \\ &= 3 \ln(x+1) + \frac{1}{4} \ln(x-2) - \frac{2}{5} \ln(x-3) \end{aligned}$$

Deriviranjem obje strane dobijemo:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)}.$$

Konačno, slijedi

$$f'(x) = \frac{(x+1)^3 \sqrt[4]{x-2}}{\sqrt[5]{(x-3)^2}} \left(\frac{3}{x+1} + \frac{1}{4(x-2)} - \frac{2}{5(x-3)} \right)$$

□

Napomena. U gornjim rješenjima koristili smo zapis u kojem izraz za funkciju napišemo u zagradi i samo crticu izvan zagrade za oznaku derivacije, podrazumijevajući da tražimo derivaciju navedene funkcije ovisne u x u točki x . Na primjer, pisali smo

$$(x \ln x)' = \ln x + 1.$$

Taj zapis matematički nije korektan budući da iz njega nije jasno niti po kojoj varijabli deriviramo niti u kojoj točki izvrjednjavamo derivaciju, ali korist ćemo ga radi sažetosti zapisa kada nema mogućnosti zabune.

Objasnimo primjerom u čemu je problem. Neka je $a \in \mathbb{R}$ realan broj, neka je $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija definirana s $f(x) = a \cdot x \ln x$ i zanima nas formula za funkciju $g(x) := f'(x^2)$. Treba biti oprezan s gornjim zapisom budući da to nije isto što i $(a \cdot x^2 \ln x^2)'$ niti je korektno pisati $(a \cdot x \ln x)'(x^2)$ budući da iz toga nije jasno deriviramo li po varijabli x ili po a i ne možemo koristiti isti zapis za varijablu po kojoj deriviramo i fiksni broj koji uvrštavamo.

Ukoliko ne želimo uvoditi poseban naziv za funkciju $x \mapsto a \cdot x \ln x$, potrebno je uvesti “privremenu varijablu” (engl. dummy variable) i koristiti neku od sljedećih notacija

$$\left. \frac{d}{dt}(a \cdot t \ln t) \right|_{t=x^2} \quad \text{ili} \quad [D_t(a \cdot t \ln t)](x^2).$$

Zadaci za vježbu

1.6. Derivirajte sljedeće funkcije:

(a) $f(x) = \arcsin \frac{1}{x^2}$

(b) $f(x) = \sqrt{e^{10x}}$

(c) $f(x) = \left(\frac{\arcsin x}{\arccos x} \right)^5$

(d) $f(x) = \sin((\sin x)^{\sin x})$, za $\sin x > 0$

(e) $f(x) = \underbrace{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{\cdots x \sqrt{x}}}}}_{n \text{ korijena}}$

$$(f) f(x) = \ln \sqrt[4]{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}} + \frac{1}{2\sqrt{3}} \left(\operatorname{arctg} \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$(g) f(x) = (x^{x^x})^{x^x}, \text{ za } x > 0$$

$$(h) f(x) = (\sin x - 1)^{\cos x + 1} + (\sin x + 1)^{1 - \cos x}$$

$$(i) f(x) = \sqrt{\ln \cos \arcsin x}$$

1.7. Derivirajte sljedeće funkcije:

$$(a) f(x) = e^{\sqrt{\frac{1 - \sin x}{1 + \sin x}}}$$

$$(b) f(x) = \ln(2 + e^{-x} + \sqrt{e^x + e^{-x} + 4})$$

$$(c) f(x) = (\arcsin x)^{\operatorname{arctg} x}$$

$$(d) f(x) = x \sin^2 3x \cos^3 \frac{x}{2}$$

$$(e) f(x) = \ln \frac{x + \cos \sqrt{\pi x}}{x - \cos \sqrt{\pi x}} + \frac{1}{3} \arcsin \ln 2x$$

1.8. Za koji $a \in \mathbb{R}$ funkcija $f(x) = \frac{1 + \ln x}{x - x \ln x}$ zadovoljava jednakost

$$2x^2 f'(x) - x^2 f(x)^2 = a?$$

1.9. Pokažite da funkcija $f(x) = \frac{1}{1 + x + \ln x}$ zadovoljava jednakost

$$x f'(x) = f(x)(f(x) \ln x - 1).$$

1.2 Derivacija inverznih i implicitno zadanih funkcija

Teorem 3. Neka je $I \subset \mathbb{R}$ otvoren interval i $f : I \rightarrow J$ neprekidna bijekcija. Ako f ima derivaciju u točki $c \in I$ i ako je $f'(c) \neq 0$, tada je f^{-1} diferencijabilna u točki $d = f^{-1}(c)$ i vrijedi

$$(f^{-1})'(d) = \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}.$$

Napomena. Ukoliko vjerujemo da teorem vrijedi, formulu derivacije možemo vrlo brzo izvesti na sljedeći način.

Po definiciji inverzne funkcije za sve $y \in J$ vrijedi

$$f \circ f^{-1}(y) = y.$$

Deriviranjem obje strane po y i korištenjem pravila za derivaciju kompozicije slijedi

$$f'(f^{-1}(y)) \cdot (f^{-1})'(y) = 1,$$

iz čega sređivanjem slijedi

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}.$$

Zadatak 1.10. Koristeći pravilo o deriviranju inverzne funkcije, nađite derivaciju funkcija:

(a) $f(x) = \arcsin x$

(c) $f(x) = \ln x$

(b) $f(x) = \operatorname{arctg} x$

(d) $f(x) = \operatorname{Arsh} x$

Rješenje. (a) Vidimo da je $f(x) = g^{-1}(x)$, gdje je $g(x) = \sin x$. Prema pravilu o deriviranju inverzne funkcije slijedi:

$$f'(x) = \frac{1}{\cos g^{-1}(x)} = \frac{1}{\cos(\arcsin x)}$$

Iz trigonometrijskog identiteta $\sin^2 y + \cos^2 y = 1$ slijedi $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$ (uzimamo pozitivni korijen jer je kodomena funkcije \arcsin interval $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ gdje je kosinus nenegativan) pa dobivamo

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2(\arcsin x)}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

(b) Primijenimo pravilo:

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 f(x)}} = \cos^2 f(x).$$

Izrazimo $\cos^2 y$ preko x . Znamo da je $\frac{1}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y + \cos^2 y}{\cos^2 y} = \operatorname{tg}^2 y + 1$. Iz toga slijedi:

$$\cos^2 f(x) = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(c) Primijenimo pravilo:

$$f'(x) = \frac{1}{e^{f(x)}} = \frac{1}{x}.$$

(d) Primijenimo pravilo:

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch} f(x)}$$

Iz osnovnog hiperbolnog identiteta $\operatorname{ch}^2 y - \operatorname{sh}^2 y = 1$ slijedi $\operatorname{ch} y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 y}$ (uzimamo pozitivni korijen jer je $\operatorname{ch} y > 0$ za svaki realni broj). Supstitucijom $\operatorname{sh} y = x$ dobivamo:

$$\operatorname{ch} \operatorname{Arsh} x = \sqrt{1 + x^2}$$

Konačno rješenje je:

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}.$$

□

Zadatak 1.11. Zadana je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + e^x$. Pokažite da je f injekcija i izračunajte $(f^{-1})'(2 + \ln 2)$.

Rješenje. Da bismo pokazali da je funkcija injekcija, dovoljno je pokazati da je strogo monotona na cijeloj svojoj domeni. To možemo provjeriti pomoću prve derivacije. Deriviramo zadanu funkciju $f(x) = x + e^x$:

$$f'(x) = 1 + e^x$$

Znamo da je eksponencijalna funkcija e^x strogo pozitivna na domeni pa za sve $x \in \mathbb{R}$ slijedi

$$f'(x) = 1 + e^x > 1 > 0.$$

Budući da je prva derivacija strogo pozitivna na cijeloj domeni, po teoremu s predavanja (posljedica Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti), funkcija f je strogo rastuća pa je injekcija. Dakle, f^{-1} postoji.

Pravilo za derivaciju inverzne funkcije u točki y_0 glasi:

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

gdje je $f(x_0) = y_0$. Zadano nam je $y_0 = 2 + \ln 2$. Moramo pronaći odgovarajući x_0 rješavanjem jednadžbe:

$$x_0 + e^{x_0} = 2 + \ln 2$$

Ovu jednadžbu možemo jednostavno riješiti opservacijom (metodom pokušaja i pogreške za očite vrijednosti). Znamo da vrijedi $e^{\ln 2} = 2$. Ako pretpostavimo da je $x_0 = \ln 2$, i uvrstimo u lijevu stranu, dobivamo:

$$\ln 2 + e^{\ln 2} = \ln 2 + 2 = 2 + \ln 2$$

Kako je funkcija f injekcija, ovo je jedinstveno rješenje, pa je naš $x_0 = \ln 2$.

Dakle,

$$f'(\ln 2) = 1 + e^{\ln 2} = 3$$

pa koristeći pravilo o deriviranju inverzne funkcije slijedi

$$(f^{-1})'(2 + \ln 2) = \frac{1}{f'(\ln 2)} = \frac{1}{3}.$$

□

Derivacije implicitno zadanih funkcija

Razjasnimo najprije što je “implicitno zadana funkcija”. Prisjetimo se, za $I \subset \mathbb{R}$, graf funkcije $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ podskup je Kartezijevog produkta, tj.

$$\Gamma_f := \{(x, y) \in I \times \mathbb{R} : y = f(x)\} = \{(x, f(x)) : x \in I\}.$$

Međutim, već i najosnovnije krivulje koje susrećemo, kao što je kružnica, nisu tog oblika. Naime, jedinična kružnica S^1 je skup točaka

$$S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1\}.$$

Navedeni skup nije moguće prikazati kao graf funkcije budući da za jedan $x \in (-1, 1)$ postoje dvije vrijednosti y koje zadovoljavaju uvjet zadatka, pa krivulja ne zadovoljava tzv. vertikalni test.

U slučaju kružnice možemo cijeli skup iskazati kao uniju grafa dviju funkcija $f_{1,2} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f_1(x) = \sqrt{1 - x^2}$ i $f_2(x) = -\sqrt{1 - x^2}$. Slično tako, skup možemo prikazati i kao uniju dvaju grafova funkcija x po y , tj. $g_{1,2} : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ $g_1(y) = \sqrt{1 - y^2}$, $g_2(y) = -\sqrt{1 - y^2}$.

Međutim, za malo kompliciranije izraze nije uvijek moguće jednu varijablu eksplicitno iskazati po drugoj, ali željeli bismo i dalje moći računati derivacije tako zadanih krivulja.

Općenito, ukoliko je zadana funkcija dvije varijable, $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, želimo proučavati skupove oblika

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\}. \quad (1.1)$$

Kružnica je primjer takvog skupa uz $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$.

Za iskaz osnovnog rezultata trebamo napraviti malu digresiju i uvesti pojam parcijalne derivacije.

Parcijalnu derivaciju po prvoj varijabli u točki (c_x, c_y) definiramo kao derivaciju funkcije po x , uz uvjet da je y konstantno jednak c_y , tj.

$$\partial_1 F(c_x, c_y) := \left. \frac{d}{dt} F(t, c_y) \right|_{t=c_x} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(c_x + t, c_y) - F(c_x, c_y)}{t}.$$

Analogno tome definiramo parcijalnu derivaciju po y :

$$\partial_2 F(c_x, c_y) := \left. \frac{d}{dt} F(c_x, t) \right|_{t=c_y} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F(c_x, c_y + t) - F(c_x, c_y)}{t}.$$

U slučaju da koristimo x i y za varijable, možemo pisati $\partial_x F$ umjesto $\partial_1 F$ i $\partial_y F$ umjesto $\partial_2 F$

Na primjer, za $F(x, y) = x^2 + 10xy + y^2$ vrijedi

$$\partial_1 F(x, y) = 2x + 10y \quad \text{i} \quad \partial_2 F(x, y) = 10x + 2y.$$

Sljedeći teorem, koji će biti dokazan na drugoj godini, kaže da je uz minimalne uvjete moguće zaključiti da se skup S oblika (1.1) na okolini točke može zapisati kao funkcija jedne varijable po drugoj.

Navodimo specijalan slučaj teorema o implicitnoj funkciji. Značenje pojma da je F klase C^1 ne možemo definirati u ovom trenutku, ali funkcije u zadacima zadovoljavat će to svojstvo.

Teorem 4 (Teorem o implicitnoj funkciji). *Neka su $I, J \subset \mathbb{R}$ otvoreni intervali i neka je $F : I \times J \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija klase C^1 . Ako u točki $(x_0, y_0) \in I \times J$ vrijedi $F(x_0, y_0) = 0$ i $\partial_2 F(x_0, y_0) \neq 0$, tada postoje otvoreni intervali $I' \subset I$, $J' \subset J$, takvi da je $x_0 \in I'$ i jedinstvena funkcija $f : I' \rightarrow J'$ takva da vrijedi $f(x_0) = y_0$ i vrijedi*

$$\{(x, y) \in I' \times J' : F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in I'\}.$$

Dodatno, vrijedi $f \in C^1(I')$ i derivacija zadovoljava

$$f'(x) = -\frac{\partial_1 F(x, f(x))}{\partial_2 F(x, f(x))}.$$

U prijevodu, na okolini točke (x_0, y_0) skup S može se prikazati kao graf funkcije y u ovisnosti o x . Analogno, ako je $\partial_1 F(x_0, y_0) \neq 0$, tada postoje intervali kao u iskazu teorema i jedinstvena funkcija $g : J' \rightarrow I'$ klase $C^1(J')$ takva da je $g(y_0) = x_0$ i vrijedi

$$\{(x, y) \in I' \times J' : F(x, y) = 0\} = \{(g(y), y) : y \in J'\}.$$

Dodatno, $g \in C^1(J')$ i derivacija zadovoljava

$$g'(y) = -\frac{\partial_2 F(g(y), y)}{\partial_1 F(g(y), y)}.$$

Pokažimo korištenje prethodnog rezultata na primjerima.

Važno! Zadaci u nastavku riješeni su detaljno radi potpunosti. Međutim, za polaganje ovog kolegija dovoljno je razumjeti samo tehniku deriviranja funkcije i nije potrebno provjeravati uvjete teorema o implicitnoj funkciji.

Zadatak 1.12. Funkcija $y = y(x)$ zadovoljava jednadžbu

$$x^2 + y^2 = 25.$$

Izračunajte

(a) $y'(0)$

(b) $y'(3)$, ako je $y(3) < 0$

Rješenje. Zadatak ćemo riješiti na dva načina.

Neka je

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 25.$$

Provjeru uvjeta $F \in C^1(\mathbb{R}^2)$ izostavljamo.

Računamo:

$$\partial_2 F(x, y) = \partial_y F(x, y) = \partial_y(x^2 + y^2) = 2y.$$

Odredimo točke koje se traže u zadatku:

- (a) Za $x = 0$ vrijedi $0^2 + y^2 = 25 \implies y = \pm 5$. Promatramo točke $(0, 5)$ i $(0, -5)$. U obje točke je $\partial_y F(0, \pm 5) = \pm 10 \neq 0$.

Kako su uvjeti teorema o implicitnoj funkciji ispunjeni i u točki $(0, 5)$ i $(0, -5)$, postoje intervali $I' \ni 0$, $J' \ni 5$ (odnosno $J' \ni -5$) i jedinstvena funkcija $f : I' \rightarrow J'$ takva da je $f(0) = 5$ (odnosno $f(0) = -5$), takva da je $x^2 + f(x)^2 = 25$. Međutim, kako je $y = y(x)$ jedna takva funkcija, vrijedi $y = f$. Po teoremu je f derivabilna u 0 pa je i y derivabilna u 0.

- (b) Za $x = 3$ vrijedi $3^2 + y^2 = 25 \implies y^2 = 16$. Zbog uvjeta $y(3) < 0$, primjenjujemo teorem na točku $(3, -4)$. U njoj je $\partial_y F(3, -4) = -8 \neq 0$.

Kako su uvjeti teorema o implicitnoj funkciji ispunjeni u točki $(3, -4)$, postoje intervali $I' \ni 3$, $J' \ni -4$ i jedinstvena funkcija $f : I' \rightarrow J'$ takva da je $f(3) = -4$ i da vrijedi $x^2 + f(x)^2 = 25$. Međutim, kako je y jedna takva funkcija, vrijedi $y = f$. Po teoremu je f derivabilna u 3 pa je i y derivabilna u 3.

Računamo sad derivacije.

1. način. Korištenjem formule iz teorema

Izračunajmo parcijalnu derivaciju po x :

$$\partial_x F(x, y) = 2x$$

Prema teoremu, derivacija implicitno zadane funkcije je:

$$y'(x) = -\frac{\partial_x F(x, y)}{\partial_y F(x, y)} = -\frac{2x}{2y} = -\frac{x}{y}$$

(a) Za $x = 0$ i $y = \pm 5$ dobivamo:

$$y'(0) = -\frac{0}{\pm 5} = 0$$

(b) Za točku $(3, -4)$ dobivamo:

$$y'(3) = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}$$

2. način. Implicitnim deriviranjem jednadžbe

Derivirajmo jednadžbu $x^2 + y^2 = 25$ po varijabli x , tretirajući y kao složenu funkciju ovisnu o x :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(x^2 + y^2) &= \frac{d}{dx}(25) \\ 2x + 2y \cdot y' &= 0 \end{aligned}$$

Izrazimo y' :

$$2yy' = -2x \implies y' = -\frac{x}{y}$$

Dobili smo identičan izraz za derivaciju. Računanjem dobivamo iste vrijednosti:

(a) Uvrstimo $x = 0$: $2(0) + 2y \cdot y' = 0 \implies 2y \cdot y' = 0$. Kako je $y = \pm 5 \neq 0$, slijedi $y'(0) = 0$.

(b) Uvrstimo $x = 3, y = -4$: $2(3) + 2(-4)y' = 0 \implies 8y' = 6 \implies y'(3) = \frac{3}{4}$.

Napomena. U nastavku ćemo koristiti drugi način iz prethodnog zadatka budući da je direktniji i u izračunu ne zahtijeva pojam parcijalne derivacije prilikom računanja. Međutim, treba imati na umu da zbog toga što uvjet teorema ne mora uvijek biti zadovoljen, moguće je dobiti naizgled iznenađujuć rezultat primjenom drugog načina, bez provjere uvjeta. Naime, pokušamo li odrediti derivaciju $y'(x)$ u točki $x = 5$, zbog toga što je $\partial_y F(5, 0) = 0$, tada bismo na drugi način dobili:

$$2 \cdot 5 + 2 \cdot 0 \cdot y'(5) = 0 \implies 10 = 0.$$

To, naravno, nije pogreška u teoremu, već smo pokušali primijeniti teorem u točki u kojoj uvjeti nisu zadovoljeni, odnosno derivacija $y'(5)$ ne postoji. Promotrimo li graf kružnice, vidimo da ne možemo definirati funkciju $y(x)$ desno od točke $x = 5$. Raspisom po definiciji možemo se uvjeriti da ne postoji niti lijeva derivacija. Naime

$$\lim_{x \rightarrow 5^-} \frac{\sqrt{25 - x^2} - 0}{x - 5} = |t = 5 - x| = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{25 - (5 - t)^2}}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} -\frac{\sqrt{10t - t^2}}{t} = -\infty.$$

□

Zadatak 1.13. Funkcija $y = y(x)$ zadovoljava

$$2y = x^2 + \sin y.$$

Izračunajte $y'(x)$ u točkama $x \in \mathbb{R}$ u kojima derivacija postoji.

Rješenje. Svedimo zadanu jednadžbu na oblik $F(x, y) = 0$:

$$F(x, y) = x^2 + \sin(y) - 2y = 0$$

Ključni uvjeti teorema su $F(x_0, y_0) = 0$ i $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$. Izračunajmo najprije parcijalnu derivaciju:

$$\partial_y(x^2 + \sin(y) - 2y) = \cos(y) - 2 \leq -1 < 0.$$

Dakle, u svakoj točki $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ za koju vrijedi $F(x_0, y_0) = 0$ vrijedi i $\partial_y F(x_0, y_0) \neq 0$ pa postoje intervali $I' \ni x_0$, $J' \ni y_0$ i jedinstvena funkcija $f : I' \rightarrow J'$ takva da je $f(x_0) = y_0$ i vrijedi

$$\{(x, y) \in I' \times J' : F(x, y) = 0\} = \{(x, f(x)) : x \in I'\}.$$

Kako je f jedinstvena funkcija, a y je jedna takva funkcija, vrijedi $y = f$. Nadalje, f je derivabilna u x_0 pa je i y derivabilna u x_0 . Izračunajmo derivaciju te funkcije u okolini točke $x_0 \in \mathbb{R}$.

Deriviramo obje strane zadane jednadžbe $2y = x^2 + \sin(y)$ po varijabli x . Pritom tretiramo y kao funkciju ovisnu o x ($y = y(x)$):

$$\frac{d}{dx}(2y) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin(y)),$$

što je ekvivalentno s:

$$2 \cdot y' = 2x + \cos(y) \cdot y',$$

odnosno

$$y' = \frac{2x}{2 - \cos(y)}.$$

Konačno, preostaje provjeriti uvjet $F(x_0, y_0) = 0$, tj. preostaje odrediti za koje sve $x_0 \in \mathbb{R}$ postoji $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $F(x_0, y_0) = 0$.

Neka je $x_0 \in \mathbb{R}$ fiksna, ali proizvoljna. Kako je funkcija $y \mapsto F(x_0, y)$ strogo padajuća (njezina derivacija jednaka je $\partial_y F(x_0, y) < 0$), i vrijedi

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} (\sin y - 2y) = \mp\infty,$$

slijedi da je funkcija $y \mapsto F(x_0, y)$ bijekcija s \mathbb{R} na \mathbb{R} . Dakle, za svaki $x_0 \in \mathbb{R}$ postoji jedinstveni $y_0 \in \mathbb{R}$ takav da je $F(x_0, y_0) = 0$ pa je $y(x_0) = y_0$ i funkcija $y = y(x)$ je derivabilna u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$.

