3 Red

3.1 Osnovna svojstva

Definicija. Red je uređeni par $((a_n),(S_n))$ niza (a_n) i niza (S_n) **parcijalnih suma** definiranih sa

$$S_n := \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

Red označavamo sa $\sum a_n$. Kažemo da red $\sum a_n$ **konvergira** ako konvergira niz pripadnih parcijalnih suma (S_n), čiji limes zovemo **suma reda** i pišemo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := \lim_n S_n.$$

Ako niz parcijalnih suma reda nije konvergentan, onda kažemo da red **divergira**.

Primjer. (a) Neka je $q \in \mathbb{R}^d$. Red $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ zovemo **geometrijski red** i on konvergira za $q \in \langle -1, 1\rangle$. Zaista,

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{1}{1-q} - \frac{q^{n+1}}{1-q} \to \frac{1}{1-q}, \quad \text{kada } n \to +\infty.$$

Dakle,

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}.$$

(b) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ zovemo **harmonijski red** i on divergira, točnije $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$. Clanoce niza parcijalnih suma harmonijskog reda se ponekad označavaju s (H_n) i zovu se **harmonijski brojevi**. Može se pokazati da je

$$\lim_n (H_n - \ln n) = \lim_n (\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n) = \gamma \approx 0.57721.$$

γ se zove Euler-Mascheronijeva konstanta.

Teorem 12. ***(Nužni uvjet konvergencije reda)*** *Ako red* $\sum a_n$ *konvergira, onda je* $\lim_n a_n = 0$. $\square$

Napomena. (a) Obrat u prethodnom teoremu ne vrijedi. Npr. harmonijski red $\sum_{n=1}^{\infty} q^n \frac{1}{n}$ divergira, ali je $\lim_n \frac{1}{n} = 0$.

(b) Ako niz (a_n) nije konvergentan ili ako je $\lim_n a_n \neq 0$, onda iz gornjeg teorema slijedi da red $\sum a_n$ divergira.

Primjer. Geometrijski red $\sum_{n=0}^{\infty}$ divergira za $|q| \geq 1$;

- za $q \leq -1$ niz (q^n) nije konvergentan,
- za $q = 1$ je $\lim_n q^n = 1$,
- za $q > 1$ je $\lim_n q^n = +\infty$,

jer ni u jednom od ovih sličajeva nije zadovoljen nužni uvjet konvergencije reda.

Zadatak 3.1.1. Ispitajte konvergenciju redova i odredite im sumu ako konvergiraju:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n$ (d) $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2}{3^n}$, gdje je $m \in \mathbb{N}$

Rješenje. (a) Rastavom na parcijalne razlomke je

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{3}{n+1}$$

pa je

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Stoga je

$$\lim_n S_n = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1$$

pa je red konvergentan i $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$

(b) Rastavom na parcijalne razlomke je

$$\frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)} = \frac{2}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n-2}$$

pa je za $n \geq 3$

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=3}^{n} \left(\frac{2}{k} + \frac{1}{k-1} - \frac{3}{k-2}\right) = 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-1} - 3\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k-2} \\ &= 2\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k} - 3\sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k} \\ &= 2\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{1}{2} + \sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} + \frac{1}{n-1} - 3 - \frac{3}{2} - 3\sum_{k=3}^{n-2} \frac{1}{k} \\ &= \frac{2}{n-1} + \frac{2}{n} + \frac{1}{2} + \frac{1}{n-1} - 3 - \frac{3}{2} \to -4, \quad \text{kada } n \to +\infty. \end{aligned}$$

Dakle, red je konvergentan i $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{4-5n}{n(n-1)(n-2)} = -4.$

(c) $\lim_n (-1)^n$ ne postoji (niz ima 2 gomilišta: -1 i 1) pa nije zadovoljen nužni uvjet konvergencije $\implies$ red je divergentan

(d) $\displaystyle\sum_{n=m}^{\infty} \frac{2}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{3^{m+n}} = \frac{2}{3^m} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n} = \frac{2}{3^m} \frac{1}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{3^{m-1}}.$

$\triangle$

Zadaci za vježbu

3.1.2. Ispitajte konvergenciju redova i odredite im sumu ako konvergiraju:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n}{n^2-1}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin n\alpha, \quad \text{gdje je } \alpha \in \langle 0, \pi \rangle$

3.1.3. Ispitajte konvergenciju redova i odredite im sumu ako konvergiraju:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt[n]{a} - \sqrt[n+1]{a}), \quad \text{gdje je } a > 0$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{2n^2}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n})$