Napomena. Primijetimo da smo u ovom rješenju koristili y kao oznaku za drugu koordinatu točaka u \mathbb{R}^2 i kao oznaku za funkciju čijim je grafom opisan skup nultočaka funkcije F . Strogo gledajući, to nije matematički ispravan zapis. Međutim, ako samo trebamo izračunati derivaciju funkcije “ y po x ”, često ne želimo uvoditi novu oznaku pa je ovakav zapis standardan u literaturi. \square

Zadatak 1.14. Pretpostavimo da funkcija $y = y(x)$ zadovoljava

$$x^3 + 4x^2y + y^3 - 1 = 0.$$

Izračunajte $y'(0)$.

Rješenje. Odredimo vrijednost od y u toj točki gdje je $x = 0$. Uvrstimo $x = 0$ u početnu jednadžbu:

$$0^3 + 4(0)^2y + y^3 - 1 = 0$$

$$y^3 - 1 = 0 \implies y = 1$$

Tražena vrijednost derivacije računa se u točki $(0, 1)$.

Da se uvjerimo da derivacija postoji, izračunajmo $\partial_y F(0, 1)$.

$$\partial_y(x^3 + 4x^2y + y^3 - 1) = 4x^2 + 3y^2.$$

Dakle,

$$\partial_y F(0, 1) = 3 \neq 0$$

pa derivacija funkcije postoji po teoremu o implicitnoj funkciji.

Izračunajmo traženu derivaciju. Deriviramo obje strane jednadžbe po varijabli x . Pritom y tretiramo kao funkciju ovisnu o x , stoga za član $4x^2y$ koristimo pravilo produkta, a za y^3 lančano pravilo:

$$\frac{d}{dx}(x^3 + 4x^2y + y^3 - 1) = \frac{d}{dx}(0)$$

implicira

$$3x^2 + (8x \cdot y + 4x^2 \cdot y') + 3y^2 \cdot y' = 0.$$

Uvrštavanjem $x = 0$ slijedi

$$y'(0) = 0.$$

□

Zadatak 1.15. Neka je $y = y(x)$ funkcija koja zadovoljava

$$\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2).$$

Dokažite da je y derivabilna u svim točkama za koje je $x \neq y(x)$ i da u tim točkama vrijedi sljedeća jednakost

$$y'(x - y) = x + y.$$

Rješenje. Pretpostavimo da je funkcija $y = y(x)$ derivabilna u nekoj točki x_0 za koju vrijedi $x_0 \neq y(x_0)$. Deriviranjem lijeve strane slijedi:

$$\left(\operatorname{arctg} \frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(\frac{y}{x}\right)' = \frac{1}{1 + \frac{y^2}{x^2}} \cdot \frac{y' \cdot x - y \cdot 1}{x^2} = \frac{xy' - y}{x^2 + y^2}.$$

Računamo derivaciju desne strane:

$$\left(\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\right)' = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} \cdot (x^2 + y^2)' = \frac{x + yy'}{x^2 + y^2}.$$

Izjednačavanjem dobivenih izraza slijedi tvrdnja.

Preostaje provjeriti da je funkcija $y = y(x)$ doista derivabilna u svim točkama koje zadovoljavaju $y(x) \neq x$.

Definirajmo funkciju F (koristimo privremene varijable jer smo s y već označili funkciju od x):

$$F(x_1, y_1) = \operatorname{arctg} \frac{y_1}{x_1} - \frac{1}{2} \ln(x_1^2 + y_1^2).$$

Primijetimo da je

$$\partial_2 F(x_1, y_1) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y_1}{x_1}\right)^2} \cdot \frac{1}{x_1} - \frac{1}{2(x_1^2 + y_1^2)} \cdot 2y_1 = \frac{x_1}{x_1^2 + y_1^2} - \frac{y_1}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x_1 - y_1}{x_1^2 + y_1^2}.$$

Neka je $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ točka takva da je $F(x_0, y_0) = 0$ i $x_0 \neq y_0$. Tada iz gornjeg računa slijedi $\partial_2 F(x_0, y_0) \neq 0$, pa po Teoremu o implicitnoj funkciji postoji interval oko x_0 i jedinstvena funkcija f definirana na tom intervalu takva da je $F(x, f(x)) = 0$. Kako je y jedna takva funkcija, vrijedi $y = f$. Funkcija f je derivabilna u x_0 po teoremu, pa je stoga i y derivabilna.

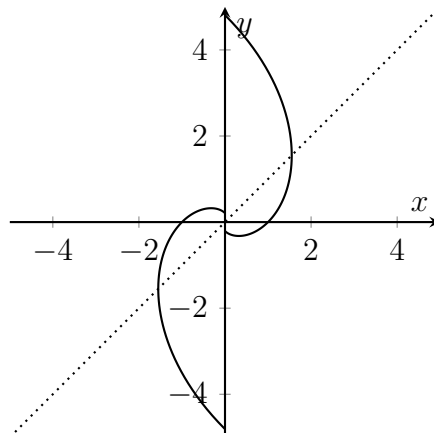
Skup točaka

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2)\}$$

može se parametrizirati u polarnim koordinatama $x = r \cos \phi$, $y = r \sin \phi$ pomoću

$$r(\phi) = \begin{cases} e^\phi, & \phi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \\ e^{\phi-\pi}, & \phi \in \left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

i on izgleda ovako:



Graf funkcije $y = y(x)$ u zadatku podskup je tog skupa i vidimo da u točkama za koje vrijedi $x = y$ ne može postojati derivacija jer je tangenta okomita. \square

Zadaci za vježbu

1.16. Ako je $x \ln y - y \ln x = 1$, izračunajte $y'(1)$.

1.17. Ako je $y^{\frac{2}{3}} + x^{\frac{2}{3}} = 1$, izračunajte y' .

1.18. Izračunajte $y'(0)$ ako je funkcija $y = y(x)$ implicitno zadana jednačom

(a)

$$\ln y + \frac{x}{y} = 1.$$

(b)

$$x^3 y^5 + \sin x \cdot y^4 + \cos x \cdot y^3 + \operatorname{ch} x \cdot y^2 + y - 3e^x = 0.$$

1.19. Izračunajte derivaciju funkcije $y(x)$ implicitno zadane

(a) jednačom $ye^y = e^{x+1}$, u točki $x = 0, y = 1$,

(b) jednačom $y^2 = x + \ln \frac{y}{x}$, u točki $x = 1, y = 1$.

1.20. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadovoljava

$$e^{f(x)} + x^2 f(x) - e^{-x} = 0 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

Izračunajte f' i f'' (tj. izrazite ih pomoću f). Specijalno, koliko je $f'(0)$ i $f''(0)$?

1.21. Funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$f(x) := x + x^3 + e^{x^3}.$$

Pokažite da je f injekcija i da je $10 + e^8 \in \mathcal{R}_f$, te odredite $(f^{-1})'(e^8 + 10)$.

1.3 Derivacije višeg reda

n -tu derivaciju funkcije f označavamo s $f^{(n)}$ ili u Leibnizovoj notaciji s $(\frac{d}{dx})^n f$.

Zadatak 1.22. Odredite f'' ako je

(a) $f(x) = (1 + x^2) \operatorname{arctg} x$

(b) $f(x) = e^x \cos x$

Rješenje. (a) Prvo računamo prvu derivaciju primjenom pravila za deriviranje umnoška $(uv)' = u'v + uv'$ i činjenicu da je $(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (1 + x^2)' \cdot \operatorname{arctg} x + (1 + x^2) \cdot (\operatorname{arctg} x)' \\ &= 2x \operatorname{arctg} x + 1 \end{aligned}$$

Sada deriviramo $f'(x)$. Ponovno primjenjujemo pravilo produkta na prvi član, dok je derivacija konstante 1 jednaka nuli:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (2x)' \cdot \operatorname{arctg} x + 2x \cdot (\operatorname{arctg} x)' + 0 \\ &= 2 \operatorname{arctg} x + 2x \cdot \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

(b) Prvo računamo prvu derivaciju primjenom pravila za deriviranje umnoška:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)' \\ &= e^x (\cos x - \sin x) \end{aligned}$$

Sada deriviramo $f'(x)$, ponovno koristeći pravilo produkta:

$$\begin{aligned} f''(x) &= (e^x)' \cdot (\cos x - \sin x) + e^x \cdot (\cos x - \sin x)' \\ &= -2e^x \sin x \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.23. Neka je

$$f(x) = x(2x - 1)^{1010}(x + 3)^{1015}.$$

Izračunajte $f^{(2026)}(x)$ i $f^{(2027)}(x)$.

Rješenje. Odredimo najprije derivaciju monoma $g(x) = x^n$, gdje je $n \in \mathbb{N}$. Počnimo računati prve derivacije:

$$g'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

$$g''(x) = n \cdot (n - 1) \cdot x^{n-2}$$

$$g'''(x) = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot x^{n-3}$$

Iz ovoga možemo prepoznati uzorak. Općenita formula za k -tu derivaciju, za $k \leq n$ može se pokazati indukcijom po k :

$$g^{(k)}(x) = n \cdot (n - 1) \cdots (n - k + 1) \cdot x^{n-k},$$

gdje poistovjetimo $x^0 := 1$. Deriviramo li još jednom, zaključujemo da za sve $k > n$ vrijedi

$$g^{(k)}(x) = 0.$$

Funkcija $f(x)$ je polinom stupnja je $1 + 1010 + 1015 = 2026$.

Umnožak vodećih članova nam daje vodeći član cijelog polinoma:

$$x \cdot 2^{1010} x^{1010} \cdot x^{1015} = 2^{1010} x^{2026}$$

Naš zadani izraz $f(x)$ možemo dakle zapisati u obliku:

$$f(x) = 2^{1010} x^{2026} + P(x)$$

gdje je $P(x)$ polinom čiji su svi članovi strogo manjeg stupnja od 2026. Koristeći formulu za derivaciju monoma slijedi

$$f^{(2026)}(x) = 2^{1010} \cdot 2026!.$$

Još jednim deriviranjem trivijalno slijedi

$$f^{(2027)}(x) = 0.$$

□

Zadatak 1.24. Neka je $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilna funkcija takva da je

$$g(1) = 1, \quad g'(1) = 2, \quad g''(1) = -1.$$

Ako je $f(x) = x^3 g(x)$, izračunajte $f''(1)$.

Rješenje. Primjenom pravila za deriviranje umnoška, $(uv)' = u'v + uv'$ slijedi

$$f'(x) = 3x^2 g(x) + x^3 g'(x).$$

Još jednim deriviranjem slijedi

$$f''(x) = 6xg(x) + 6x^2 g'(x) + x^3 g''(x).$$

Uvrštavanjem $x = 1$ i uvjeta zadatka slijedi

$$f''(1) = 17.$$

□

Zadatak 1.25. Neka je $f(x) = \frac{1}{ax+b}$, za $a, b \in \mathbb{R}$. Odredite $f^{(n)}$ za $n \in \mathbb{N}$.

Rješenje. Zapišimo zadanu funkciju u obliku potencije radi lakšeg deriviranja:

$$f(x) = (ax+b)^{-1}$$

Sada računamo prve derivacije koristeći pravilo za deriviranje kompozicije funkcija (lančano pravilo).

$$f'(x) = -1 \cdot (ax+b)^{-2} \cdot (ax+b)' = -1 \cdot a(ax+b)^{-2}$$

Deriviramo još jednom:

$$f''(x) = -1 \cdot (-2) \cdot (ax+b)^{-3} \cdot a \cdot (ax+b)' = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a^2(ax+b)^{-3}$$

Izračunajmo i treću derivaciju:

$$f'''(x) = (-1)^2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot (-3) \cdot (ax+b)^{-4} \cdot a^2 \cdot (ax+b)' = (-1)^3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a^3(ax+b)^{-4}$$

Iz izračunatih prvih derivacija možemo naslutiti formulu za n -tu derivaciju:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^n \cdot n! \cdot a^n \cdot (ax+b)^{-(n+1)} = \frac{(-1)^n n! a^n}{(ax+b)^{n+1}}.$$

Tvrđnja se lako dokaže matematičkom indukcijom. □

Mogu se pokazati i sljedeće formule:

$$\begin{aligned} (a^x)^{(n)} &= a^x \ln^n a, \text{ za } a > 0 \\ (\sin x)^{(n)} &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ (\cos x)^{(n)} &= \cos\left(x + \frac{n\pi}{2}\right) \\ (\operatorname{sh} x)^{(n)} &= \begin{cases} \operatorname{sh} x & n \text{ paran} \\ \operatorname{ch} x & n \text{ neparan} \end{cases} \\ (\operatorname{ch} x)^{(n)} &= \begin{cases} \operatorname{ch} x & n \text{ paran} \\ \operatorname{sh} x & n \text{ neparan} \end{cases} \\ (x^m)^{(n)} &= m(m-1) \cdots (m-n+1)x^{m-n}, \text{ za } m \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Zadatak 1.26. Odredite $f^{(n)}$ ako je

(a) $f(x) = \ln(3x+1)$

(b) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

$$(c) f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

$$(d) f(x) = \frac{x^3 + x}{x^2 - x - 2}$$

Rješenje. (a) Izračunajmo prvu derivaciju:

$$f'(x) = \frac{1}{3x + 1} \cdot (3x + 1)' = \frac{3}{3x + 1} = 3(3x + 1)^{-1}$$

Sada vidimo da je prva derivacija oblika na koji možemo primijeniti formulu iz prethodnog zadatka ($a = 3, b = 1$). Da bismo dobili n -tu derivaciju početne funkcije, zapravo moramo primijeniti formulu za $(n - 1)$ -vu derivaciju na funkciju $f'(x)$:

$$f^{(n)}(x) = (f')^{(n-1)}(x) = 3 \cdot \frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \cdot 3^{n-1}}{(3x+1)^{(n-1)+1}}.$$

Množenjem $3 \cdot 3^{n-1}$ dobivamo konačno rješenje:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)! \cdot 3^n}{(3x+1)^n}.$$

(b) Primijetimo

$$f(x) = -1 + 2(-x + 1)^{-1}$$

Za svaku derivaciju $n \geq 1$, derivacija konstante -1 je nula. Na drugi dio primjenjujemo formulu uz $a = -1$ i $b = 1$:

$$f^{(n)}(x) = 0 + 2 \cdot \frac{(-1)^n n! (-1)^n}{(-x+1)^{n+1}} = \frac{2 \cdot n!}{(1-x)^{n+1}}.$$

(c) Rastavimo izraz na parcijalne razlomke. Nazivnik se rastavlja kao razlika kvadrata:
 $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$.

$$\frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1}$$

$$1 = A(x+1) + B(x-1).$$

Usporedbom koeficijenata slijedi $A + B = 0$ i $A - B = 1$ pa dobivamo

$$f(x) = \frac{1}{2}(x-1)^{-1} - \frac{1}{2}(x+1)^{-1}.$$

Primijenimo opću formulu iz prethodnog zadatka na oba člana ($a = 1$ u oba slučaja, uz $b = -1$ i $b = 1$):

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n n! 1^n}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n n! 1^n}{(x+1)^{n+1}}$$

Izlučivanjem zajedničkih faktora dobivamo konačno rješenje:

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{2} \left[\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{(x+1)^{n+1}} \right]$$

(d) Budući da je stupanj brojnika veći od stupnja nazivnika, prvo podijelimo polinome:

$$(x^3 + x) : (x^2 - x - 2) = x + 1 \text{ i ostatak } 4x + 2$$

Dakle, funkciju možemo zapisati kao:

$$f(x) = x + 1 + \frac{4x + 2}{x^2 - x - 2}$$

Sada nazivnik ostatka rastavimo na faktore: $x^2 - x - 2 = (x - 2)(x + 1)$. Rastavljamo ostatak na parcijalne razlomke:

$$\frac{4x + 2}{(x - 2)(x + 1)} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1}$$

$$4x + 2 = A(x + 1) + B(x - 2)$$

Izjednačavanjem koeficijenata slijedi $A = \frac{10}{3}$ i $B = \frac{2}{3}$ pa vrijedi:

$$f(x) = x + 1 + \frac{10}{3}(x - 2)^{-1} + \frac{2}{3}(x + 1)^{-1}$$

Ovdje moramo biti oprezni jer polazni dio funkcije ima polinom stupnja 1 ($x + 1$). Zbog toga moramo rješenje razdvojiti u dva slučaja:

Slučaj za $n = 1$:

$$f'(x) = 1 - \frac{10}{3(x - 2)^2} - \frac{2}{3(x + 1)^2}$$

Slučaj za $n \geq 2$: Za viši red derivacije, linearni dio ($x + 1$) nestaje (postaje 0), a na preostala dva člana primjenjujemo našu formulu ($a = 1$ u oba):

$$f^{(n)}(x) = \frac{10}{3} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x - 2)^{n+1}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{(-1)^n n!}{(x + 1)^{n+1}}$$

$$f^{(n)}(x) = \frac{(-1)^n n!}{3} \left[\frac{10}{(x - 2)^{n+1}} + \frac{2}{(x + 1)^{n+1}} \right]$$

□

Zadatak 1.27. Odredite $f^{(2026)}$ ako je

(a) $f(x) = \cos^4 x + \sin^4 x$

(b) $f(x) = \sin x \sin 2x \sin 3x$

Rješenje. (a) Koristeći $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ i formulu za sinus dvostrukog kuta slijedi

$$f(x) = \sin^4 x + \cos^4 x = 1 - 2 \sin^2 x \cos^2 x = 1 - \frac{1}{2} \sin^2(2x).$$

Iz formule za kosinus dvostrukog kuta dobijemo $\sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos(2\alpha)}{2}$ pa slijedi

$$f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \cos(4x).$$

Sada tražimo 2026. derivaciju ovog pojednostavljenog izraza. Indukcijom se lagano vidi da vrijedi

$$\left(\frac{d}{dt}\right)^{(n)} (f(at)) \Big|_{t=x} = a^n f^{(n)}(x).$$

Iz formule za n -tu derivaciju kosinusa sada slijedi

$$f^{(2026)}(x) = \frac{1}{4} \cdot (\cos(4x))^{(2026)} = \frac{1}{4} \cdot 4^{2026} \cdot (-\cos(4x)) = -4^{2025} \cos(4x)$$

(b) Koristimo formulu za pretvorbu umnoška u zbroj:

$$\sin A \sin B = \frac{1}{2} [\cos(A - B) - \cos(A + B)].$$

$$f(x) = (\sin 3x \sin x) \sin 2x = \frac{1}{2} [\cos(2x) - \cos(4x)] \sin 2x$$

Prvi član prepoznamo kao sinus dvostrukog kuta, a za drugi član ponovno koristimo pretvorbu, ovaj put po formuli

$$\cos A \sin B = \frac{1}{2} [\sin(A + B) - \sin(A - B)],$$

uz $A = 4x, B = 2x$, pa dobivamo:

$$f(x) = \frac{1}{4} \sin(2x) + \frac{1}{4} \sin(4x) - \frac{1}{4} \sin(6x).$$

Koristeći pravilo za n -tu derivaciju sinusa slijedi

$$f^{(2026)}(x) = -2^{2024} \sin(2x) - 4^{2025} \sin(4x) + \frac{6^{2026}}{4} \sin(6x)$$

□

Teorem 5. *Ako su $u, v \in C^n(I)$, tada za derivaciju produkta vrijedi Leibnizova formula:*

$$(u \cdot v)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Dokaz. Dokaz provodimo matematičkom indukcijom. Za $n = 1$, tvrdnja slijedi iz formule za derivaciju produkta. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$ i dokažimo da formula vrijedi i za $n + 1$. Krenimo od $(n + 1)$ -ve derivacije, koju zapisujemo kao derivaciju n -te derivacije:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n+1)} &= ((u \cdot v)^{(n)})' \\ &= \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)} \right)' \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (u^{(k+1)} v^{(n-k)} + u^{(k)} v^{(n-k+1)}) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k+1)} v^{(n-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)} \end{aligned}$$

Supstitucijom $j = k + 1$ u prvoj sumi, izraz je jednak

$$\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} u^{(j)} v^{(n+1-j)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k+1)}$$

Vraćanjem oznake indeksa na k , dobili smo:

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n+1)} &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n+1-k)} \\ &= \binom{n}{0} u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \binom{n}{n} u^{(n+1)} v^{(0)} \end{aligned}$$

Koristeći Pascalovo pravilo za zbrajanje binomnih koeficijenata:

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k},$$

i svojstva rubnih binomnih koeficijenata $\binom{n}{0} = 1 = \binom{n+1}{0}$ i $\binom{n}{n} = 1 = \binom{n+1}{n+1}$, slijedi

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n+1)} &= \binom{n+1}{0} u^{(0)} v^{(n+1)} + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} u^{(k)} v^{(n+1-k)} + \binom{n+1}{n+1} u^{(n+1)} v^{(0)} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} u^{(k)} v^{(n+1-k)} \end{aligned}$$

□

Zadatak 1.28. Odredite $f^{(n)}$ za

(a) $f(x) = x^2 e^{-2x}$

(b) $f(x) = x^2 e^x \operatorname{sh} x$

Rješenje. (a) Koristimo Leibnizovu formulu uz $u(x) = x^2$, $v(x) = e^{-2x}$. Budući da je $u^{(k)}(x) = 0$ za $k \geq 3$, slijedi

$$\begin{aligned} (u \cdot v)^{(n)} &= \binom{n}{0} u^{(0)} v^{(n)} + \binom{n}{1} u^{(1)} v^{(n-1)} + \binom{n}{2} u^{(2)} v^{(n-2)} \\ &= x^2 v^{(n)} + 2nx v^{(n-1)} + n(n-1) v^{(n-2)} \end{aligned}$$

Koristeći

$$v^{(m)}(x) = (-2)^m e^{-2x}$$

slijedi

$$f^{(n)}(x) = (-2)^{n-2} e^{-2x} (4x^2 - 4nx + n^2 - n)$$

(b) Koristeći $\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, slijedi

$$e^x \operatorname{sh} x = e^x \cdot \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{e^{2x} - 1}{2}$$

pa početnu funkciju možemo zapisati kao razliku:

$$f(x) = x^2 \cdot \frac{e^{2x} - 1}{2} = \frac{1}{2} x^2 e^{2x} - \frac{1}{2} x^2$$

Zbog linearnosti derivacije, n -tu derivaciju računamo za svaki član zasebno:

$$f^{(n)}(x) = \frac{1}{2} (x^2 e^{2x})^{(n)} - \frac{1}{2} (x^2)^{(n)}$$

Na prvi član primjenjujemo Leibnizovu formulu ($u = x^2$, $v = e^{2x}$, a $v^{(m)} = 2^m e^{2x}$):

$$(x^2 e^{2x})^{(n)} = x^2 \cdot 2^n e^{2x} + 2nx \cdot 2^{n-1} e^{2x} + n(n-1) \cdot 2^{n-2} e^{2x}.$$

Dakle,

$$f^{(n)}(x) = 2^{n-3} e^{2x} (4x^2 + 4nx + n^2 - n) - \frac{1}{2} (x^2)^{(n)}$$

□

Zadatak 1.29. Odredite $f^{(100)}(0)$ za

(a) $f(x) = x^2 \sin x \cos x$

(b) $f(x) = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$

Rješenje. (a) Koristeći formulu za sinus dvostrukog kuta vrijedi

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 \sin(2x).$$

Koristeći Leibnizovu formulu uz $u(x) = x^2$ i $v(x) = \frac{1}{2} \sin(2x)$, slijedi Za sve derivacije reda $k \geq 3$, vrijedi $u^{(k)}(0) = 0$ pa slijedi

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} u^{(k)}(x) v^{(100-k)}(x) = \sum_{k=0}^2 \binom{100}{k} u^{(k)}(x) v^{(100-k)}(x) \\ &= \binom{100}{0} x^2 v^{(100)}(x) + \binom{100}{1} 2x v^{(99)}(x) + \binom{100}{2} 2v^{(98)}(0) \end{aligned}$$

Za $x = 0$, slijedi

$$f^{(100)}(0) = 2 \binom{100}{2} v^{(98)}(0)$$

Konačno, koristeći formulu za m -tu derivaciju sinusa,

$$(\sin(ax))^{(m)} = a^m \sin\left(ax + m\frac{\pi}{2}\right)$$

slijedi

$$v^{(98)}(0) = \frac{1}{2} \cdot 2^{98} \sin\left(2 \cdot 0 + 98\frac{\pi}{2}\right) = 2^{97} \sin(49\pi) = 0.$$

Dakle,

$$f^{(100)}(0) = 9900 \cdot 0 = 0.$$

(b) Zapišimo funkciju kao produkt dviju funkcija:

$$f(x) = (1+x)(1-x)^{-\frac{1}{2}}.$$

Koristeći Leibnizovu formulu slijedi

$$\begin{aligned} f^{(100)}(x) &= \sum_{k=0}^{100} \binom{100}{k} u^{(k)}(x) v^{(100-k)}(x) \\ &= \sum_{k=0}^1 \binom{100}{k} u^{(k)}(x) v^{(100-k)}(x). \end{aligned}$$

Za $x = 0$ slijedi

$$f^{(100)}(0) = v^{(100)}(0) + 100v^{(99)}(0)$$

pa dovoljno naći opću formulu za m -tu derivaciju funkcije $v(x) = (1-x)^{-\frac{1}{2}}$. Deriviramo prvih nekoliko puta:

$$\begin{aligned}v'(x) &= \left(-\frac{1}{2}\right) (1-x)^{-\frac{3}{2}} \cdot (-1) = \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{3}{2}} \\v''(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) (1-x)^{-\frac{5}{2}} \cdot (-1) = \frac{1 \cdot 3}{2^2}(1-x)^{-\frac{5}{2}} \\v'''(x) &= \frac{1 \cdot 3}{2^2} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) (1-x)^{-\frac{7}{2}} \cdot (-1) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2^3}(1-x)^{-\frac{7}{2}}\end{aligned}$$

Uočavamo pravilnost. U brojniku dobivamo produkt neparnih brojeva, što označavamo dvostrukim faktorijelom, pa se indukcijom pokaže da opća formula za m -tu derivaciju glasi:

$$v^{(m)}(x) = \frac{(2m-1)!!}{2^m} (1-x)^{-\frac{2m+1}{2}}$$

Za $x = 0$, slijedi

$$v^{(m)}(0) = \frac{(2m-1)!!}{2^m}.$$

Uvrštavanjem u formulu dobijemo

$$f^{(100)}(0) = \frac{199!!}{2^{100}} + 100 \cdot \frac{197!!}{2^{99}} = \frac{197!! \cdot (199 + 200)}{2^{100}} = \frac{399 \cdot 197!!}{2^{100}}.$$

□

Računanje derivacija višeg reda pomoću diferencijalnih jednakosti

Ponekad nije teško pronaći jednostavnu diferencijalnu jednadžbu koju zadovoljava funkcija. Zatim se na tu jednakost primijeni Leibnizova formula kako bismo rekurzivno odredili derivaciju višeg reda.

Zadatak 1.30. Neka je $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Odredite $f^{(n)}(0)$.

Rješenje. Neka je zadana funkcija $y = f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$. Prva derivacija ove funkcije je:

$$y' = e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot \left(-\frac{2x}{2}\right) = -xe^{-\frac{x^2}{2}}$$

Iz slijedi

$$y' = -xy$$

Deriviranjem jednakosti $(n - 1)$ puta i korištenjem Leibnizove formule uz $u = -x$, $v = y$, slijedi

$$y^{(n)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} u^{(k)} v^{(n-1-k)} = \binom{n-1}{0} (-x) y^{(n-1)} + \binom{n-1}{1} (-1) y^{(n-2)}.$$

Uvrštavanjem $x = 0$ slijedi

$$y^{(n)}(0) = -0 \cdot y^{(n-1)}(0) - (n-1) y^{(n-2)}(0) = -(n-1) y^{(n-2)}(0)$$

Da bismo riješili ovu rekurziju, trebaju nam "početni uvjeti", odnosno vrijednosti funkcije i prve derivacije u nuli:

$$\begin{aligned} y^{(0)}(0) &= y(0) = e^0 = 1 \\ y^{(1)}(0) &= y'(0) = -0 \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

Na temelju rekurzije $y^{(n)}(0) = -(n-1) y^{(n-2)}(0)$, vidimo da se svaka derivacija računa preko derivacije koja je za dva reda niža. Zbog toga se rješenje grana u dva slučaja:

1. Slučaj: n je neparan broj ($n = 2k + 1$)

Budući da je $y^{(1)}(0) = 0$, svaka sljedeća neparna derivacija bit će pomnožena s nulom pa za neparne derivacije vrijedi:

$$f^{(2k+1)}(0) = 0, \quad \text{za } k \in \mathbb{N}_0$$

2. Slučaj: n je paran broj ($n = 2k$)

Krenimo od $y^{(0)}(0) = 1$:

$$\begin{aligned} y^{(2)}(0) &= -1 \cdot y^{(0)}(0) = -1 \\ y^{(4)}(0) &= -3 \cdot y^{(2)}(0) = (-3)(-1) = 3 \cdot 1 \\ y^{(6)}(0) &= -5 \cdot y^{(4)}(0) = (-5)(-3)(-1) = -(5 \cdot 3 \cdot 1). \end{aligned}$$

Matematičkom indukcijom lako se vidi da je

$$y^{(2k)}(0) = -(2k-1) \cdot y^{(2k-2)}(0) = (-1)^k (2k-1)!!,$$

gdje je !! oznaka za dvostruki faktorijel, odnosno umnožak svih uzastopnih neparnih brojeva do $(2k-1)$. Konačno

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & \text{ako je } n \text{ neparan} \\ (-1)^k (n-1)!!, & \text{ako je } n \text{ paran i } n = 2k \end{cases}$$

□

Zadatak 1.31. Neka je $f(x) = \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}$. Odredite $f^{(99)}(0)$ i $f^{(100)}(0)$.

Rješenje. Označimo li $y = f(x)$, vrijedi

$$y' = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \arcsin x}{1-x^2} = \frac{1+xy}{1-x^2}.$$

Množenjem obje strane sa $(1-x^2)$ slijedi da funkcija zadovoljava diferencijalnu jednadžbu

$$(1-x^2)y' = 1+xy.$$

Derivirajmo ovu jednakost $(n-1)$ puta koristeći Leibnizovu formulu za derivaciju produkta.

$$\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} (1-x^2)^{(k)} (y')^{(n-1-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} x^{(k)} y^{(n-1-k)}.$$

Sređivanjem slijedi

$$(1-x^2)y^{(n)} - 2x(n-1)y^{(n-1)} - (n-1)(n-2)y^{(n-2)} = xy^{(n-1)} + (n-1)y^{(n-2)}.$$

Uvrštavanjem $x = 0$ slijedi:

$$y^{(n)}(0) = (n-1)^2 y^{(n-2)}(0).$$

Dakle, svaka derivacija ovisi o dva reda nižoj derivaciji pa izračunajmo početne uvjete, $y(0)$ i $y'(0)$:

$$y(0) = \frac{\arcsin 0}{\sqrt{1-0^2}} = 0.$$

Vrijednost prve derivacije možemo lako očitati iz zadane diferencijalne jednadžbe $(1-x^2)y' = 1+xy$ uvrštavanjem $x = 0$:

$$(1-0)y'(0) = 1+0 \implies y'(0) = 1$$

Računanje traženih vrijednosti:

Rekurzija povezuje derivacije istog pariteta (svaka ovisi o onoj dva reda nižoj).

Računamo $f^{(100)}(0)$. Ovo je parna derivacija. Krenemo li od početnog uvjeta $y(0) = 0$:

$$y^{(2)}(0) = 1^2 \cdot y(0) = 0$$

Sve daljnje parne derivacije bit će jednake nuli jer se uvijek množe s prethodnom koja je nula. Stoga je:

$$f^{(100)}(0) = 0$$

Računamo sad $f^{(99)}(0)$. Ovo je neparna derivacija. Krenemo li od $y'(0) = 1$:

$$\begin{aligned}y^{(3)}(0) &= 2^2 \cdot y'(0) = 2^2 \\y^{(5)}(0) &= 4^2 \cdot y^{(3)}(0) = 4^2 \cdot 2^2 \\y^{(7)}(0) &= 6^2 \cdot y^{(5)}(0) = 6^2 \cdot 4^2 \cdot 2^2\end{aligned}$$

Indukcijom se sada lako vidi da je

$$y^{(2k+1)} = ((2k)!)^2.$$

Dakle,

$$f^{(99)}(0) = (98!)^2 = (2^{49} \cdot 49!)^2 = 2^{98}(49!)^2.$$

□

Zadaci za vježbu

1.32. Dokažite da funkcija $y(x) = \frac{e^{5x}+2}{e^x}$ zadovoljava jednakost:

$$y''' - 13y' - 12y = 0.$$

1.33. (a) Odredite $f^{(8)}$ za $f(x) = \frac{x^2}{1-x}$.

(b) Odredite $f^{(5)}$ za $f(x) = x \ln x$.

(c) Odredite $f^{(5)}$ za $f(x) = \frac{x}{\ln x}$.

(b) Odredite f'' za $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$.

(b) Odredite f'' za $f(x) = x(\sin(\ln x) + \cos(\ln x))$.

1.34. (a) Pokažite da funkcija $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$, gdje su C_1 i C_2 realne konstante zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' + y = 0.$$

(b) Pokažite da funkcija $y = C_1 \operatorname{ch} x + C_2 \operatorname{sh} x$, gdje su C_1 i C_2 realne konstante zadovoljava diferencijalnu jednadžbu:

$$y'' - y = 0.$$

1.35. Dokažite Leibnizovu formulu. [Uputa: Matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.]

1.36. Neka je $f(x) = x^3 \operatorname{sh} x$. Odredite $f^{(n)}$.

1.37. Neka je $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{1+x}}$. Odredite $f^{(n)}$.

1.38. Izračunajte $f^{(100)}(0)$ i $f^{(101)}(0)$ ako je funkcija f zadana formulom:

(a) $f(x) = (x \sin 2x)^3$

(d) $f(x) = x \cdot e^{\operatorname{arctg} x}$

(b) $f(x) = \operatorname{Arsh} x$

(c) $f(x) = \frac{3x-1}{x^2-2x-3}$

(e) $f(x) = \sqrt[3]{(1-2x)^2}$

1.39. Neka je $y(x) = \arcsin x$. Odredite $y^{(n)}(0)$.

[Uputa: $(1-x^2)y'' = xy'$.]

1.40. Neka je $y(x) = \cos(3 \arcsin x)$. Odredite $y^{(n)}(0)$. [Uputa: $(1-x^2)y'' - xy' + 9y = 0$.]

1.41. Neka je $f(x) = x^n$. Dokažite:

$$f(1) + \frac{f'(1)}{1!} + \frac{f''(1)}{2!} + \dots + \frac{f^{(n)}(1)}{n!} = 2^n.$$

1.42. Funkcija $P: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana je formulom

$$P(x) = e^{x^2} \cdot (e^{-x^2})^{(2006)}$$

Dokažite da je P polinom, odredite mu stupanj i vodeći koeficijent.

1.43. Dokažite da za svaki $n \in \mathbb{N}$ i svaku n puta derivabilnu funkciju f vrijedi jednakost

$$\left(x^{n-1} f\left(\frac{1}{x}\right) \right)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}} f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right).$$

[Uputa: Matematičkom indukcijom po $n \in \mathbb{N}$.]

1.4 Tangenta i normala

Ako funkcija $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ ima derivaciju u točki $x_0 \in I$, onda jednadžbe tangente i normale na graf funkcije f u točki $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$ glase:

$$\begin{array}{l} t \quad \dots \quad y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \\ n \quad \dots \quad y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \end{array}$$

Zadatak 1.44. Točkom $T(2, 0)$ povucite tangentu na krivulju $y = x^4$.

Rješenje. Točka T nalazi se izvan krivulje pa označimo sa $D(x_0, y_0)$ točku dirališta koja leži na krivulji.

Budući da diralište $D(x_0, y_0)$ leži na krivulji, njegove koordinate zadovoljavaju njezinu jednadžbu:

$$y_0 = x_0^4$$

Koeficijent smjera tangente u točki dirališta iznosi $k = f'(x_0) = 4x_0^3$. Uvrstimo ove elemente u opću jednadžbu tangente:

$$y - x_0^4 = 4x_0^3(x - x_0)$$

Znamo da tangenta mora prolaziti kroz zadanu točku $T(2, 0)$. Stoga ćemo koordinate točke T uvrstiti umjesto x i y u našu jednadžbu tangente i riješiti je po nepoznanici x_0 :

$$0 - x_0^4 = 4x_0^3(2 - x_0),$$

što je ekvivalentno s

$$x_0^3(3x_0 - 8) = 0.$$

Ova jednadžba daje nam dva rješenja za x -koordinatu dirališta: $x_0 = 0$ i $x_0 = \frac{8}{3}$, što znači da iz točke T možemo povući točno dvije tangente na zadanu krivulju.

Prvi koeficijent smjera je $k_1 = 4(0)^3 = 0$ pa uvrštavanjem u jednadžbu pravca kroz točku $T(2, 0)$ dobijemo jednadžbu

$$y - 0 = 0 \cdot (x - 2),$$

tj.

$$y = 0.$$

Drugi koeficijent smjera je:

$$k_2 = 4 \left(\frac{8}{3} \right)^3$$

pa uvrštavanjem u jednadžbu pravca kroz točku $T(2, 0)$ dobijemo jednadžbu pravca

$$y - 0 = 4 \left(\frac{8}{3} \right)^3 (x - 2).$$

□

Zadatak 1.45. Pokažite da se tangente na krivulju

$$y = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$$

povučene u točkama na krivulji s ordinatom 1 sijeku u ishodištu.

Rješenje. Da bismo pronašli apscise (x -koordinate) tih točaka, uvrstit ćemo $y = 1$ u jednadžbu krivulje:

$$1 = \frac{1 + 3x^2}{3 + x^2}$$

Rješavanjem slijedi da imamo dvije točke dirališta: $T_1(1, 1)$ i $T_2(-1, 1)$.

Za jednadžbu tangente potreban nam je koeficijent smjera, odnosno prva derivacija funkcije. Deriviranjem funkcije slijedi

$$y' = \frac{16x}{(3 + x^2)^2}$$

Računamo koeficijente smjera za svaku točku dirališta uvrštavanjem pripadajućeg x :

Za točku $T_1(1, 1)$:

$$k_1 = y'(1) = \frac{16(1)}{(3 + 1^2)^2} = \frac{16}{16} = 1$$

Za točku $T_2(-1, 1)$:

$$k_2 = y'(-1) = \frac{16(-1)}{(3 + (-1)^2)^2} = \frac{-16}{16} = -1$$

Koristimo formulu za jednadžbu pravca $y - y_0 = k(x - x_0)$.

Prva tangenta t_1 (kroz točku T_1):

$$y - 1 = 1(x - 1) \Leftrightarrow y = x.$$

Druga tangenta t_2 (kroz točku T_2):

$$y - 1 = -1(x - (-1)) \Leftrightarrow y = -x.$$

Točka presjeka tangenti je $(0, 0)$ i time je tvrdnja dokazana. □

Zadatak 1.46. U proizvoljnoj točki krivulje

$$y = \frac{a}{2} \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{a - \sqrt{a^2 - x^2}} - \sqrt{a^2 - x^2}$$

povučena je tangenta. Dokažite da odsječak tangente između presjeka s osi ordinata i točke dirališta ima konstantnu duljinu i odredite ju.

Rješenje. Neka je $D(x_0, y_0)$ proizvoljna točka dirališta na krivulji. Prvo moramo pronaći derivaciju funkcije $y = f(x)$ kako bismo odredili koeficijent smjera tangente u toj točki.

Množenjem brojnika i nazivnika unutar logaritma s $(a + \sqrt{a^2 - x^2})$ slijedi

$$\begin{aligned} y &= \ln \left(\frac{(a + \sqrt{a^2 - x^2})^2}{x^2} \right) - \sqrt{a^2 - x^2} \\ &= a \ln (a + \sqrt{a^2 - x^2}) - a \ln x - \sqrt{a^2 - x^2} \end{aligned}$$

Označimo $u = \sqrt{a^2 - x^2}$. Tada je $u' = -\frac{x}{u}$ i vrijedi

$$\begin{aligned} y' &= a \frac{1}{a+u} \cdot u' - \frac{a}{x} - u' = u' \left(\frac{a}{a+u} - 1 \right) - \frac{a}{x} \\ &= \left(-\frac{x}{u} \right) \left(\frac{-u}{a+u} \right) - \frac{a}{x} = \frac{-u^2 - au}{x(a+u)} \\ &= -\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} \end{aligned}$$

Jednadžba tangente na krivulju u točki $D(x_0, y_0)$ glasi:

$$Y - y_0 = y'(x_0)(X - x_0)$$

Tražimo točku $T(0, Y_T)$ u kojoj tangenta siječe os ordinata (y -os). Vrijedi

$$Y_T - y_0 = y'(x_0)(0 - x_0)$$

$$Y_T = y_0 - x_0 y'(x_0).$$

Odsječak tangente između osi ordinata i dirališta je dužina \overline{TD} . Njezinu duljinu d računamo pomoću formule za udaljenost dviju točaka:

$$d = \sqrt{(x_0 - 0)^2 + (y_0 - Y_T)^2}$$

Iz gornje jednadžbe vidimo da je $y_0 - Y_T = x_0 y'(x_0)$. Uvrstimo to u korijen:

$$d = \sqrt{x_0^2 + (x_0 y'(x_0))^2} = |x_0| \sqrt{1 + (y'(x_0))^2} = |x_0| \sqrt{1 + \frac{a^2 - x_0^2}{x_0^2}} = |a|.$$

Dakle, duljina odsječka tangente između y -osi i točke dirališta ne ovisi o koordinati x_0 i iznosi $|a|$. \square

Zadatak 1.47. Odredite jednadžbu tangente i normale u točki $T(1, 1)$ na krivulju implicitno zadanu jednadžbom

$$x^5 + y^5 - 2xy = 0.$$

Rješenje. Provjeravamo leži li točka T na krivulji uvrštavanjem njezinih koordinata:

$$1^5 + 1^5 - 2(1)(1) = 1 + 1 - 2 = 0$$

Točka T nalazi se na krivulji, pa predstavlja diralište.

Deriviramo cijelu jednadžbu po varijabli x . Pritom y tretiramo kao funkciju od x , što znači da moramo koristiti lančano pravilo za članove s y , te pravilo derivacije produkta za član xy :

$$(x^5 + y^5 - 2xy)' = (0)'$$

Odatle slijedi

$$5x^4 + 5y^4y' - 2y - 2xy' = 0,$$

odnosno nakon sređivanja

$$y' = \frac{2y - 5x^4}{5y^4 - 2x}.$$

Koeficijent smjera tangente (k_t) u točki $T(1, 1)$ dobivamo uvrštavanjem $x = 1$ i $y = 1$ u dobivenu derivaciju:

$$k_t = y'(1, 1) = \frac{2(1) - 5(1)^4}{5(1)^4 - 2(1)} = \frac{2 - 5}{5 - 2} = \frac{-3}{3} = -1$$

Sada uvrštavamo $T(1, 1)$ i $k_t = -1$ u opću jednadžbu pravca $y - y_0 = k(x - x_0)$:

$$y - 1 = -1(x - 1),$$

odnosno

$$y = -x + 2.$$

Normala je okomita na tangentu, pa za njezin koeficijent smjera (k_n) vrijedi relacija $k_t \cdot k_n = -1$:

$$k_n = -\frac{1}{k_t} = -\frac{1}{-1} = 1$$

Uvrštavamo $T(1, 1)$ i $k_n = 1$ u jednadžbu pravca:

$$y - 1 = 1(x - 1),$$

iz čega slijedi jednadžba normale

$$y = x.$$

□

Zadatak 1.48. Pod kojim se kutem sijeku tangente na kružnicu

$$x^2 + y^2 + 4x - 2y - 11 = 0$$

povučene točkom $T(4, 1)$?