3.2 Kriteriji konvergencije reda

3.2.1 Leibnizov kriterij

Teorem 13. ***(Leibnizov kriterij)*** *Neka je (a_n) niz pozitivnih realnih brojeva takvih da:*

- *postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n \geq a_{n+1}$, za sve $n \geq m$,*
- $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Tada red $\sum (-1)^n a_n$ konvergira. □

Zadatak 3.2.1. Ispitajte konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \operatorname{tg} \frac{1}{\sqrt{n}} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n - \ln n}$$

Rješenje. (a) $a_n = \operatorname{tg} \dfrac{1}{\sqrt{n}}$

Funkcija $n \mapsto \frac{1}{\sqrt{n}}$ je padajuća i slika od $\mathbb{N}$ je podskup od $\langle 0, 1]$ pa kako je $x \mapsto \operatorname{tg} x$ rastuća i nenegativna na $\langle 0, 1]$, zaključujemo da je niz (a_n) padajuć niz pozitivnih brojeva. Nadalje, zbog neprekidnosti tangensa u 0 slijedi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Dakle, red konvergira po Leibnizovom kriteriju.

(b) Označimo $a_n = \frac{1}{n - \ln n}$ i definirajmo $f(x) = \frac{1}{x - \ln x}$. Vrijedi

$$f'(x) = -\frac{1 - \frac{1}{x}}{(x - \ln x)^2} = -\frac{x - 1}{x(x - \ln x)^2} < 0, \quad \text{za } x > 1.$$

Dakle, f je strogo padajuća na $[1, +\infty\rangle$ pa je $a_n = f(n) > f(n+1) = a_{n+1}$, za sve $n \geq 1$. Nadalje,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n - \ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\ln \frac{e^n}{n}} = 0.$$

Leibnizov kriterij implicira da red konvergira.

△

Definicija. Kažemo da red $\sum a_n$ **apsolutno konvergira** ako konvergira red $\sum |a_n|$.

Teorem 14. *Apsolutno konvergentan red je ujedno i konvergentan.* □

Definicija. Ako red $\sum a_n$ konvergira, ali red $\sum |a_n|$ divergira, onda kažemo da red $\sum a_n$ **uvjetno konvergira**.

Zadatak 3.2.2. Ispitajte apsolutnu i uvjetnu konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5}$$

Rješenje. (a) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ konvergira po Leibnizovom kriteriju, dok je red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ harmonijski pa divergira. Dakle, zadani red je uvjetno konvergentan.

(b) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^n} = \frac{1}{e} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{e}\right)^n = \frac{1}{e} \frac{1}{1-\frac{1}{e}}$ konvergira, a kako ima isključivo pozitivne članove, on konvergira apsolutno.

(c) Niz zadan općim članom $\frac{(-1)^{n-1} n}{6n-5}$ ima dva gomilišta $\frac{1}{6}$ i $-\frac{1}{6}$ pa kako ne konvergira k 0, nije zadovoljen nužan uvjet konvergencije. Dakle, red ne konvergira.

$\triangle$

3.2.2 D'Alembertov kriterij

Teorem 15. ***(D'Alembertov kriterij)*** *Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva.*

(i) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q, \ \forall n \geq m,$$

tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

(ii) Ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1, \ \forall n \geq m,$$

tada red $\sum a_n$ divergira. $\square$

Korolar. *Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva takav da postoji*

$$L = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|.$$

Tada:

- $L < 1 \implies$ *red $\sum a_n$ apsolutno konvergira*

- $L > 1$ *(ili* $L = +\infty$*)* $\Longrightarrow$ *red* $\sum a_n$ *divergira*
- $L = 1$ $\Longrightarrow$ *nema odluke* $\square$

Primjer. (a) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira, ali

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)}}{\frac{1}{n(n+1)}} = 1.$$

(b) Red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergira, ali

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Zadatak 3.2.3. Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n+1}$ (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot \ldots \cdot (3n-1)}{1\cdot 5\cdot 9\cdot \ldots \cdot (4n-3)}$

Rješenje. (a)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!}}{\frac{(n!)^2}{(2n)!}} = \frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} \to \frac{1}{4} < 1.$$

D'Alembertov kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira.

(b)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{(n+1)!}{2^{n+1}+1}}{\frac{n!}{2^n+1}} = (n+1)\frac{2^n+1}{2^{n+1}+1} = (n+1)\frac{1+\frac{1}{2^n}}{2+\frac{1}{2^n}} \to +\infty > 1.$$

D'Alembertov kriterij $\Longrightarrow$ red divergira.