Rješenje. Neka je $D(x_0, y_0)$ točka dirališta tangente na kružnicu. Da bismo našli koeficijent smjera tangente k , deriviramo jednadžbu kružnice implicitno po varijabli x :

$$2x + 2yy' + 4 - 2y' = 0.$$

Dakle,

$$y' = -\frac{x+2}{y-1}$$

pa jednadžba tangente u točki $D(x_0, y_0)$ glasi

$$y - y_0 = -\frac{x_0 + 2}{y_0 - 1}(x - x_0),$$

Budući da tangenta prolazi i kroz točku $T(4, 1)$, vrijedi

$$1 - y_0 = -\frac{x_0 + 2}{y_0 - 1}(4 - x_0).$$

Sređivanjem dobivamo:

$$x_0^2 + y_0^2 - 2x_0 - 2y_0 - 7 = 0.$$

Budući da diralište $D(x_0, y_0)$ leži na kružnici, ono zadovoljava i njezinu jednadžbu:

$$x_0^2 + y_0^2 + 4x_0 - 2y_0 - 11 = 0.$$

Oduzimanjem jednadžbi slijedi

$$x_0 = \frac{2}{3}$$

pa uvrštavanjem u neku od jednadžbi dobijemo i

$$y_0 = 1 \pm \frac{4\sqrt{5}}{3}.$$

Odatle slijedi da su nagibi tangenti, (k_1, k_2) jednaki

$$k_{1,2} = \frac{y_0 - 1}{x_0 - 4} = \mp \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Dakle, $k_1 = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ i $k_2 = \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Konačno, kut φ pod kojim se sijeku tangente računamo pomoću formule za tangens kuta:

$$\tan \varphi = \left| \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2} \right| = 4\sqrt{5}$$

pa slijedi da je kut pod kojim se sijeku tangente:

$$\varphi = \arctan(4\sqrt{5}) \approx 83.62^\circ$$

□

Zadatak 1.49. Pokažite da se parabole

$$\begin{aligned}y^2 &= 4x + 4 \\ y^2 &= -12x + 36\end{aligned}$$

sijeku pod pravim kutem.

Rješenje. Da bismo pronašli točke u kojima se parabole sijeku, izjednačit ćemo njihove jednadžbe:

$$4x + 4 = -12x + 36 \implies x = 2$$

Uvrštavanjem u prvu jednadžbu slijedi

$$y = \pm\sqrt{12} = \pm 2\sqrt{3}.$$

Parabole se sijeku u točkama $T_1(2, 2\sqrt{3})$ i $T_2(2, -2\sqrt{3})$. Derivacijom implicitnih jednadžbi dobivamo koeficijente smjera tangenti ($k = y'$).

Za prvu parabolu:

$$y^2 = 4x + 4 \implies 2yy' = 4 \implies y'_1 = \frac{2}{y}$$

Za drugu parabolu:

$$y^2 = -12x + 36 \implies 2yy' = -12 \implies y'_2 = -\frac{6}{y}$$

Dvije krivulje se sijeku pod pravim kutem (ortogonalne su) ako je umnožak koeficijenata smjera njihovih tangenti u točki presjeka jednak -1 . Izračunajmo umnožak za proizvoljnu točku presjeka s ordinatom y_0 :

$$k_1 \cdot k_2 = y'_1(y_0) \cdot y'_2(y_0) = \left(\frac{2}{y_0}\right) \left(-\frac{6}{y_0}\right) = -\frac{12}{y_0^2} = -1,$$

čime je tvrdnja dokazana. □

Zadatak 1.50. Za koje $n \in \mathbb{N}$ krivulja $y = \operatorname{arctg}(nx)$ siječe os x pod kutem većim od 89° ?

Rješenje. Krivulja siječe os apscisa kada je $y = 0$:

$$\operatorname{arctg}(nx) = 0 \implies x = 0$$

Točka presjeka je $(0, 0)$.

Kut α pod kojim krivulja siječe os x određen je vrijednošću prve derivacije u točki presjeka ($x = 0$):

$$\tan \alpha = y'(0)$$

Deriviramo zadanu funkciju:

$$y' = \frac{1}{1 + (nx)^2} \cdot n = \frac{n}{1 + n^2x^2}$$

Uvrštavanjem $x = 0$ dobivamo:

$$\tan \alpha = y'(0) = n$$

Iz uvjeta zadatka traži se da je kut veći od 89° . Budući da je funkcija tangens strogo rastuća za šiljaste kutove, slijedi:

$$n > \tan(89^\circ) \approx 57.29.$$

.

Kako n mora biti prirodan broj ($n \in \mathbb{N}$), najmanji takav broj koji zadovoljava nejednakost je 58. □

Zadatak 1.51. Uz koji parametar $a \in \mathbb{R}$ krivulja $y = ax^2$ dodiruje krivulju $y = \ln x$?

Napomena. Teža varijanta ovog zadatka bila bi: "Odredite parametar $a \in \mathbb{R}$ takav da krivulje $y = ax^2$ i $y = \ln x$ imaju točno jedno sjecište."

Zadatak 1.52. Odredite kut pod kojim se sijeku krivulje

$$x^3 + y^3 - x = 0$$

$$x^2 + y^3 + 2 = 0$$

Zadatak 1.53. Nađite zajedničke tangente na krivulje

$$y = x^2 - 6x + 5$$

$$y = -x^2 - 4x.$$

Zadaci za vježbu

1.54. Nađite sve pravce koji prolaze kroz ishodište i sijeku hiperbolu $xy = a^2$ pod pravim kutem.

1.55. Zadana je krivulja

$$y = \frac{x - 4}{x - 2}.$$

Pokažite da su tangente na tu krivulju u točkama presjeka s koordinatnim osima paralelne.

1.56. Odredite općenitu formulu za jednadžbu tangente na krivulju implicitno zadanu s

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1.$$

1.57. Odredite sve vrijednosti parametra $b \in \mathbb{R}$ za koje je pravac $y = x + b$ tangenta krivulje

$$y = \frac{x}{x + 4}.$$

1.58. Na krivulji $y = \frac{1}{1+x^2}$ nađite točku u kojoj je tangenta paralelna s osi apscisa.

1.59. Pokažite da se krivulje familija

$$y^2 = 4a^2 - 4ax, \quad a > 0$$

$$y^2 = 4b^2 + 4bx, \quad b > 0$$

sijeku pod pravim kutem.

1.60. Pokažite da parabola

$$y = a(x - x_1)(x - x_2), \quad a \neq 0, x_1 < x_2$$

presijeca os apscisa u dvije točke pod jednakim kutem.

1.61. Pod kojim se kutem sijeku krivulje:

(a) $y = x^2$ i $x = y^2$,

(b) $y = \sin x$ i $y = \cos x$?

1.62. Uz koje uvjete na koeficijente $a, b, c \in \mathbb{R}$ je os apscisa tangenta na krivulju

$$y = ax^2 + bx + c?$$

1.63. Nađite pravac koji je tangenta na krivulju

$$y = x^4 - 2x^3 - 3x^2 + 5x + 6$$

u barem dvije točke.

1.64. Dana je krivulja $y = xe^{\frac{1}{x}}$.

(a) Nađite jednadžbu tangente na tu krivulju u točki s apscisom $a > 0$.

(b) Što se događa s tangentom kada $a \rightarrow +\infty$?

1.65. Nađite zajedničke tangente na krivulje

$$y + x^2 = -4$$

$$x^2 + y^2 = 4.$$

1.66. Odredite kut pod kojim se krivulje

$$y^2 - 3x^2 + x + 1 = 0$$

$$xy^2 - 1 = 0$$

sijeku u prvom kvadrantu.

1.5 L'Hôpitalovo pravilo

Teorem 6. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval, $c \in I$ (može biti i $c = \pm\infty$) i neka su $f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$ derivabilne funkcije takve da je $g'(x) \neq 0$ na $I \setminus \{c\}$. Pretpostavimo da limes $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ postoji u $\overline{\mathbb{R}}$ i da vrijedi jedna od sljedećih tvrdnji:

(a) $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} g(x) = 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow c} |g(x)| = \infty$.

Tada limes $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ postoji i vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Zadatak 1.67. Izračunajte

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$

(e) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{1 + x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}$

(f) $\lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x}$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 4x + 3}{2x^2 - 1}$

(g) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Rješenje. Pri rješavanju koristimo L'Hopitalovo pravilo (u nastavku označeno s L'H).

(a) Primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo izravno:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = \frac{1}{1} = 1.$$

Kao interval I u iskazu teorema možemo uzeti $I = (-1, 1)$. Kao i na MA1, za formalnu primjenu teorema potrebno je gornji izraz "čitati unazad". Naime, postojanje zadnjeg limesa opravdava primjenu L'Hopitalovog pravila u prvom koraku.

Napomena: Iako zadatak traži L'Hopitalovo pravilo i ono daje točan rezultat, ovo se smatra kružnim dokazom. Naime, da bismo znali da je derivacija od $\sin x$ jednaka $\cos x$, moramo već unaprijed znati ovaj osnovni trigonometrijski limes.

(b) Primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo dva puta:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{2} = \frac{1}{2}.$$

Kao i na MA1, za formalnu primjenu teorema potrebno je gornji izraz "čitati unazad". Naime, postojanje zadnjeg limesa opravdava drugu primjenu L'Hopitalovog pravila, a tada postojanje predzadnjeg limesa, uz odabir intervala $I = (-1, 1)$, opravdava primjenu prvog L'Hopitalovog pravila.

(c) Prvo moramo preurediti izraz u oblik $\frac{\infty}{\infty}$ spuštanjem e^{-x} u nazivnik:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

(d) L'Hopitalovo pravilo primjenjujemo dok se ne riješimo neodređenosti (dva puta):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5x^3 - 4x + 3}{2x^2 - 1} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{15x^2 - 4}{4x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{30x}{4} = +\infty$$

(e) Primjenjujemo pravilo i koristimo ulančavanje za derivaciju logaritma:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{1 + x} &= \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{1+e^x} \cdot e^x}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{1 + e^x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 = 1 \end{aligned}$$

(f) Kotangens zapisujemo kao recipročnu vrijednost tangensa kako bismo dobili oblik $\frac{0}{0}$:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \arcsin x \cdot \operatorname{ctg} x &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{\operatorname{tg} x} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{\frac{1}{\cos^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos^2 x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1^2}{\sqrt{1-0}} = \frac{1}{1} = 1 \end{aligned}$$

(g) Primjenjujemo pravilo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{\sqrt{x}} = 0.$$

□

Zadatak 1.68. U sljedećim primjerima izrazi ne zadovoljavaju neki od uvjeta L'Hopitalovog pravila. Odredite koji od uvjeta teorema nije zadovoljen i uvjerite se da se neispravnom primjenom L'Hopitalovog pravila dobije pogrešan rezultat.

$$(a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{2x+3}.$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x}.$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{f(x)e^{\sin x}}, \text{ gdje je } f(x) = x + \sin x \cos x.$$

Rješenje. (a) Limes nije neodređenog oblika (nije ni $[\frac{0}{0}]$ ni $[\frac{\infty}{\infty}]$).

Budući da je funkcija neprekidna u nuli, izrza je jednak $\frac{2}{3}$. Primijenimo li L'Hospitalovo pravilo na neispravan način dobivamo krivi rezultat:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+2}{2x+3} \stackrel{\text{L'H (Krivol!)}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+2)'}{(2x+3)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) Limes kvocijenta derivacija ne postoji.

Izraz jest oblika $[\frac{\infty}{\infty}]$ (jer $x \rightarrow \infty$, a sinus je omeđen). Primijenimo li deriviranje, dobivamo:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - \sin x)'}{(x + \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}.$$

Vrijednost kosinusa oscilira između -1 i 1 kako $x \rightarrow \infty$ pa ovaj limes ne postoji (formalno, promotrimo nizove $x_n = 2n\pi$ i $y_n = (2n+1)\pi$). S druge strane, dijeljenjem brojnika i nazivnika s x slijedi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - \frac{\sin x}{x}}{1 + \frac{\sin x}{x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

(c) Derivacija nazivnika prima vrijednost nula beskonačno mnogo puta u okolini točke $+\infty$.

Početni izraz je oblika $[\frac{\infty}{\infty}]$. Lako je vidjeti da, skraćivanjem faktora $f(x)$ (koji je za $x > 1$ različit od 0), dobivamo $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-\sin x}$. Zbog oscilacije sinusa, taj limes ne postoji. Za formalni dokaz, promotrimo nizove $x_n = 2n\pi$ i $y_n = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$.

Pokažimo što se događa ako pokušamo primijeniti pravilo. Derivacija brojnika je

$$f'(x) = 1 + \cos(2x) = 2 \cos^2 x.$$

Nazivnik je $g(x) = f(x)e^{\sin x}$. Njegova derivacija je:

$$\begin{aligned} g'(x) &= f'(x)e^{\sin x} + f(x)e^{\sin x} \cos x \\ &= 2 \cos^2(x)e^{\sin x} + (x + \sin x \cos x)e^{\sin x} \cos x \\ &= e^{\sin x} \cos x \cdot (2 \cos x + x + \sin x \cos x). \end{aligned}$$

Vidimo da je $g'(x) = 0$ za svaki $x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Dakle, ne postoji interval $(M, +\infty)$ na kojemu je nazivnik L'Hospitalovog razlomka različit od nule. Ipak, pogledamo li kvocijent derivacija na točkama gdje je $\cos x \neq 0$, imamo:

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2 \cos^2 x}{e^{\sin x} \cos x \cdot (2 \cos x + x + \sin x \cos x)} = \frac{2 \cos x}{e^{\sin x} (2 \cos x + x + \sin x \cos x)}.$$

Kada $x \rightarrow \infty$, brojnik je omeđen, a nazivnik teži u beskonačnost (jer dominira faktor x). Dakle, neispravnom primjenom pravila zaključili bismo da je:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} \stackrel{\text{L'H (Krivolo!)}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = 0$$

iako početni limes ne postoji.

□

Zadatak 1.69. Izračunajte

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right)$

(e) $\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\cos \frac{\pi}{2} x}$

(c) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$

(f) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1+x^2)^{\frac{1}{x}}$

Rješenje. (a) Prvo svodimo na zajednički nazivnik kako bismo dobili oblik $\frac{0}{0}$ i zatim primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x \sin x} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x + x \cos x} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x + (\cos x - x \sin x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{2 \cos x - x \sin x} = \frac{0}{2(1) - 0} = 0. \end{aligned}$$

Prokomentirajmo primjene L'Hopitalovog pravila. Opravdajmo najprije drugu primjenu L'Hopitalovog pravila. Označimo nazivnik početnog razlomka s $g(x) = x \sin x$. Tada za nazivnik u drugoj primjeni pravila vrijedi $g'(x) = \sin x + x \cos x$, a njegova je derivacija

$$g''(x) = 2 \cos x - x \sin x.$$

Budući da je g'' neprekidna u 0 i vrijedi $g''(0) = 2 > 0$, po teoremu o očuvanju predznaka neprekidne funkcije slijedi da postoji $\delta_2 > 0$ tako da za sve $x \in (-\delta_2, \delta_2)$ vrijedi

$$g''(x) > 0.$$

Tada možemo odabrati $I_2 := (-\delta_2, \delta_2)$ kao traženu okolinu u drugoj primjeni L'Hopitalovog pravila.

Prelazimo sada na opravdanje prve primjene. Kao što smo vidjeli, vrijedi

$$g'(x) = \sin x + x \cos x$$

pa je potrebno dokazati da postoji interval I_1 oko 0 tako da je $g'(x) \neq 0$ za sve $x \in I_1 \setminus \{0\}$.

Budući da smo pokazali da je $g''(x) > 0$ za sve $x \in I_2$, koristeći Lagrangeov teorem o srednjoj vrijednosti za $x \in I_2 \setminus \{0\}$, vidimo da postoji y_x između 0 i x takav da vrijedi

$$\frac{g'(x) - g'(0)}{x - 0} = g''(y_x) \implies g'(x) = x g''(y_x).$$

Kako je $x \neq 0$ i $g''(y_x) > 0$, slijedi da je $g'(x) \neq 0$. Dakle, i u prvoj primjeni možemo uzeti interval $I_1 = I_2$.

Napomena. U komentaru nakon rješenja vidjet ćemo da zapravo nije potrebno opravdavati postojanje intervala na kojem je derivacija različita od 0 ukoliko primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo više puta i tvrdnja vrijedi u zadnjem koraku.

(b) Svodimo izraz na zajednički nazivnik i primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\ln(x+1)} - \frac{1}{x} \right) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(x+1)}{x \ln(x+1)} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \frac{1}{x+1}}{\ln(x+1) + x \cdot \frac{1}{x+1}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1-1}{(x+1)\ln(x+1) + x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(x+1)\ln(x+1) + x} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 \cdot \ln(x+1) + (x+1) \cdot \frac{1}{x+1} + 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(x+1) + 1 + 1} = \frac{1}{\ln 1 + 2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(c) Primijetimo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{x \ln x}$$

Sada računamo samo limes eksponenta, koji je oblika $0 \cdot (-\infty)$. Spuštanjem varijable x u nazivnik dobivamo oblik pogodan za L'Hopitalovo pravilo:

$$L = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x) = 0.$$

Konačno, koristeći neprekidnost funkcije $x \mapsto e^x$ u 0 slijedi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = e^0 = 1.$$

Napomena. Primijetimo da smo limes funkcije $x \ln x$ u prethodnom zadatku mogli pokušati riješiti i tako da prebacimo $\ln x$ u nazivnik na sljedeći način:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\frac{1}{\ln x}} = \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{-\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (-x \ln^2 x).$$

Međutim, posljednji izraz još je kompliciraniji od početnog. Zašto se to dogodilo? Kada $\ln x$ ostavimo u brojniku, deriviranje ga pretvara u jednostavan algebarski izraz $\frac{1}{x}$, dok deriviranje razlomka $\frac{1}{\ln x}$ zbog pravila ulančavanja povećava potenciju logaritma u nazivniku i dodatno komplicira izraz. Pouka je da ukoliko jedna primjena L'Hopitalovog pravila ne riješi problem, možemo pokušati primijeniti ga na drugačiji način, koji može biti bolji.

(d) Ponovno zapisujemo izraz pomoću baze e :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln x}$$

Računamo limes eksponenta, koji je odmah oblika $\frac{\infty}{\infty}$:

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0.$$

Koristeći neprekidnost funkcije $x \mapsto e^x$ u 0, slijedi

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1.$$

(e) Zapisujemo pomoću baze e :

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\cos \frac{\pi}{2}x} = \lim_{x \rightarrow 1^-} e^{\cos(\frac{\pi}{2}x) \ln(1-x)} = e^{\lim_{x \rightarrow 1^-} \cos(\frac{\pi}{2}x) \ln(1-x)}$$

Limes eksponenta je oblika $0 \cdot (-\infty)$. Prebacujemo kosinus u nazivnik kako bismo dobili recipročnu funkciju (sekans) i oblik $\frac{-\infty}{\infty}$ i primijenili L'Hopitalovo pravilo:

$$L = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\ln(1-x)}{\frac{1}{\cos(\frac{\pi}{2}x)}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin(\frac{\pi}{2}x)}{\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2 \cos^2(\frac{\pi}{2}x)}{\pi(1-x) \sin(\frac{\pi}{2}x)}.$$

Kako bismo si olakšali daljnji račun, razdvojimo limes na dio koji uvrštavanjem ne daje nulu i dio koji daje neodređenost $\frac{0}{0}$:

$$= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-2}{\pi \sin(\frac{\pi}{2}x)} \cdot \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}{1-x}$$

Prvi limes teži u $\frac{-2}{\pi \cdot 1} = -\frac{2}{\pi}$. Na drugi limes primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\cos^2(\frac{\pi}{2}x)}{1-x} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2 \cos(\frac{\pi}{2}x) \cdot (-\sin(\frac{\pi}{2}x)) \cdot \frac{\pi}{2}}{-1} = \frac{0}{-1} = 0$$

Ukupni limes eksponenta je $L = -\frac{2}{\pi} \cdot 0 = 0$. Vraćamo u eksponent:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} (1-x)^{\cos \frac{\pi}{2}x} = e^0 = 1$$

(f) Prelazimo na bazu e :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{1}{x} \ln(1+x^2)}$$

Računamo limes eksponenta (oblik $\frac{\infty}{\infty}$):

$$L = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{1+x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{2x} = 0$$

Vraćamo rezultat u eksponent:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2)^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$$

□

Zadatak 1.70. Odredite limese, ako postoje

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^n}, n \in \mathbb{N}, a > 0$

(b) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(x-1)$

(d) $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^{10} \sin x) \frac{\arcsin x - \operatorname{Arsh} x}{x^3}$

Rješenje. (a) Primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo deriviranjem brojnika i nazivnika. Kako bismo izbjegli komplicirane dvojne razlomke, derivacije funkcija $\arcsin x$ i $\operatorname{arctg} x$ zapisat ćemo pomoću negativnih eksponenata:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \operatorname{arctg} x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-1/2} - (1+x^2)^{-1}}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x) - (-1)(1+x^2)^{-2}(2x)}{6x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)^{-3/2} + 2x(1+x^2)^{-2}}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-3/2} + 2(1+x^2)^{-2}}{6} = \frac{1^{-3/2} + 2 \cdot 1^{-2}}{6} = \frac{1+2}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(b) Zapisat ćemo umnožak kao razlomak.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \ln x \ln(x-1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\ln(x-1)}{\frac{1}{\ln x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty} \right]$$

Primjenjujemo L'Hopitalovo pravilo:

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{x-1}}{-(\ln x)^{-2} \cdot \frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x \ln^2 x}{x-1} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-(1 \cdot \ln^2 x + x \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x})}{1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} -(\ln^2 x + 2 \ln x) = 0 \end{aligned}$$

- (c) Ovo je klasičan primjer u kojem se L'Hopitalovo pravilo primjenjuje višekratno. Budući da je $n \in \mathbb{N}$, nakon svake primjene pravila stupanj polinoma u nazivniku se smanjuje za 1, dok eksponencijalna funkcija u brojniku (uz konstantu a) ostaje suštinski ista:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{ax}}{x^n} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ae^{ax}}{nx^{n-1}} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \dots$$

Nakon n uzastopnih primjena L'Hopitalovog pravila, nazivnik će se derivirati u konstantu $n!$, a u brojniku će iskočiti a^n :

$$\stackrel{n \times \text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a^n e^{ax}}{n!}$$

Budući da je $a > 0$, funkcija e^{ax} teži u $+\infty$ kada $x \rightarrow +\infty$. Kako je nazivnik strogo pozitivna konstanta ($n!$), limes iznosi:

$$= +\infty$$

- (d) Prije ikakvog deriviranja, razdvojimo limes na umnožak dvaju limesa jer prvi faktor trivijalno možemo izračunati uvrštavanjem:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^{10} \sin x) \frac{\arcsin x - \text{Arsh } x}{x^3} = \underbrace{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x^{10} \sin x) \right)}_{=\cos(0)=1} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \text{Arsh } x}{x^3}$$

Sada nam ostaje riješiti samo drugi limes, koji je oblika $\frac{0}{0}$. Kao i u (a) dijelu, koristimo negativne eksponente:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x - \text{Arsh } x}{x^3} &= \left[\frac{0}{0} \right] \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1-x^2)^{-1/2} - (1+x^2)^{-1/2}}{3x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &\stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}(1-x^2)^{-3/2}(-2x) - \left(-\frac{1}{2}(1+x^2)^{-3/2}(2x)\right)}{6x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1-x^2)^{-3/2} + x(1+x^2)^{-3/2}}{6x} \\ &= \frac{1^{-3/2} + 1^{-3/2}}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

Početni je limes, po teoremu o limesu produkta, jednak $1 \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

□

Zadaci za vježbu

1.71. Izračunajte

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln x}{\text{ctg } x}$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{x^3 - 7x + 6}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} x - 1}{1 - \cos x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 0} (1 - \cos x) \operatorname{ctg} x$$

1.72. Izračunajte

$$(a) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} - \frac{1}{\ln x} \right)$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} x^{\frac{3}{4 + \ln x}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt[n]{x}}, n \in \mathbb{N}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^n}{x}, n \in \mathbb{N}$$

1.73. Izračunajte

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{1}{x} \right)^x$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sin 2x}{x - \sin x}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{\sin \pi x}$$

1.74. Izračunajte

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \operatorname{arctg} x}{x^3 + x^2 + x}$$

$$(b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin \sqrt{\sin x}}{\sqrt{2x - x^2}}$$

$$(c) \lim_{x \rightarrow \pi} (\pi - x) \operatorname{tg} \frac{x}{2}, n \in \mathbb{N}$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+x) - \frac{x^2}{2} + x}{e^x - \cos x}, n \in \mathbb{N}$$

1.75. Može li se primijeniti L'Hôpitalovo pravilo na

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \sin \frac{1}{x}}{\sin x} ?$$

Izračunajte gornji limes.

1.76. Izračunajte

(a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x \sin x} - \frac{1}{x^2} \right)$

(b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x \right)^{\frac{1}{\ln x}}$

(c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{1 + x^2 \ln \frac{ex}{x+1}} - x \right)$

(d) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x - x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$

1.6 Proširenja po neprekidnosti / derivabilnosti

Neprekidnost funkcije $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ u točki c otvorenog intervala $I \subseteq \mathbb{R}$ možemo karakterizirati na sljedeće načine:

- f je neprekidna u c ako i samo ako ima limes u točki c i vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c).$$

- f je neprekidna u c ako i samo ako ima limese slijeva i zdesna u točki c i vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c-} f(x) = f(c) = \lim_{x \rightarrow c+} f(x).$$

Zadatak 1.77 (Ne spada tu, izbaciti). Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} e^{-x} + 1, & x \geq 0 \\ x + \lambda, & x < 0 \end{cases}$$

bude neprekidna.

Zadatak 1.78. Dodefinirajte funkciju f u 0 (ako je moguće) tako da dobijete neprekidnu funkciju na \mathbb{R}

$$(a) f(x) = \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x}, \quad \alpha \geq 0, \quad (b) f(x) = \frac{x}{|x|}.$$

Funkcija f je **klase** C^k na otvorenom intervalu I ako postoji $f^{(k)}$ na I i funkcija $f^{(k)}$ je neprekidna na I . Pišemo $f \in C^k(I)$. Sjetite se da vrijedi:

f derivabilna u $c \implies f$ neprekidna u c

Zadatak 1.79. Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg} x, & |x| \leq 1 \\ \frac{\pi}{4} \operatorname{sgn} x + \frac{x-1}{2}, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Ispitajte:

- neprekidnost funkcije f ,
- diferencijabilnost funkcije f . Je li f klase C^1 tamo gdje je diferencijabilna?

Zadatak 1.80. Postoje li $a, b \in \mathbb{R}$ takvi da je $f \in C^1(\mathbb{R})$ ako je

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|}, & |x| \geq 1 \\ ax^2 + b, & |x| < 1 \end{cases} ?$$

Zadatak 1.81. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & |x| \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Dokažite da je f diferencijabilna na \mathbb{R} . Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$?

Zadatak 1.82. Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije

$$f(x) = (|x(x-2)| - 3x + 6)^2.$$

Zadatak 1.83. Neka je f diferencijabilna u nekoj okolini točke c i dva puta diferencijabilna u c . Dokažite:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c+h) + f(c-h) - 2f(c)}{h^2} = f''(c).$$

Zadatak 1.84. * **Riemannova funkcija** je funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definirana sa

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{n}, & x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, M(|m|, n) = 1 \\ 1, & x = 0 \end{cases}.$$

Dokažite da je f neprekidna na $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ i da ima prekid u svakoj racionalnoj točki.

Rješenje.

(a) $c = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, M(|m|, n) = 1 \implies f(c) = \frac{1}{n}$

Uzmimo neki $\varepsilon > 0$ takav da je $\varepsilon \leq \frac{1}{n}$. Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), |x_\delta - c| < \delta \ \& \ \underbrace{|f(x_\delta) - f(c)|}_{=0} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{1}{n}} \geq \varepsilon$$

pa f ima prekid u c .

(b) $c = 0$

Uzmimo neki $\varepsilon > 0$ takav da je $\varepsilon \leq 1$. Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), |x_\delta - 0| < \delta \ \& \ \underbrace{|f(x_\delta) - f(0)|}_{=0} = \underbrace{1}_{1} \geq \varepsilon$$

pa f ima prekid u 0.

(c) $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\varepsilon > \frac{1}{n}$. Definirajmo

$$A := \left\{ \frac{m}{n} : 1 \leq n < n_0 \right\} \cap \langle c-1, c+1 \rangle.$$

Tada je A konačan skup, jer u intervalu $\langle c - 1, c + 1 \rangle$ ima konačno mnogo razlomaka s nazivnikom iz skupa $\{1, 2, \dots, n_0 - 1\}$. Tada je $\delta := \min\{|c - p| : p \in A\} > 0$ i vrijedi

$$\begin{aligned} x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}, |x - c| < \delta &\implies |f(x) - f(c)| = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x - c| < \delta &\implies |f(x) - f(c)| = 0 < \varepsilon \end{aligned}$$

△

Zadatak 1.85. (Gradivo MA1) Ispitajte neprekidnost i diferencijabilnost **Dirichletove funkcije** $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Rješenje. Pokažimo da f ima prekid u svakoj točki:

(a) $c \in \mathbb{Q}$

Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), |x_\delta - c| < \delta \ \& \ \underbrace{|f(x_\delta) - f(c)|}_{=0} = 1 \geq \varepsilon$$

(b) $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Uzmimo $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{Q}), |x_\delta - c| < \delta \ \& \ \underbrace{|f(x_\delta) - f(c)|}_{=1} = 1 \geq \varepsilon$$

Dakle f nije nigdje neprekidna pa ne može biti ni diferencijabilna.

△

Zadatak 1.86. Ispitajte neprekidnost i diferencijabilnost funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}.$$

Rješenje.

- neprekidnost

Tvrdimo da je f neprekidna samo u 0.

- $c = 0$

Neka je $\varepsilon > 0$. Uzmimo $0 < \delta \leq \varepsilon$. Tada je

$$\begin{aligned} x \in \mathbb{Q}, |x - 0| < \delta &\implies |f(x) - f(c)| = |x - 0| < \delta \leq \varepsilon \\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, |x - 0| < \delta &\implies |f(x) - f(c)| = |0 - 0| < \varepsilon \end{aligned}$$

- $c \in \mathbb{Q}, c \neq 0$

Neka je $\varepsilon = \frac{|c|}{2}$. Tada

$$(\forall \delta > 0)(\exists x_\delta \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), |x_\delta - c| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - f(c)| = |0 - c| = |c| > \frac{|c|}{2} = \varepsilon$$

- $c \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$

Uzmimo $\varepsilon = \frac{|c|}{4}$. Tada

$$(\forall 0 < \delta < \frac{|c|}{2})(\exists x_\delta \in \mathbb{Q}), |x_\delta - c| < \delta \ \& \ |f(x_\delta) - f(c)| = |x_\delta - 0| = |x_\delta| \geq |c| - \underbrace{|c - x_\delta|}_{< \frac{|c|}{2}} \geq \frac{|c|}{2} > \varepsilon,$$

gdje smo iskoristili

$$|c| \leq |c - x_\delta| + |x_\delta| \implies |x_\delta| \geq |c| - |c - x_\delta|.$$

△

Zadaci za vježbu

1.87. Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x < 0 \\ \lambda, & x = 0 \\ 1 + x, & x > 0 \end{cases}$$

bude neprekidna. Je li f diferencijabilna?

1.88. Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije f definirane s

$$f(x) = \begin{cases} 4x - 8, & x \leq 3 \\ x^2 - 2x + 1, & x > 3. \end{cases}$$

Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$?

1.89. Ispitajte neprekidnost funkcije f definirane na $[-1, +\infty)$ formulom

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}, & x \neq 0 \\ \frac{1}{2}, & x = 0. \end{cases}$$

U kojim tačkama je f derivabilna, a u kojim neprekidno derivabilna?

1.90. Neka je $f(x) = |x|^3$. Dokažite da je $f \in C^2(\mathbb{R})$, ali da $f'''(0)$ ne postoji.

1.91. Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} \operatorname{arctg}(\sqrt{3}x), & |x| \leq 1 \\ \frac{\sqrt{3}}{4}x + \frac{\pi}{3} \operatorname{sgn} x - \frac{\sqrt{3}}{4}, & |x| > 1 \end{cases}.$$

Ispitajte:

- (a) neprekidnost funkcije f ,
- (b) diferencijabilnost funkcije f . Je li f klase C^1 tamo gdje je diferencijabilna?

1.92. Zadana ja funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} (x-a)^2(x-b)^2, & a \leq x \leq b \\ 0, & \text{inače} \end{cases}.$$

Je li f derivabilna? Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$?

1.93. Neka je

$$f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}.$$

Dokažite da je f diferencijabilna na \mathbb{R} . Je li $f \in C^1(\mathbb{R})$? Je li $f \in C^2(\mathbb{R})$? (Odgovori: Da. Ne.)

1.94. Ispitajte neprekidnost i derivabilnost funkcije

$$f(x) = ||x^3 + 3x^2 + 3x + 1| + |x^2 + x - 6||.$$

1.95. Zadana ja funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x + e^{\frac{1}{x}}, & x < 0 \\ \sin x, & x \geq 0 \end{cases}.$$

Je li $f \in C^2(\mathbb{R})$?



Označimo:

$$f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \quad \text{lijeva derivacija funkcije } f \text{ u točki } c$$

$$f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(c+h) - f(c)}{h}, \quad \text{desna derivacija funkcije } f \text{ u točki } c$$

1.96. Navedite primjer funkcije f neprekidne na $[-1, 1]$ za koju vrijedi

$$f(0) = 0, \quad f'_-(0) = 0 \text{ i } f'_+(0) = 1.$$

Skicirajte njen graf i zapišite formulu.

1.97. Skicirajte primjer grafa funkcije f neprekidne na $[-2, 2]$, koja zadovoljava uvjete

$$f(-2) = 1, \quad f(0) = 0, \quad f'_-(0) = 0, \quad f'_+(0) = 1 \text{ i } f'_-(2) = -1.$$

1.98. * Neka je f neprekidna na $\langle a, b \rangle$ te derivabilna na $\langle a, c \rangle$ i $\langle c, b \rangle$, za neki $c \in \langle a, b \rangle$. Nadalje, neka postoje $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$ i $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$. Koristeći L'Hôpitalovo pravilo dokažite tvrdnje:

1. $f'_-(c)$ postoji i vrijedi $f'_-(c) = \lim_{x \rightarrow c^-} f'(x)$,
2. $f'_+(c)$ postoji i vrijedi $f'_+(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} f'(x)$.

U slučaju da još vrijedi $f'_-(c) = f'_+(c)$, postoji čak $f'(c)$ i f' je neprekidna u c , tj. funkcija f je neprekidno derivabilna u c .

1.99. Dokažite da za funkciju zadanu s

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ne postoji $\lim_{x \rightarrow 0} f'(x)$ (niti jednostrani limesi), ali f ima derivaciju u 0. Dakle, ne možemo primijeniti postupak za ispitivanje derivabilnosti iz prethodnog zadatka.

1.100. Je li f definirana s

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)^{\frac{2}{3}}, & x \leq 0 \\ (x+1)^{\frac{2}{3}}, & x > 0 \end{cases}$$

derivabilna u 0?

1.101. Za

$$f(x) = (1-x)^{\frac{3}{2}}$$

odredite $f'_-(1)$, ako postoji.



U sljedećim zadacima iskoristite sljedeće teoreme:

Teorem. (Bolzano-Weierstrass) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada je i $f([a, b]) = [c, d]$ segment.

Teorem. (Rolle) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$, diferencijabilna na intervalu $\langle a, b \rangle$ i neka je $f(a) = f(b)$. Tada postoji $c \in \langle a, b \rangle$ takav da je $f'(c) = 0$.

Teorem. (Lagrangeov teorem srednje vrijednosti) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$ i diferencijabilna na intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada postoji $c \in \langle a, b \rangle$ takav da je

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

1.102. * Neka je $f: [a, b] \rightarrow [a, b]$ neprekidna funkcija. Pokažite da f ima barem jednu fiksnu točku na $[a, b]$, tj. da postoji $c \in [a, b]$ takav da je $f(c) = c$.

[Uputa: Bolzano-Weierstrassov teorem.]

1.103. * Ako je $f(x) = x(x - 1)(x - 2)(x - 3)$, pokažite da jednadžba $f'(x) = 0$ ima tri realna rješenja i nađite intervale u kojima se nalaze.

[Uputa: Rolleov teorem.]

1.104. * Koristeći Rolleov teorem dokažite

Teorem. (Cauchyev teorem srednje vrijednosti) Neka su f i g realne funkcije koje su neprekidne na segmentu $[a, b]$ i diferencijabilne na intervalu $\langle a, b \rangle$. Tada postoji $c \in \langle a, b \rangle$ takav da je

$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c).$$

Specijalno, ako je $g(b) \neq g(a)$ i $g'(c) \neq 0$, tada je

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

[Uputa: Imitirajte dokaz Lagrangeovog teorema srednje vrijednosti.]

1.105. * Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ n puta derivabilna funkcija takva da je $f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0$. Pokažite da za svaki $x \in \mathbb{R}$ postoji $0 < \vartheta < 1$ takav da je

$$\frac{f(x)}{x^n} = \frac{f^{(n)}(\vartheta x)}{n!}.$$

[Uputa: Iskoristite Cauchyev teorem srednje vrijednosti.]

1.106. * Koristeći Cauchyev teorem srednje vrijednosti dokažite **L'Hôpitalovo pravilo**:

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $c \in I$. Neka su f i g realne funkcije koje su derivabilne na I takve da je $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow c} g(x)$, $g'(x) \neq 0$, za sve $x \in I \setminus \{c\}$ i da postoji limes $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Tada postoji $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)}$ i vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow c} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

1.107. * Pokažite da je Lagrangeov teorem srednje vrijednosti specijalni slučaj Cauchyevog teorema srednje vrijednosti.

1.108. * Koristeći Lagrangeov teorem srednje vrijednosti dokažite sljedeće nejednakosti:

(a) $\frac{1}{x+1} < \ln \frac{1+x}{x} < \frac{1}{x}$, za $x > 0$

(b) $\frac{y-x}{5} < \arctg\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \arctg\left(1 + \frac{1}{y}\right) < y-x$, za $0 < x < y < 1$

1.7 Pad i rast. Ekstremi

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ interval i $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija koja je derivabilna u svim nerubnim točkama intervala I .

Monotonost funkcije f na intervalu I možemo karakterizirati pomoću derivacije na sljedeći način:

- f raste na $I \iff f'(x) \geq 0$, za sve nerubne točke $x \in I$
- f pada na $I \iff f'(x) \leq 0$, za sve nerubne točke $x \in I$

Definiramo skup **stacionarnih točaka** funkcije f sa

$$S := \{x \in I : f'(x) = 0\}.$$

Sljedeći kriterij daje karakterizaciju stroge monotonosti:

- f strogo raste na $I \iff$ skup stacionarnih točaka S ne sadrži interval i $f'(x) > 0$, za sve nerubne točke $x \in I \setminus S$
- f strogo pada na $I \iff$ skup stacionarnih točaka S ne sadrži interval i $f'(x) < 0$, za sve nerubne točke $x \in I \setminus S$

Nužan uvjet za lokalni ekstrem je dan sljedećim teoremom:

Teorem. (Fermat) Ako funkcija $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ ima lokalni ekstrem u $c \in \langle a, b \rangle$ i ako je derivabilna u c , onda je $f'(c) = 0$.

Zadatak 1.109. Pokažite primjerom da obrat u gornjem teoremu ne mora vrijediti.

Rješenje. Neka je $f: \langle -1, 1 \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ s pravilom pridruživanja $f(x) = x^3$. Funkcija f je strogo rastuća, pa niti u jednoj točki nema lokalni ekstrem. Međutim, $f'(0) = 3 \cdot 0^2 = 0$. \triangle

Zadatak 1.110. Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcija:

$$(a) f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^3}{3}$$

$$(b) f(x) = \frac{x}{x^2 - 10x + 16}$$

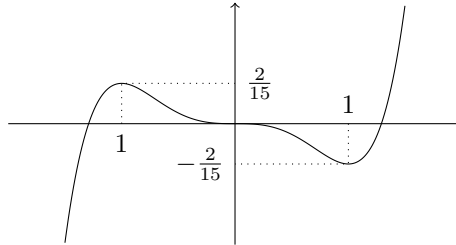
$$(c) f(x) = \arctg x - \frac{1}{2} \ln(1 + x^2)$$

Skicirajte grafove gornjih funkcija.

Rješenje. (a) Uočimo da je

$$f'(x) = x^4 - x^2 = x^2(x-1)(x+1).$$

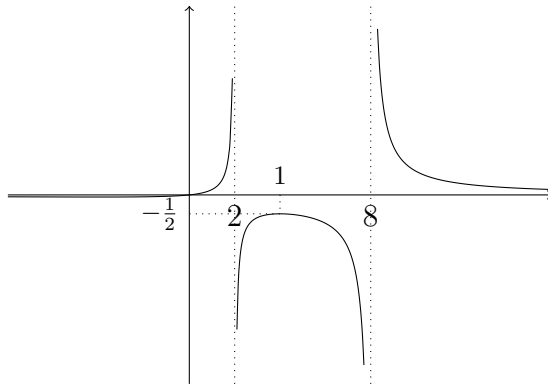
Oдавде slijedi da je $f' < 0$ na $\langle -1, 1 \rangle$, a $f' > 0$ na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$. Iz prethodne karakterizacije zaključujemo da f strogo raste na $\langle -\infty, -1 \rangle$ i $[1, +\infty)$, a strogo pada na $[-1, 1]$. Napomenimo i da bi bilo pogrešno reći da f strogo raste na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup [1, +\infty)$ budući da je, na primjer, $f(-1) > f(1)$. Iz prethodne analize je sada očito da se u -1 postiže lokalni maksimum (i iznosi $\frac{2}{15}$), a u 1 lokalni minimum (i iznosi $-\frac{2}{15}$).



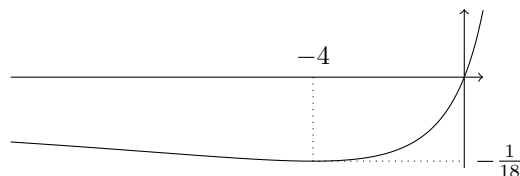
(b) Uočimo da je za $x \in \mathbb{R} \setminus \{2, 8\}$

$$f'(x) = \frac{16 - x^2}{(x^2 - 10x + 16)^2},$$

dok u točkama 2 i 8 funkcija f nije niti definirana. Kako je $16 - x^2 < 0$ za $x \in \langle -\infty, -4 \rangle \cup \langle 4, +\infty \rangle$, a $16 - x^2 > 0$ za $x \in \langle -4, 4 \rangle$ zaključujemo da f strogo pada na intervalima $\langle -\infty, -4 \rangle$, $[4, 8)$ i $\langle 8, +\infty \rangle$, a strogo raste na intervalima $[-4, 2)$ i $\langle 2, 4]$. U točki -4 postiže se lokalni minimum (i iznosi $-\frac{1}{18}$), a u točki 4 lokalni maksimum (i iznosi $\frac{1}{2}$).