(c)

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)\cdot(4n+1)}}{\frac{2\cdot 5\cdot\ldots\cdot(3n-1)}{1\cdot 5\cdot\ldots\cdot(4n-3)}} = \frac{3n+2}{4n+1} \to \frac{3}{4} < 1.$$

D'Alembertov kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira.

$\triangle$

3.2.3 Cauchyjev kriterij

Teorem 16. *(**Cauchyjev kriterij**) Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva.*

(i) Ako postoje $m \in \mathbb{N}$ i $q \in \langle 0, 1\rangle$ takvi da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leq q, \ \forall n \geq m,$$

tada red $\sum a_n$ apsolutno konvergira.

(ii) Ako postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1, \ \forall n \geq m,$$

tada red $\sum a_n$ divergira. □

Korolar. *Neka je (a_n) niz kompleksnih brojeva takav da postoji*

$$L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Tada:

- $L < 1 \implies$ *red $\sum a_n$ apsolutno konvergira*
- $L > 1$ *(ili $L = +\infty$)* $\implies$ *red $\sum a_n$ divergira*
- $L = 1 \implies$ *nema odluke* □

Napomena. Koristeći Cesaro–Stolzov teorem slijedi da postojanje limesa u D'Alembertovom kriteriju implicira postojanje limesa u Cauchyjevom i jednaki su. Dakle, ako D'Alembertov kriterij daje odluku, onda odluku daje i Cauchyjev kriterij. Drugim riječima, Cauchyjev kriterij je jači.

Zadatak 3.2.4. Ispitajte konvergenciju redova:

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)} \qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{-n^2} \qquad \text{(c)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{\sqrt{2}^n}$$

Rješenje. (a)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left[\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n+1)}\right]^{\frac{1}{n}} = \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n+1} = \left[\left(1 - \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n+1}{-2}}\right]^{-2} \to e^{-2} < 1.$$

Cauchyjev kriterij $\implies$ red konvergira.

(b)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left[\frac{1}{2^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n^2} \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{-n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n} \to \frac{e}{2} > 1.$$

Cauchyjev kriterij $\Longrightarrow$ red divergira.

(c)

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2n-1}}{\sqrt{2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{\frac{\ln(2n-1)}{n}}}{\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln(2x-1)}{x}} \overset{\text{L'H}}{=} \frac{1}{\sqrt{2}} \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{2}{2x-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1. \end{aligned}$$

Cauchyjev kriterij $\Longrightarrow$ red konvergira.

$\triangle$

Zadatak 3.2.5. Ispitajte konvergenciju reda $\sum a_n$, ako je

$$a_n = \begin{cases} 2^{1-k}, & n = 2k-1 \\ -3^{1-2k}, & n = 2k. \end{cases}$$

Rješenje. Primijetimo da se ne može primijeniti Leibnizov kriterij jer pripadni niz apsolutnih vrijednosti nije strogo padajući.
Niz $(\sqrt[n]{|a_n|})$ ima 2 konvergentna podniza:

- $\sqrt[2k-1]{|a_{2k-1}|} = 2^{\frac{1-k}{2k-1}} \to 2^{-\frac{1}{2}}$,
- $\sqrt[2k]{|a_{2k}|} = 3^{\frac{1-2k}{2k}} \to 3^{-1}$,

Odatle slijedi da je

$$\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \max\left\{2^{-\frac{1}{2}}, 3^{-1}\right\} = 2^{-\frac{1}{2}}$$

Prema tome, budući da je $2^{-\frac{1}{2}} < 0.9$ postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da za sve $n \geq n_0$ vrijedi $\sqrt[n]{|a_n|} \leq 0.9$. Dakle, po Cauchyjevom kriteriju red apsolutno konvergira. $\triangle$

3.2.4 Integralni kriterij

Teorem 17 (Integralni Cauchyjev kriterij)**.** *Neka je $f : [1,\infty\rangle \to [0,\infty\rangle$ neprekidna i padajuća funkcija. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ konvergira ako i samo ako integral $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergira.*

Zadatak 3.2.6. Ispitajte konvergenciju redova

$$\text{(a)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \qquad\qquad \text{(b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

Rješenje. (a) Promatramo funkciju $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$. Funkcija je neprekidna, pozitivna i padajuća na intervalu $[2, \infty\rangle$ kao produkt dvije padajuće i pozitivne funkcije. Primjenjujemo Cauchyjev integralni kriterij:

$$\begin{aligned} \int_2^{\infty} \frac{1}{x \ln x}\, dx &= \lim_{M\to\infty} \int_2^{M} \frac{1}{x \ln x}\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x \\ du = \frac{1}{x} dx \end{bmatrix} \\ &= \lim_{M\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln M} \frac{1}{u}\, du = \lim_{M\to\infty} \Big(\ln(\ln M) - \ln(\ln 2) \Big) = \infty. \end{aligned}$$

Kako nepravi integral divergira, po Cauchyjevom integralnom kriteriju divergira i zadani red.