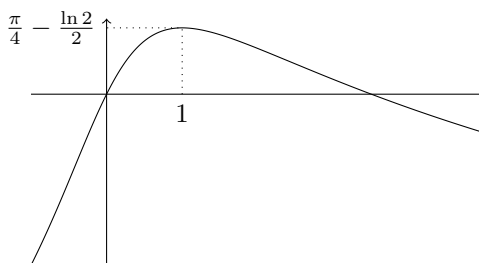
”Zumiramo” dio oko točke -4



(c) Budući da je

$$f'(x) = \frac{1-x}{1+x^2},$$

zaključujemo da f strogo raste na $(-\infty, 1]$, a strogo pada na $[1, +\infty)$. U točki 1 postiže se lokalni (čak i globalni) maksimum (i iznosi $\frac{\pi}{4} - \frac{\ln 2}{2}$).



△

Vrijedi:

Teorem. (Bolzano-Weierstrass) Neka je f realna funkcija koja je neprekidna na segmentu $[a, b]$. Tada je $f([a, b]) = [c, d]$ segment.

Dakle, ako je funkcija neprekidna na segmentu, onda ona na tom segmentu postiže minimum i maksimum.

Zadatak 1.111. Odredite broj realnih rješenja svake od sljedećih jednačbi:

(a) $x^7 + x^5 + x^3 - 3 = 0,$

(b) $x + \cos x - 5 = 0$

Rješenje. (a) Uočimo da je broj rješenja dane jednačbe jednak broju nultočaka funkcije $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadane s $f(x) = x^7 + x^5 + x^3 - 3$. Kako je

$$f'(x) = 7x^6 + 5x^4 + 3x^2,$$

zaključujemo da je 0 jedina stacionarna točka, dok za sve ostale x vrijedi $f'(x) > 0$. Iz prethodne karakterizacije zaključujemo da je f strogo rastuća pa ima *najviše jednu* nultočku. S druge strane, očito je $f(1) = 0$, pa f ima *tačno jednu* nultočku. Alternativno, mogli smo zaključiti da f ima barem jednu nultočku i bez da smo direktno uočili da je $f(1) = 0$. Naime, budući da je, na primjer, $f(-100) < 0$ i $f(100) > 0$, Bolzano-Weierstrassov teorem nam govori da postoji (barem jedna) točka iz $[-100, 100]$ koju f šalje u 0.

(b) Ponovno određujemo broj nultočaka funkcije $f(x) = x + \cos x - 5$. Kako je

$$f'(x) = 1 - \sin x,$$

vidimo da je skup stacionarnih točaka funkcije f jednak $S = \{\frac{\pi}{2} + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, S ne sadrži interval, dok je u svim ostalim točkama funkcija f' strogo pozitivna. Zaključujemo da je f strogo rastuća pa ima najviše jednu nultočku. Budući da je $f(-10) < 0$, a $f(10) > 0$, po Bolzano-Weierstrassovom teoremu znamo da f ima barem jednu nultočku. Spajajući posljednja dva zaključka dobivamo da f ima točno jednu nultočku, pa i početna jednadžba ima točno jedno realno rješenje.

△

Neka je $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ neprekidna funkcija. Za točku $c \in [a, b]$ kažemo da je **kritična točka** ako vrijedi nešto od sljedećeg:

- f nije derivabilna u c
- f je derivabilna u c i $f'(c) = 0$
- $c = a$ ili $c = b$

Zadatak 1.112. Odredite globalne ekstreme funkcije

$$f: [-3, 3] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2 - 4|x|.$$

Rješenje. Posebno analiziramo funkciju f na $[-3, 0]$ i $[0, 3]$. Na $[-3, 0]$ je $f(x) = x^2 + 4x$ i $f'(x) = 2x + 4$ pa f pada na $[-3, -2]$, a raste na $[-2, 0]$. S druge strane, na $[0, 3]$ je $f(x) = x^2 - 4x$ i $f'(x) = 2x - 4$ pa f pada na $[0, 2]$, a raste na $[2, 3]$.

Iz ove analize možemo zaključiti da f poprima globalni minimum u -2 ili 2 . Budući da je $f(-2) = f(2) = -4$, zaključujemo da se globalni minimum postiže u obje te točke i iznosi -4 . Nadalje, f poprima globalni maksimum u -3 , 0 ili 3 . Budući da je $f(3) = f(-3) = -3$, a $f(0) = 0$, slijedi da se globalni maksimum postiže u 0 i iznosi 0 . △

Zadatak 1.113. Neka je $f(x) = x^4 + 8x^3 + 16x^2$. Odredite $f([-5, -1])$.

Rješenje. Imamo

$$f'(x) = 4x^3 + 24x^2 + 32x = 4x(x + 2)(x + 4),$$

pa je (ako gledamo samo interval $[-5, -1]$) $f' > 0$ na $\langle -4, -2 \rangle$, a $f' < 0$ na $\langle -5, -4 \rangle$ i $\langle -2, -1 \rangle$.

Sada zaključujemo da f pada na $\langle -5, -4 \rangle$, raste na $\langle -4, -2 \rangle$ i ponovno pada na $\langle -2, -1 \rangle$. Zbog toga slijedi da $f|_{[-5, -1]}$ postiže globalni maksimum ili u -5 ili u -2 . Budući da je $f(-5) = 25$ i $f(-2) = 16$, zaključuje da se radi o točki -5 i maksimumu 25 . Slično, $f|_{[-5, -1]}$ postiže globalni minimum ili u -4 ili u -1 . Budući da je $f(-4) = 0$ i $f(-1) = 9$, zaključuje da se radi o točki -4 i minimumu 0 . Iz Bolzano-Weierstrassovog teorema zaključujemo da je $f([-5, -1]) = [0, 25]$. △

Zadatak 1.114. Odredite sliku funkcija:

(a) $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = x^{1/3}(1-x)^{2/3}$

(b) $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = |x|e^{-|x-1|}$

Rješenje. (a) f je neprekidna svuda, ali nije derivabilna u točkama 0 i 1, te u rubovima -1 i 2 . Za ostale x je

$$f'(x) = \frac{1-3x}{3x^{2/3}(1-x)^{1/3}}.$$

Analizom predznaka vidimo da f raste na $[-1, 0]$ i $[0, \frac{1}{3}]$ (pa stoga i na $[-1, \frac{1}{3}]$), potom pada na $[\frac{1}{3}, 1]$ te opet raste na $[1, 2]$.

Budući da je $f(-1) = -4^{1/3}$ i $f(1) = 0$, zaključujemo da je $-4^{1/3}$ globalni minimum funkcije f . Slično, $f(\frac{1}{3}) = 4^{1/3}/3$ i $f(2) = 2^{1/3}$ pa je globalni maksimum funkcije f jednak $2^{1/3}$. Iz Bolzano-Weierstrassovog teorema zaključujemo da je slika funkcije f jednaka $[-4^{1/3}, 2^{1/3}]$.

(b) Na $[0, 1]$ je $f(x) = xe^{x-1}$ i $f'(x) = e^{x-1}(x+1)$, pa je f na $[0, 1]$ strogo rastuća. S druge strane, na $[-1, 0]$ je $f(x) = -xe^{x-1}$ i $f'(x) = -e^{x-1}(x+1)$ pa je f na $[-1, 0]$ strogo padajuća. Zaključujemo da je globalni minimum funkcije f jednak $f(0) = 0$, dok je globalni maksimum jednak $f(1)$ ili $f(-1)$. Budući da je $f(1) = 1$ i $f(-1) = \frac{1}{e^2}$ slijedi da je globalni maksimum jednak 1 pa je, prema Bolzano-Weierstrassovom teoremu, slika funkcije f jednaka $[0, 1]$.

△

Zadatak 1.115. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ odredite broj nultočaka funkcije

$$f(x) = x \ln x - a.$$

Rješenje. Uočimo da je

$$f'(x) = \ln x + 1,$$

pa je f strogo padajuća $\langle 0, \frac{1}{e} \rangle$, a strogo rastuća na $\langle \frac{1}{e}, +\infty \rangle$. Nadalje, f u točki $\frac{1}{e}$ postiže globalni minimum i on iznosi $f(\frac{1}{e}) = -\frac{1}{e} - a$.

Ukoliko je $a < -\frac{1}{e}$ možemo zaključiti da f nema nultočaka, dok za $a = -\frac{1}{e}$ postoji točno jedna nultočka (upravo $\frac{1}{e}$).

Preostaje za analizirati slučaj $a > -\frac{1}{e}$. U tom slučaju, možemo imati još najviše dvije nultočke.

Prva potencijalna nultočka bit će na intervalu $\langle 0, \frac{1}{e} \rangle$ i ona će postojati ako i samo ako je $\lim_{x \rightarrow 0+} f(x) > 0$. Koristeći L'Hôpitalovo pravilo imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0+} x \ln x = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0,$$

pa je $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -a$. Zaključujemo da je na $\langle 0, \frac{1}{e} \rangle$ imamo nultočku ako je $a < 0$.

Druga potencijalna nultočka bit će na intervalu $\langle \frac{1}{e}, +\infty \rangle$ i ona će postojati ako i samo ako je $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) > 0$, a to očito vrijedi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

Dakle, za $a \in \langle -\frac{1}{e}, 0 \rangle$ funkcija f ima dvije, a za $a \geq 0$ jednu nultočku. △

Zadatak 1.116. Dokažite nejednakosti:

$$(a) \quad x - \frac{x^3}{6} < \sin x < x, \text{ za } x > 0$$

$$(b) \quad x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x, \text{ za } x > 0$$

$$(c) \quad \ln(1+e^{-2x}) + 2 \operatorname{arctg} e^x < \pi, \text{ za } x > 0$$

Rješenje. (a) Neka su $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{6} \quad \text{i} \quad g(x) = x - \sin x.$$

Tvrdnja će biti dokazana ukoliko pokažemo da je $f > 0$ i $g > 0$ na $\langle 0, +\infty \rangle$. Budući da je $g'(x) = 1 - \cos x$, možemo zaključiti da je $g' > 0$ osim na skupu stacionarnih točaka koji ne sadrži interval. Slijedi da je g strogo rastuća, a budući da je $g(0) = 0$ vrijedi da je $g > 0$ na $\langle 0, +\infty \rangle$.

Uočimo da je

$$f'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad f''(x) = x - \sin x.$$

Funkcija f'' je, dakle, jednaka g pa je $f'' > 0$ na $\langle 0, +\infty \rangle$. Slijedi da je f' strogo rastuća na $[0, +\infty)$, a budući da je $f'(0) = 0$ imamo da je $f' > 0$ na $\langle 0, +\infty \rangle$. Zaključujemo da je f strogo rastuća na $[0, +\infty)$, a kako je $f(0) = 0$ onda je $f > 0$ na $\langle 0, +\infty \rangle$.

(b) Slično kao u (a) dijelu, definiramo $f, g: \langle -1, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ s

$$f(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} \quad \text{i} \quad g(x) = x - \ln(1+x).$$

Tvrdnja će biti dokazana ukoliko pokažemo da je $f > 0$ i $g > 0$ na $\langle 0, +\infty \rangle$. Budući da je

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x},$$

zaključujemo da je f strogo rastuća na $[0, +\infty)$, pa tvrdnja slijedi iz $f(0) = 0$.

S druge strane

$$g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x},$$

pa je i g strogo rastuća na $[0, +\infty)$ i tvrdnja slijedi zbog $g(0) = 0$.

(c) Neka je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \ln(1 + e^{-2x}) + 2 \operatorname{arctg} e^x - \pi.$$

Tvrđnja će biti dokazana ukoliko pokažemo da je $f < 0$ na $\langle 0, +\infty \rangle$. Uočimo da je

$$f'(x) = \frac{2(e^x - 1)}{e^{2x} + 1},$$

odakle slijedi da je f strogo rastuća na $[0, +\infty)$. Budući da je $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, sada možemo zaključiti da je doista $f < 0$ na $\langle 0, +\infty \rangle$.

△

Zadatak 1.117. Žica duljine $l > 0$ je presječena na dva dijela. Od jednog dijela se savije kružnica, a od drugog rub kvadrata. Kako treba presjeći žicu da zbroj površina kruga i kvadrata bude minimalan?

Rješenje. Pretpostavimo da ćemo dio segment $[0, x]$ iskoristiti za kružnicu, a $[x, l]$ za kvadrat. Tada je suma površina funkcija $f: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s

$$f(x) = \left(\frac{x}{2\pi}\right)^2 \pi + \left(\frac{l-x}{4}\right)^2,$$

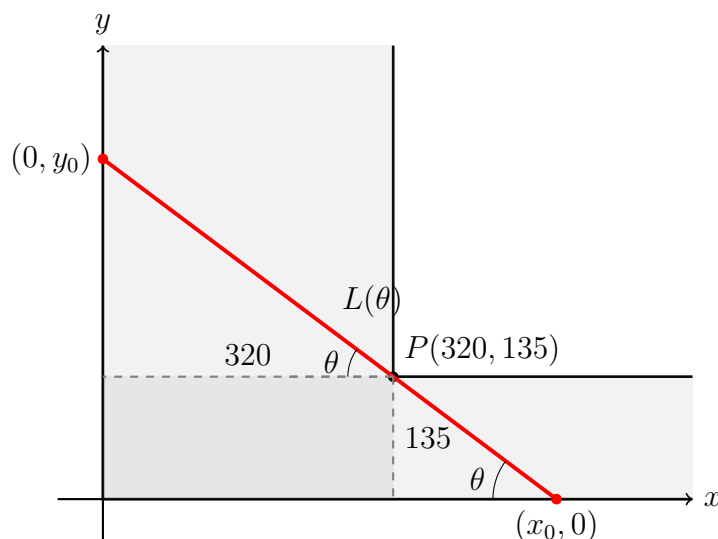
a njena derivacija je

$$f'(x) = \frac{x}{2\pi} + \frac{x-l}{8} = x \left(\frac{1}{2\pi} + \frac{1}{8}\right) - \frac{l}{8}.$$

Zaključujemo da f pada na $[0, \frac{l\pi}{\pi+4}]$, a raste na $[\frac{l\pi}{\pi+4}, l]$. Žicu treba presijeći u omjeru $\pi : 4$. △

Zadatak 1.118. Dva hodnika širine 320 cm i 135 cm se sijeku pod pravim kutem. Odredite najveću duljinu tankog nesavitljivog štapa koji se može prenijeti iz jednog hodnika u drugi.

Rješenje. Smjestimo hodnike u koordinatni sustav tako da se vanjski zidovi poklapaju s koordinatnim osima. Tada se unutarnji kut hodnika nalazi u točki $P(320, 135)$.



Pretpostavimo, bez smanjenja općenitosti, da se na početku štap nalazi u horizontalnom hodniku i zatvara kut $\theta = 0$ s x osi te da se na kraju kretanja nalazi u vertikalnom hodniku i zatvara kut $\theta = \frac{\pi}{2}$ s x osi. Budući da je kretanje neprekidno, Bolzano–Weierstrassov teorem implicira da kut θ , koji štap zatvara u odnosu na x os, mora tijekom toga perioda postići sve vrijednosti u intervalu $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Ako se štap nalazi u hodniku i zatvara kut $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$ s x osi, njegova je duljina očito omeđena duljinom najdulje dužine koju pod kutem θ možemo smjestiti u zadani hodnik. Najdulja takva dužina očito prolazi kroz P jer ako neka dužina zatvara kut θ s x osi kao na slici i ne prolazi vrhom P , možemo je translirati prema gore dok ne prođe točkom P i zatim produljiti dok ne takne zidove. Ta dužina bit će dulja po Pitagorinom poučku budući da su katete dulje.

Duljinu te najdulje dužine koja zatvara kut θ s x osi označimo sa $L(\theta)$. Najdulja dužina sastoji se od dva dijela: dužine od y -osi do kuta P te dužine od kuta P do x -osi. Koristeći trigonometriju pravokutnog trokuta, dobivamo:

$$L(\theta) = \frac{320}{\cos \theta} + \frac{135}{\sin \theta}.$$

Dakle, ako štap možemo provući kroz hodnik, zaključujemo da je njegova duljina ograničena sa $L(\theta)$ za sve $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Prema tome, nađimo najmanju ogradu za njegovu duljinu, tj. minimum funkcije $L(\theta)$.

Računamo derivaciju.

$$L'(\theta) = \frac{320 \sin \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{135 \cos \theta}{\sin^2 \theta} = \frac{320 \sin^3 \theta - 135 \cos^3 \theta}{\sin^2 \theta \cos^2 \theta}$$

Budući da je nazivnik pozitivan na domeni funkcije L , promotrimo brojnik. Uvjet

$$L'(\theta) \stackrel{(>)}{=} 0,$$

zbog toga što je \cos pozitivna na domeni funkcije L , ekvivalentan je s

$$\operatorname{tg}^3 \theta \stackrel{(>)}{=} \frac{135}{320} = \frac{27}{64} \Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta \stackrel{(>)}{=} \frac{3}{4}.$$

Označimo li $\theta_0 := \operatorname{arctg} \frac{3}{4}$, iz gornjeg računa slijedi $L'(\theta) < 0$ za $\theta < \theta_0$ i $L'(\theta) > 0$ za $\theta > \theta_0$. Dakle θ_0 je minimum funkcije L na $\langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Zbog pozitivnosti \sin i \cos na domeni, slijedi

$$\sin \theta_0 = \sqrt{\sin^2 \theta_0} = \sqrt{\frac{\sin^2 \theta_0}{\sin^2 \theta_0 + \cos^2 \theta_0}} = \sqrt{\frac{\operatorname{tg}^2 \theta_0}{\operatorname{tg}^2 \theta_0 + 1}} = \frac{3}{5}$$

i odatle

$$\cos \theta_0 = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_0} = \frac{4}{5}.$$

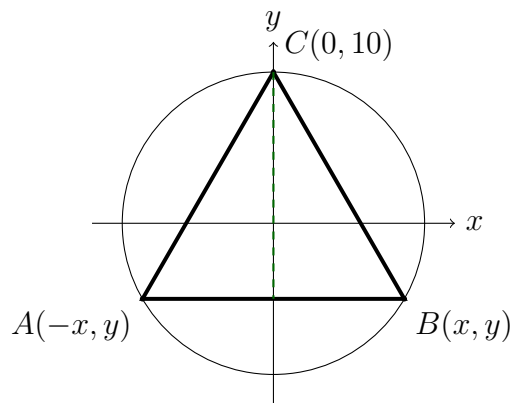
Konačno, uvrštavanjem vrijednosti u početnu funkciju kako bismo dobili minimalnu duljinu:

$$L_{\min} = \frac{320}{\frac{4}{5}} + \frac{135}{\frac{3}{5}} = 625.$$

Dakle, najveća duljina tankog nesavitljivog štapa koji se može prenijeti iz jednog hodnika u drugi iznosi 625 cm. \triangle

Zadatak 1.119. U krug radijusa 10 cm upišite jednakokrani trokut maksimalne površine.

Rješenje. Smjestimo središte kružnice u ishodište koordinatnog sustava. Jednadžba kružnice je $x^2 + y^2 = 100$. Vrh C , koji se nalazi između krakova jednakih duljina, smještamo u točku $(0, 10)$. Preostala dva vrha, B i A , nalaze se na kružnici i simetrični su s obzirom na y -os. Njihove su koordinate $B(x, y)$ i $A(-x, y)$, pri čemu pretpostavljamo $x \geq 0$.



Osnovica trokuta je dužina \overline{AB} , čija je duljina $2x$. Visina trokuta spuštena iz vrha $C(0, 10)$ na osnovicu iznosi $h = 10 - y$, pri čemu je $y \in \langle -10, 10 \rangle$.

Površina trokuta iznosi (koristimo pretpostavku $x \geq 0$ kod računanja korijena):

$$P = \frac{1}{2} \cdot (2x) \cdot (10 - y) = x(10 - y) = \sqrt{100 - y^2} \cdot (10 - y).$$

Deriviranjem slijedi

$$P'(y) = \frac{1}{2\sqrt{100 - y^2}} \cdot (-2y) \cdot (10 - y) + \sqrt{100 - y^2} \cdot (-1) = \frac{2y^2 - 10y - 100}{\sqrt{100 - y^2}}$$

Nazivnik je pozitivan na domeni pa je uvjet $P'(y) \stackrel{(>)}{=} 0$ ekvivalentan s

$$2y^2 - 10y - 100 \stackrel{(>)}{=} 0 \Leftrightarrow (y - 10)(y + 5) \stackrel{(>)}{=} 0.$$

Odatle slijedi da je jedino rješenje jednadžbe $P'(y) = 0$ na $\langle -10, 10 \rangle$ zapravo $y = -5$ i vrijedi $P'(y) > 0$ za $y < -5$ i $P'(y) < 0$ za $y \in \langle -5, 10 \rangle$. Dakle, točka $y = -5$ je točka globalnog maksimuma i tada vrijedi

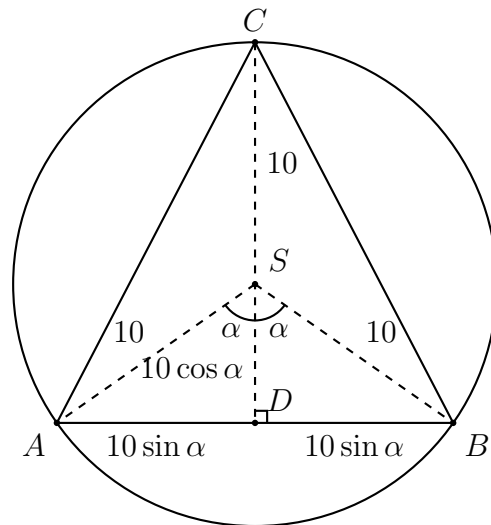
$$P_{max} = P(-5) = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

Napomena. Računanjem duljina stranica može se pokazati da je trokut maksimalne površine zapravo jednakostraničan.

Alternativno rješenje. Neka je ABC traženi jednakokračni trokut maksimalne površine, te neka mu je AB osnovica. Uočimo da je ABC šiljastokutan. Doista, kad bi $\angle ACB$ bio tup, mogli bismo nacrtati šiljastokutni jednakokračni trokut $A'B'C$ koji bi bio upisan u istu kružnicu takav da je $A'B'$ paralelno s AB i da je $|AB| = |A'B'|$. Tada bi visina iz C na AB bila strogo manja od visine iz C na $A'B'$ pa bi trokut $A'B'C$ ima veću površinu nego ABC .

Neka je S središte promatrane kružnice i označimo s α polovicu kuta $\angle ASB$. Tada je $|AB| = 20 \sin \alpha$, dok duljina visine iz C na stranicu AB iznosi

$$10 + 10 \cos \alpha.$$



Zadatak se svodi na maksimiziranje funkcije $P: \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

$$P(\alpha) = \frac{1}{2} \cdot 20 \sin \alpha \cdot (10 + 10 \cos \alpha) = 100 \sin \alpha + 100 \sin \alpha \cos \alpha.$$

Budući da je

$$P'(\alpha) = 100(2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1) = 100(2 \cos \alpha - 1)(\cos \alpha + 1).$$

Odavde vidimo da je P rastuća na $\langle 0, \frac{\pi}{3} \rangle$, a padajuća na $[\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$ pa je površina maksimalna za $\alpha = \frac{\pi}{3}$, a to će biti slučaj ukoliko je ABC jednakostraničan trokut. \triangle

Zadaci za vježbu

1.120. Odredite intervale rasta i pada te lokalne ekstreme funkcije zadane formulom:

$$(a) f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2 - 4},$$

$$(b) f(x) = \ln(x^4 - 6x^2 + 10) - 2 \operatorname{arctg}(x^2 - 3).$$

1.121. Odredite sliku funkcija:

$$(a) f: \left[\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x$$

$$(b) f: [-5, 5] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x + 2}{x^2 + 4x + 5}$$

1.122. U ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$ odredite broj nultočaka funkcije

$$f(x) = e^x - x - a.$$

1.123. Dokažite nejednakosti:

$$(a) \operatorname{tg} x > x + \frac{x^3}{3}, \text{ za svaki } 0 < x < \frac{\pi}{2}$$

$$(b) 2x \operatorname{arctg} x \geq \ln(1 + x^2), \text{ za svaki } x > 0$$

$$(c) \ln x > \frac{2(x-1)}{x+1}, \text{ za svaki } x > 1$$

$$(d) 5x + \frac{1}{x^5} \geq 6, \text{ za svaki } x > 0,$$

$$(e) \operatorname{arctg} x > \arcsin \frac{x^2}{x^2 + 1}, \text{ za svaki } x > 0,$$

$$(f) \ln \frac{b}{a} < \frac{b^2 - a^2}{2ab}, \text{ za svake } 0 < a < b,$$

$$(g) \left(\sin x + \frac{1}{\sin x}\right)^{\frac{8}{3}} + \left(\cos x + \frac{1}{\cos x}\right)^{\frac{8}{3}} \geq 9\sqrt[3]{\frac{9}{2}}, \text{ za svaki } x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle.$$

1.124. Odredite globalne ekstreme funkcije:

$$(a) f: \left[-2, -\frac{1}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = e^{\frac{x^2+6x+1}{x}},$$

$$(b) f: \left[\frac{1}{2}, 5\right] \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \ln \frac{x^2 + 1}{x^2 + 3x + 1}.$$

1.125. Rastavite broj 1 na dva nenegativna pribrojnika tako da im zbroj korijena bude najveći.

1.126. U polukružnicu polumjera 1 upisan je trapez čija osnovica je promjer polukružnice. Odredite kut uz osnovicu trapeza tako da površina trapeza bude najveća.

1.127. Na krivulji $y = \operatorname{ch} x$ nađite točku najbližu pravcu $y = \frac{3}{4}x$.

1.128. U zemlji *MathLand* davno je uveden koordinatni sustav. Na obali rijeke $y = 0$ nalazi se grad $A(-2, 0)$, a dalje od obale je grad $C(0, 1)$. Odredite na kojem mjestu treba izgraditi pristanište $B(b, 0)$, $-2 \leq b \leq 0$ da bi transport od A do C preko B bio najjeftiniji. Pritom je još poznato da je cijena transporta kopnom dva puta veća nego cijena transporta rijekom.

1.129. Odredite broj realnih rješenja jednadžbe $(x^2 - 3)e^x = a$ (u ovisnosti o parametru $a \in \mathbb{R}$).

1.130. Na krivulju $y = \frac{2x - 1}{x - 1}$, $x > 1$ povucite tangentu takvu da površina pravokutnog trokuta omeđenog tom tangentom i koordinatnim osima bude minimalna. Kolika je najmanja vrijednost te površine?

1.131. U elipsu $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ upišite pravokutnik najveće površine.

1.132. Tangenta elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ siječe koordinatne osi u točkama A i B . Pokažite da je

$$|AB| \geq a + b.$$

1.133. U kuglu radijusa 10 cm upišite stožac maksimalnog volumena.

1.134. Odredite $a \in \mathbb{R}$ takav da minimum funkcije $f(x) = 4x^2 + 4ax + a^2 - 2a$ na segmentu $[0, 2]$ bude 1.

1.135. Iz kruga je izrezan kružni isječak sa središnjim kutem α . Odaberite kut α tako da volumen stošca, čiji se plašt dobije savijanjem izrezanog dijela bude najveći.

1.136. U kocku duljine stranice a upišite valjak maksimalnog volumena, tako da mu prostorna dijagonala kocke prolazi središtem.

1.137. (a) Pokažite da za $x > 0$ vrijedi

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \leq 0, \text{ kada je } 0 < \alpha < 1$$

$$x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1 \geq 0, \text{ kada je } \alpha < 0 \text{ ili } \alpha > 1$$

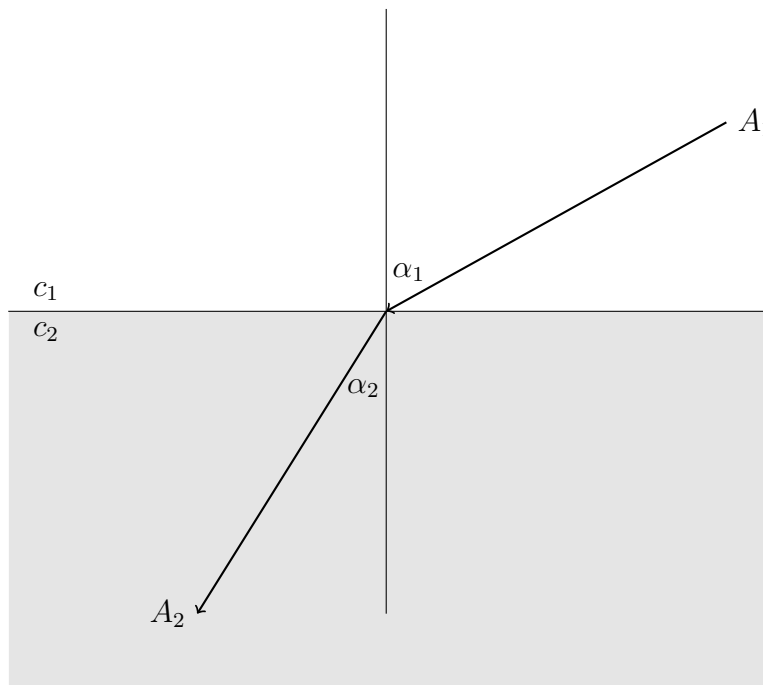
(b) Koristeći (a) dokažite **Youngove nejednakosti**:

Za $a, b > 0$ i $p, q \neq 0, 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ vrijedi:

$$a^{1/p}b^{1/q} \leq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \text{ kada je } p > 1$$

$$a^{1/p}b^{1/q} \geq \frac{a}{p} + \frac{b}{q}, \text{ kada je } p < 1$$

1.138. (Snellov zakon loma svjetlosti) Po tzv. *Fermatovom principu* zraka svjetlosti od jedne do druge točke putuje tako da je vrijeme putovanja najmanje moguće. Ako neki medij ima istu strukturu u svakom svom dijelu, onda je putanja zrake svjetlosti pravac. Pretpostavite da imate dva takva medija, kao na sljedećoj slici:



Ako su brzine svjetlosti u tim medijima c_1 i c_2 , pokažite da vrijedi **Snellov zakon**:

$$\frac{\sin \alpha_1}{\sin \alpha_2} = \frac{c_1}{c_2}.$$

1.139. Posuda oblika valjka je postavljena na ravnu površinu. Na nekoj visini je napravljen otvor iz kojeg istječe mlaz vode. Odredite visinu na koju treba staviti otvor tako da mlaz dostigne najveći domet, ako znate da je prema *Torricelijevom zakonu* brzina kojom voda istječe dana fomulom $\sqrt{2gh}$, gdje je h visina vode iznad otvora. ($g = 9.81m/s^2$)

1.140. * Polinom P stupnja n s realnim koeficijentima zadovoljava $P(x) \geq 0$ za svaki $x \in \mathbb{R}$. Dokažite da tada vrijedi i

$$P(x) + P'(x) + P''(x) + \dots + P^{(n)}(x) \geq 0 \quad \text{za svaki } x \in \mathbb{R}.$$

[*Uputa:* Označimo lijevu stranu s $f(x)$. Primijetite da je $f(x) = P(x) + f'(x)$.]

1.8 Asimptote. Konveksnost i konkavnost. Infleksija

Pravac $y = b$ je **horizontalna asimptota** funkcije f ako je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b.$$

Pravac $y = ax + b$ je **kosa asimptota** funkcije f ako je

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0 \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0.$$

Koristeći teorem o limesu produkta i zbroja, zbog $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{b}{x} = 0$, odatle slijedi

$$0 = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x) - (ax + b)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{f(x)}{x} - a \right)$$

pa zaključujemo da vrijedi:

$$a_{\pm\infty} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \quad \text{i} \quad b_{\pm\infty} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax).$$

Ako je $a = 0$, vidimo da je kosa asimptota zapravo horizontalna asimptota. Pravac $x = a$ je **vertikalna asimptota** funkcije f ako je

$$\lim_{x \rightarrow a^-} |f(x)| = +\infty \quad \text{ili} \quad \lim_{x \rightarrow a^+} |f(x)| = +\infty.$$

Zadatak 1.141. Odredite asimptote funkcija

(a) $f(x) = \frac{1}{e^x - 1}$

(b) $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$

(c) $f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}}$

Rješenje. (a) Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Jedini kandidat za vertikalnu asimptotu je onda $x = 0$. Kako je $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$, i $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$, zaključujemo da je vertikalna asimptota pravac $x = 0$. Računajmo sada kose asimptote. Vrijedi

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x(e^x - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1,$$

pa imamo lijevu kosu asimptotu, koja je zapravo lijeva horizontalna asimptota, $y = -1$.
Za $x \rightarrow +\infty$ vrijedi

$$a = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(e^x - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0,$$

pa imamo desnu kosu asimptotu, koja je zapravo desna horizontalna asimptota, $y = 0$.

(b) Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty,$$

pa zaključujemo da su vertikalne asimptote $x = -1$ i $x = 1$.

Kose asimptote:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x(x^2 - 1)} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \frac{1}{x^2 - 1} = 0,$$

pa zaključujemo da imamo horizontalnu asimptotu $y = 0$.

(c) Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$. Vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty,$$

pa zaključujemo da su vertikalne asimptote $x = -1$ (vertikalna asimptota slijeva) i $x = 1$ (vertikalna asimptota zdesna). Uočimo da je za vertikalnu asimptotu dovoljno da je samo jedan jednostrani limes jednak $+\infty$ ili $-\infty$.

Kose asimptote:

$$a = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{e^{\frac{1}{x^2-1}}}{x} = 0,$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = e^{\frac{1}{x^2-1}} = 1,$$

pa zaključujemo da imamo horizontalnu asimptotu $y = 1$.

△

Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i neka je $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ funkcija. Kažemo da je

- f (**strogo**) **konveksna** ako vrijedi

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \stackrel{(<)}{\leq} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \text{ za sve } x_1, x_2 \in I, \lambda \in \langle 0, 1 \rangle.$$

- f (**strogo**) **konkavna** ako vrijedi

$$f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \stackrel{(>)}{\geq} (1-\lambda)f(x_1) + \lambda f(x_2), \text{ za sve } x_1, x_2 \in I, \lambda \in \langle 0, 1 \rangle.$$

Konveksnost i konkavnost možemo karakterizirati na sljedeći način:

Neka je $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ dva puta derivabilna funkcija na I . Vrijedi

- f je (strogo) konveksna na $I \iff f''(x) \stackrel{(>)}{\geq} 0$, za sve $x \in I$.
- f je (strogo) konkavna na $I \iff f''(x) \stackrel{(<)}{\leq} 0$, za sve $x \in I$.

Točka $a \in I$ je **točka infleksije** funkcije f ako vrijedi nešto od sljedećeg:

- postoji $\delta > 0$ takav da je f strogo konveksna na $\langle a - \delta, a \rangle$ i strogo konkavna na $\langle a, a + \delta \rangle$
- postoji $\delta > 0$ takav da je f strogo konkavna na $\langle a - \delta, a \rangle$ i strogo konveksna na $\langle a, a + \delta \rangle$

Dakle, u slučaju da je f dva puta derivabilna funkcija i ako u a f'' mijenja predznak, onda je u a točka infleksije. Oдавde vidimo da su “kandidati” za točke infleksije nultočke funkcije f'' .

Zadatak 1.142. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije za funkciju

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Rješenje. Kako je $f''(x) = 2e^{-x^2}(2x^2 - 1)$, vidimo da je $f'' > 0$ na $\langle \infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \rangle \cup \langle \frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty \rangle$ i $f'' < 0$ na $\langle -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$. Prema karakterizaciji konveksnosti i konkavnosti zaključujemo da je funkcija f konveksna na intervalima $\langle -\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2} \rangle$ i $[\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$ i konkavna na intervalu $[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}]$. Također, točke infleksije su $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ i $\frac{\sqrt{2}}{2}$. △

Zadatak 1.143. Koliko najviše nultočaka može imati strogo konveksna funkcija?

Rješenje. Očito je da postoji strogo konveksna funkcija s dvije nultočke – na primjer $x \mapsto x^2 - 1$ je jedna takva funkcija.

Dokažimo da ne postoji strogo konveksna funkcija s više od dvije nultočke. Pretpostavimo suprotno, tj. da je $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ neka strogo konveksna funkcija, te neka su x_1, x_2, x_3 neke tri njene nultočke takve da je $x_1 < x_2 < x_3$. Budući da je $x_2 \in \langle x_1, x_3 \rangle$, postoji $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$ takav da je $x_2 = \lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3$. Međutim, koristeći strogu konveksnost i činjenicu da su x_1, x_2 i x_3 nultočke funkcije f imamo

$$0 = f(x_2) = f(\lambda x_1 + (1 - \lambda)x_3) < \lambda f(x_1) + (1 - \lambda)f(x_3) = 0,$$

što daje kontradikciju.

Napomena 1. Uz dodatnu pretpostavku da je f dva puta derivabilna, možemo iskoristiti i sljedeći argument da pokažemo da funkcija ima najviše dvije nultočke.

Ako je funkcija dva puta derivabilna i strogo konveksna konveksna, po teoremu s predavanja slijedi da je $f''(x) > 0$ za sve $x \in I$.

Pretpostavimo da f ima 3 nultočke: $x_1 < x_2 < x_3$. Primjenjujući Rolleov teorem na intervalima $[x_1, x_2]$ i $[x_2, x_3]$ slijedi da postoje $y_1 \in \langle x_1, x_2 \rangle$ i $y_2 \in \langle x_2, x_3 \rangle$ takvi da je $f'(y_1) = f'(y_2) = 0$. Još jednom primjenom Rolleovog teorema, ovaj put na funkciju f' na intervalu $[y_1, y_2]$, slijedi da postoji točka $z \in \langle y_1, y_2 \rangle$ takva da je $f''(z) = 0$. Međutim, to je kontradikcija sa karakterizacijom strogo konveksne funkcije pomoću druge derivacije.

Napomena 2. Modifikacijom dokaza iz prethodne napomene može se pokazati da n -puta derivabilna funkcija na I , takva da je $f^{(n)}(x) > 0$ za sve $x \in I$ ima najviše n nultočaka na I . △

Zadatak 1.144. Neka je $I \subseteq \mathbb{R}$ otvoreni interval i $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Dokažite da za $x_1, \dots, x_n \in I$ vrijedi:

$$f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}.$$

U slučaju da je $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konkavna funkcija, dokažite da vrijedi obratna nejednakost.

Rješenje. Tvrdnju ćemo dokazati matematičkom indukcijom po n .

Baza. Za $n = 1$, vrijedi $f\left(\frac{x_1}{1}\right) \leq \frac{f(x_1)}{1}$.

Pretpostavka. Pretpostavimo da tvrdnja vrijedi za neki $n \in \mathbb{N}$ i proizvoljne $x_1, x_2, \dots, x_n \in I$.

Korak. Uzmimo proizvoljne $x_1, x_2, \dots, x_{n+1} \in I$. Tada vrijedi

$$\begin{aligned} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_{n+1}}{n+1}\right) &= f\left(\frac{n}{n+1} \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + \frac{1}{n+1} x_{n+1}\right) \leq \\ &\leq \frac{n}{n+1} f\left(\frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}\right) + \frac{1}{n+1} f(x_{n+1}) \leq \\ &\leq \frac{n}{n+1} \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_n)}{n} + \frac{1}{n+1} f(x_{n+1}) = \\ &= \frac{f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n+1})}{n+1}, \end{aligned}$$

gdje se u prvoj nejednakosti koristi definicija konveksnosti za $\lambda = \frac{1}{n+1}$, a u drugoj pretpostavka indukcije.

U slučaju kad je f konkavna funkcija, tvrdnja slijedi iz primjenom dokazanog rezultata na konveksnu funkciju $-f$. \triangle

Zadatak 1.145. Dokažite nejednakosti:

- (a) Neka je $p \in \langle -\infty, 0 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$ realan broj i neka su $x_1, \dots, x_n > 0$ realni brojevi. Dokažite da vrijedi

$$\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^p \leq \frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}.$$

Za $p \in \langle 0, 1 \rangle$, dokažite da vrijedi obratna nejednakost.

- (b) $\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}$, gdje su α, β i γ kutevi trokuta

- (c) Neka su $x_1, \dots, x_n > 0$ realni brojevi. Dokažite da vrijedi nejednakost

$$\sqrt[n]{x_1 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$$

Rješenje. (a) Definirajmo funkciju $f: \langle 0, +\infty \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ formulom $f(x) = x^p$. Kako je $f''(x) = p(p-1)x^{p-2} > 0$ za $x > 0$, zaključujemo da je f konveksna funkcija, pa prema prethodnom zadatku za $x_1, \dots, x_n > 0$ vrijedi $f\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right) \leq \frac{f(x_1) + \dots + f(x_n)}{n}$, tj. vrijedi $\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right)^p \leq \frac{x_1^p + \dots + x_n^p}{n}$.

- (b) Definirajmo funkciju $f: \langle 0, \pi \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ formulom $f(x) = -\sin x$. Kako je $f''(x) = \sin x > 0$ za $x \in \langle 0, \pi \rangle$, zaključujemo da je f konveksna funkcija, pa prema prethodnom zadatku za kuteve trokuta $\alpha, \beta, \gamma \in \langle 0, \pi \rangle$ vrijedi $f\left(\frac{\alpha + \beta + \gamma}{3}\right) \leq \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma)}{3}$, tj. $-\sin \frac{\pi}{3} \leq \frac{-\sin \alpha - \sin \beta - \sin \gamma}{3}$, iz čega slijedi tražena nejednakost.

- (c) Budući da je \ln strogo rastuća funkcija, djelovanjem na obje strane, nejednakost je ekvivalentna s

$$\frac{\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)}{n} \leq \ln\left(\frac{x_1 + \dots + x_n}{n}\right).$$

Budući da je

$$(\ln(x))'' = -\frac{1}{x^2} < 0,$$

zaključujemo da je \ln konkavna funkcija pa tvrdnja slijedi iz Jensenove nejednakosti za konkavne funkcije.

△

Zadatak 1.146. Ako je $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ periodična funkcija koja ima kosu asimptotu, dokažite da je konstantna.

Rješenje. Neka je f periodična funkcija s periodom $T > 0$. Prema definiciji periodičnosti, za svaki $x \in \mathbb{R}$ vrijedi:

$$f(x + T) = f(x)$$

Također, induktivno vrijedi da je $f(x + nT) = f(x)$ za svaki prirodan broj $n \in \mathbb{N}$.

Pretpostavimo da f ima kosu asimptotu zadanu pravcem $y = ax + b$ kada $x \rightarrow +\infty$. (Analogno bi vrijedio i dokaz za $-\infty$). Prema definiciji kose asimptote, vrijedi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

Neka je $x \in \mathbb{R}$ fiksiran, ali proizvoljan. Promotrimo niz točaka definiran s $x_n = x + nT$ za $n \in \mathbb{N}$. Kada $n \rightarrow \infty$, tada očito i $x_n \rightarrow +\infty$. Budući da granična vrijednost iz definicije asimptote vrijedi za svaki niz koji teži u $+\infty$, mora vrijediti i za naš niz (x_n) :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x_n) - ax_n - b) = 0$$

Uvrstimo sada $x_n = x + nT$ u taj limes. Koristeći svojstvo periodičnosti $f(x + nT) = f(x)$, dobivamo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - a(x + nT) - b) = 0$$

Zapišimo izraz unutar limesa na način da odvojimo dio koji ovisi o n od dijela koji ne ovisi o n :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\underbrace{(f(x) - ax - b)}_{\text{konstantno obzirom na } n} - \underbrace{anT}_{\rightarrow \pm\infty \text{ ako } a \neq 0} \right) = 0$$

Budući da je izraz $f(x) - ax - b$ konstantan broj za unaprijed fiksirani x , da bi gornji limes uopće bio konačan i jednak nuli, član uz n ne smije težiti u beskonačnost. To je moguće jedino ako vrijedi:

$$aT = 0$$

Kako je period $T > 0$, nužno slijedi da je $a = 0$. (Ovim smo dokazali da asimptota ne može biti kosa u strogom smislu, već isključivo horizontalna).

Sada uvrstimo $a = 0$ natrag u naš limes:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - 0 \cdot x - b - 0 \cdot nT) = 0$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (f(x) - b) = 0$$

S obzirom na to da izraz $f(x) - b$ uopće ne ovisi o n , on sam mora biti jednak limesu, odnosno nuli:

$$f(x) - b = 0 \implies f(x) = b$$

Budući da smo na početku odabrali proizvoljan $x \in \mathbb{R}$, zaključujemo da jednakost $f(x) = b$ vrijedi za svaki realni broj x . Time smo dokazali da je funkcija f konstantna.

△

Zadaci za vježbu

1.147. Neka je $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija. Pokažite da je $-f$ konkavna funkcija.

1.148. Odredite intervale konveksnosti i konkavnosti i točke infleksije za funkcije

$$(a) f(x) = \frac{x^4}{x^3 - 1}$$

$$(b) f(x) = e^{-2x^2+x+1}$$

1.149. Dokažite da na grafu funkcije $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$ postoje tri točke infleksije i da sve leže na jednom pravcu. Odredite jednadžbu tog pravca.

1.150. Dokažite nejednakosti:

$$(a) \operatorname{tg} 1^\circ + \operatorname{tg} 2^\circ + \dots + \operatorname{tg} 44^\circ \geq 44 \cdot (\sqrt{2} - 1)$$

$$(b) \operatorname{tg} 1^\circ \cdot \operatorname{tg} 2^\circ \cdot \dots \cdot \operatorname{tg} 44^\circ \leq (\sqrt{2} - 1)^{44}$$

1.151. * Ako je konveksna funkcija $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ omeđena, onda je f konstanta. Dokažite!

1.152. * Dokažite da ako za konveksnu funkciju $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ vrijedi

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0,$$

onda je ona konstanta.

1.153. * Neka je $f: \langle a, b \rangle \rightarrow \mathbb{R}$ konveksna funkcija.

(a) Pokažite da za svaki $x \in \langle a, b \rangle$ postoje lijeva i desna derivacija:

$$f'_-(x) = \lim_{y \rightarrow x^-} \frac{f(y) - f(x)}{y - x} \text{ i } f'_+(x) = \lim_{y \rightarrow x^+} \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

i da vrijedi $f'_-(x) \leq f'_+(x)$.

(b) Koristeći (a) pokažite da je f neprekidna funkcija.

1.9 Ispitivanje toka funkcije

Kod ispitivanja toka funkcije koristimo sljedeći postupak:

1. Naći prirodno područje definicije.
2. Ispitati simetrije funkcije: parnost/neparnost, periodičnost.
3. Ispitati neprekidnost funkcije i naći točke prekida, ako postoje.
4. Naći nultočke funkcije i područja stalnog predznaka.
5. Naći intervale monotonosti i točke lokalnih ekstrema.
6. Naći intervale konveksnosti i konkavnosti te točke infleksije.
7. Naći asimptote.
8. Skicirati graf funkcije.

Zadatak 1.154. Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+1}}.$$

Rješenje. Domena funkcije f je cijeli skup \mathbb{R} . Funkcija f je neprekidna na cijelom \mathbb{R} . Ima točno jednu nultočku, u točki $x = 2$. Nazivnik funkcije f je funkcija koja poprima samo pozitivne vrijednosti. Brojnik je negativan za $x < 2$ te pozitivan za $x > 2$. Isto vrijedi za funkciju f (radi konstante pozitivnosti nazivnika). Računamo

$$f'(x) = \frac{2x+1}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{te} \quad f''(x) = \frac{-4x^2-3x+2}{(x^2+1)^{\frac{5}{2}}}.$$

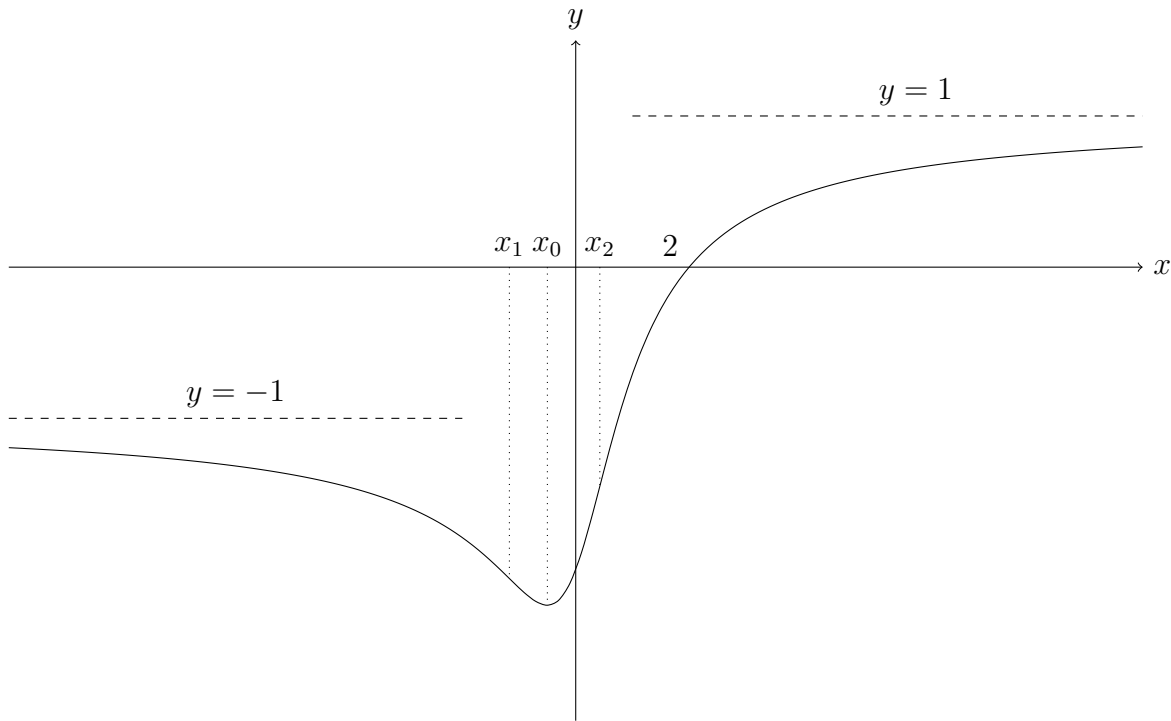
Vidimo da je $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $x = x_0 = -\frac{1}{2}$ te da je $f''(x) = 0$ ako i samo ako je $x \in \left\{ x_1 = \frac{-3-\sqrt{41}}{8}, x_2 = \frac{-3+\sqrt{41}}{8} \right\}$.

	$-\infty$	\rightarrow	x_1	\rightarrow	x_0	\rightarrow	x_2	\rightarrow	2	\rightarrow	$+\infty$
f'		-		-		+		+		+	
f''		-		+		+		-		-	
f		$-\searrow \cap$		$-\searrow \cup$		$-\nearrow \cup$		$-\nearrow \cap$		$+\nearrow \cap$	

Ovdje zaključujemo sljedeće: U točki $x_0 = -\frac{1}{2}$ funkcija ima lokalni minimum koji iznosi $-\sqrt{5}$. Nadalje, točke x_1 i x_2 su točke infleksije, u točki x_1 funkcija f iz konkavne prelazi u konveksnu, a u točki x_2 funkcija f iz konveksne prelazi u konkavnu.

Funkcija f ima dvije horizontalne asimptote (jednu lijevu i jednu desnu):

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -1 \quad \text{te} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1.$$



△

Zadatak 1.155. Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = x^2 e^{\frac{1}{x}}.$$

Rješenje. Domena funkcije f je $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i f je neprekidna na cijeloj svojoj domeni. U točki $x = 0$ ima prekid, primijetimo da je

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 e^{\frac{1}{x}} = 0 \cdot e^{-\infty} = 0.$$

S druge strane, koristeći supstituciju i L'Hopitalovo pravilo imamo

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \left| \begin{array}{l} y = \frac{1}{x} \\ y \rightarrow +\infty \end{array} \right| = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{y^2} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2y} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{e^y}{2} = +\infty.$$

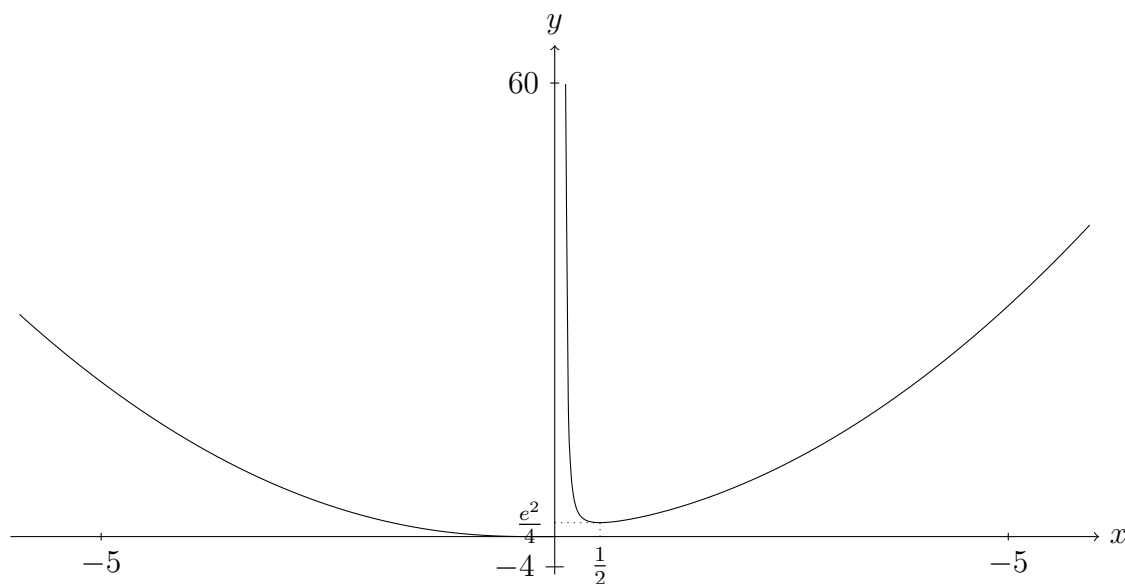
Dakle, pravac $x = 0$ je vertikalna asimptota zdesna funkcije f . Primijetimo da je

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} x^2 e^{\frac{1}{x}} = +\infty \cdot e^0 = \infty.$$

Dakle, funkcija f nema kosih asimptota. Funkcija f nema nultočki, vrijedi da je $f(x) > 0$, za svaki realni broj $x \neq 0$. Nadalje računamo prvu i drugu derivaciju:

$$f'(x) = e^{\frac{1}{x}}(2x - 1), \quad f''(x) = e^{\frac{1}{x}} \frac{2x^2 - 2x + 1}{x^2}.$$

Vidimo da je $f'(x) = 0$ ako i samo ako je $x = \frac{1}{2}$, također vrijedi i da je $f''(x) > 0$ za svaki realni broj $x \neq 0$, što znači da je funkcija f konveksna na $\langle -\infty, 0 \rangle$ te također konveksna i na $\langle 0, +\infty \rangle$. Dakle, funkcija f nema točaka infleksije. Funkcija f u točki $x = \frac{1}{2}$ ima lokalni minimum koji iznosi $\frac{e^2}{4}$. Već smo prije zaključili da je cijelo vrijeme pozitivna, a znamo i da na intervalima $\langle -\infty, 0 \rangle$ i $\langle 0, \frac{1}{2} \rangle$ pada, dok na intervalu $\left[\frac{1}{2}, +\infty \right)$ raste. Primijetimo još da je vrijednost funkcije f u točki $x = \frac{1}{2}$ jednaka $\frac{e^2}{4}$, što je približno 1.847. Spremni smo nacrtati graf funkcije f .



△

Zadatak 1.156. Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \ln(\cos x).$$

Rješenje. Odredimo najprije domenu funkcije f . Vidimo da su u domeni svi realni brojevi x za koje je $\cos x > 0$ (i samo oni). Dakle, domena funkcije f je skup

$$\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle.$$

Funkcija je periodična s periodom 2π . Dakle, dovoljno je ispitati ponašanje funkcije f na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Preciznije, nadalje ćemo se ponašati kao da je domena funkcije f upravo taj interval, a na kraju onda znamo da funkcija izgleda isto na svakom od intervala $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, za $k \in \mathbb{Z}$. Korisno je imati na umu da je funkcija f također i parna.

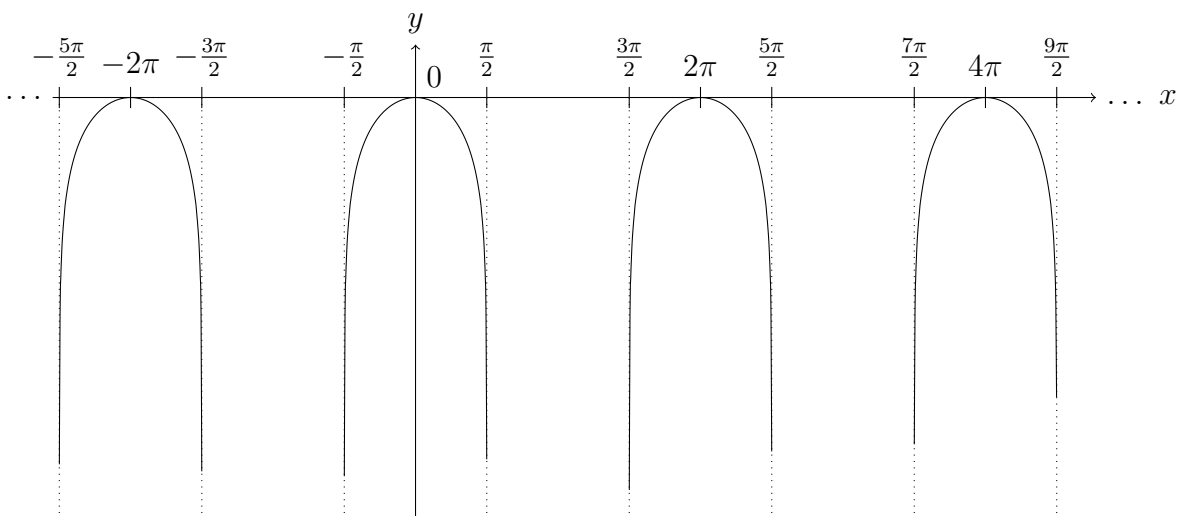
Funkcija f je neprekidna na svojoj domeni i ima nultočku u točki $x = 0$. Za sve $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right\rangle \setminus \{0\}$ vrijedi da je $f(x) < 0$. Nadalje, primijetimo da je

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x) = -\infty.$$

Dakle, pravci $x = -\frac{\pi}{2}$ i $x = \frac{\pi}{2}$ su vertikalne asimptote funkcije f ($x = -\frac{\pi}{2}$ je vertikalna asimptota zdesna, a $x = \frac{\pi}{2}$ je vertikalna asimptota slijeva). Računamo

$$f'(x) = -\operatorname{tg} x \quad \text{i} \quad f''(x) = -\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Vidimo da je $f''(x) < 0$, za svaki x iz domene, što znači da je funkcija cijelo vrijeme konkavna. Preciznije, funkcija je konkavna na svakom intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right\rangle$, za svaki cijeli broj k . Nadalje, vrijedi da je $f'(x) > 0$, za $x \in \left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle$ te $f'(x) < 0$, za $x \in \left\langle 0, \frac{\pi}{2} \right\rangle$. Dakle, funkcija raste na intervalu $\left\langle -\frac{\pi}{2}, 0 \right\rangle$ i pada na intervalu $\left[0, \frac{\pi}{2} \right)$. Odnosno, u točki $2k\pi$ (za $k \in \mathbb{Z}$) funkcija ima lokalni maksimum koji iznosi 0.





Zadatak 1.157. Ispitajte tok funkcije

$$f(x) = \arcsin \frac{1-x^2}{1+x^2}.$$

Rješenje. Primijetimo da je $f(x) = \arcsin g(x)$, gdje je $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ zadana s

$$g(x) := \frac{2}{1+x^2} - 1.$$

Budući da je slika funkcije g skup $\langle 0, 1 \rangle$, što je podskup domene funkcije \arcsin , domena funkcije f je cijeli \mathbb{R} . Primijetimo da je slika funkcije f skup $\langle -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \rangle$.

Nadalje uočimo da je funkcija f parna. Neprekidna je na cijeloj svojoj domeni i ima dvije nultočke, u točkama $x = \pm 1$. Funkcija f ima jednu horizontalnu asimptotu, pravac $y = -\frac{\pi}{2}$.

Funkcija \arcsin derivabilna je na skupu $\langle -1, 1 \rangle$ pa je f , po teoremu o derivaciji kompozicije derivabilna na skupu

$$\{x \in \mathbb{R} : g(x) \in \langle -1, 1 \rangle\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

i njena derivacija u točki $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ iznosi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)^2}} \cdot \frac{-2x(1+x^2) - (1-x^2) \cdot 2x}{(1+x^2)^2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\frac{4x^2}{(1+x^2)^2}}} \cdot \frac{-4x}{(1+x^2)^2} = \frac{-2\frac{x}{|x|}}{1+x^2} = \frac{-2 \operatorname{sgn}(x)}{1+x^2}. \end{aligned}$$

Derivabilnost u $x = 0$ potrebno je provjeriti po definiciji. Iz nastavka rješenja bit će jasno da je dobro promatrati odvojeno lijevu i desnu derivaciju. Računamo:

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\arcsin\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right) - \frac{\pi}{2}}{t} =: (*).$$

Budući da smo dobili neodređen izraz oblika $\left[\frac{0}{0}\right]$, provjerimo uvjete za L'Hopitalovo pravilo. U prethodnom dijelu pokazali smo da je funkcija f derivabilna na $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ i nazivnik je očito derivabilna funkcija čija je derivacija različita od 0 pa možemo primijeniti L'Hopitalovo pravilo. Prema tome,

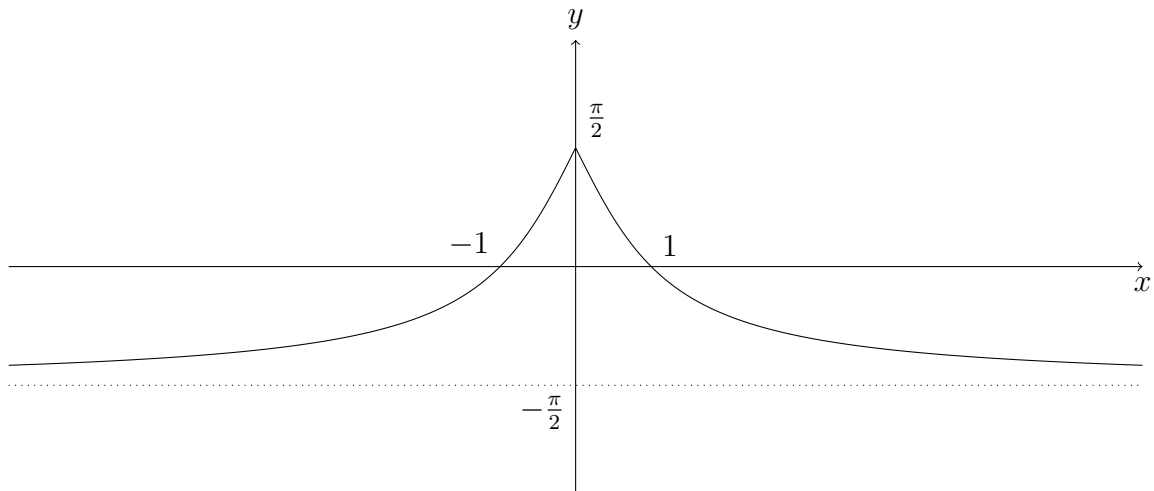
$$(*) \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f'(t)}{1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-2 \cdot \operatorname{sgn}(t)}{1+t^2} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-2}{1+t^2} = -2.$$

Analognim zaključivanjem slijedi:

$$\lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f(t) - f(0)}{t - 0} \stackrel{\text{L'H}}{=} \lim_{t \rightarrow 0^-} \frac{f'(t)}{1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2}{1+t^2} = 2.$$

Budući da se lijevi i desni limes razlikuju, slijedi da f nije derivabilna u 0.

Nadalje, iz činjenice da je $f''(x) > 0$ za sve $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, slijedi da je f konveksna na $\langle -\infty, 0]$ i na $[0, +\infty)$. (Oprezno! Budući da domena funkcije, $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ nije povezan skup, iz ovoga ne slijedi da je f konveksna na cijeloj svojoj domeni nego na svakom od ovih intervala zasebno.) Na intervalu $\langle -\infty, 0]$ raste, a na intervalu $[0, +\infty)$ pada. Što se predznaka tiče, funkcija f je pozitivna na $\langle -1, 1 \rangle$ te negativna na $\langle -\infty, -1 \rangle \cup \langle 1, +\infty \rangle$. Dodatno, funkcija f u točki $x = 0$ ima globalni maksimum koji iznosi $\frac{\pi}{2}$.



△

Zadaci za vježbu

1.158. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{2x^3}{x^2 - 4}.$$

1.159. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = (x^2 + 2)e^{-x^2}.$$

1.160. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{1 - \ln x}{1 + \ln x}.$$

1.161. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \sqrt{8+x} - \sqrt{8-x}.$$

1.162. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = \frac{x^2}{2} + \ln x.$$

1.163. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}.$$

1.164. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = 2^{\sqrt{x^2+1} - \sqrt{x^2-1}}.$$

1.165. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x + \sin x.$$

1.166. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x \sin x.$$

1.167. Ispitajte tok i skicirajte graf funkcije:

$$f(x) = x - \ln \left(\frac{x-3}{x-2} \right)^2.$$