(b) Promatramo funkciju $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Funkcija je neprekidna i pozitivna za $x > 1$. Provjerimo je li padajuća traženjem njezine prve derivacije:

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - \ln x \cdot 2x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\ln x)}{x^4} = \frac{1 - 2\ln x}{x^3}.$$

Za $x \geq 2$ vrijedi $1 - 2\ln x < 0$, pa je $f'(x) < 0$, što znači da funkcija monotono pada na $[2, \infty\rangle$. Računamo nepravi integral koristeći parcijalnu integraciju:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx &= \lim_{M\to\infty} \int_1^{M} \ln x \cdot x^{-2}\, dx = \begin{bmatrix} u = \ln x & dv = x^{-2} dx \\ du = \frac{1}{x} dx & v = -x^{-1} \end{bmatrix} \\ &= \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{\ln x}{x}\Big|_1^M + \int_1^M x^{-2}\, dx \right) \\ &= \lim_{M\to\infty} \left(-\frac{\ln M}{M} - \frac{1}{M} + 1 \right) = 1. \end{aligned}$$

Kako nepravi integral konvergira, po Cauchyjevom integralnom kriteriju konvergira i zadani red.

△

Zadatak 3.2.7. U ovisnosti o $p > 0$ ispitajte konvergenciju Dirichletovog reda $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Rješenje. Neka je $f(x) = \frac{1}{x^p}$. Za zadani parametar $p > 0$ funkcija f je neprekidna, pozitivna i strogo padajuća na intervalu $[1, \infty\rangle$. Prema Cauchyjevom integralnom kriteriju, zadani red konvergira ako i samo ako konvergira nepravi integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^p}\, dx$. Međutim, već smo ranije pokazali da navedeni integral konvergira ako i samo ako je $p > 1$ pa isto vrijedi i za Dirichletov red. △

3.2.5 Usporedni kriterij

Teorem 18. *Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka postoje $m \in \mathbb{N}$ i $K > 0$ takvi da je*

$$a_n \leq K \cdot b_n, \quad \forall n \geq m.$$

1. *Ako $\sum_n b_n$ konvergira, onda konvergira i $\sum_n a_n$ i vrijedi*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

2. *Ako $\sum_n a_n$ divergira, onda divergira i $\sum_n b_n$.*

Korolar.

Korolar. Neka su $\sum a_n$ i $\sum b_n$ redovi s pozitivnim članovima i neka postoji

$$L = \lim_n \frac{a_n}{b_n} \in [0, +\infty].$$

(a) Ako je $L \in [0, +\infty\rangle$ i ako red $\sum b_n$ konvergira, onda konvergira i red $\sum a_n$.

(b) Ako je $L \in \langle 0, +\infty]$ i ako red $\sum b_n$ divergira, onda divergira i red $\sum a_n$.

Zadatak 3.2.8. Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{2n-1}$

(b) $\displaystyle\sum_n \frac{\ln n}{n^3+n+1}$

(c) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n \cdot 2^n}$

(d) $\displaystyle\sum_n (\ln(n+1) - \ln n)$

(e) $\displaystyle\sum_n \sin(\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3})$

(f) $\displaystyle\sum_n \operatorname{arctg} 2^{-n}$

(g) $\displaystyle\sum_n \frac{\sqrt{2n} + \sqrt{n^2+1}}{n^2}$

Rješenje. (a) Uočavamo da se opći član ponaša kao $\frac{1}{2n}$ za n velik. Odaberimo $b_n = \frac{1}{n}$. Računamo limes:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}.$$

Budući da je $L = \frac{1}{2} \in \langle 0, +\infty]$ i red $\sum b_n$ divergira, zadani red divergira po usporednom kriteriju.

(b) Znamo da logaritamska funkcija raste sporije od bilo koje potencije od n pa izaberimo $b_n = \frac{1}{n^2}$ za usporedbu. Računamo pripadni limes:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^3+n+1}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 \ln n}{n^3+n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\ln n}{n}}{1+\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \frac{0}{1} = 0.$$

Kako je $L = 0 \in [0, +\infty\rangle$ i red $\sum b_n$ konvergira budući da je to Dirichletov red za $p > 2$, zadanired konvergira po usporednom kriteriju.

(c) Očito je $\frac{1}{n2^n} \leq \frac{1}{2^n}$ pa kako red $\sum_n \frac{1}{2^n}$ konvergira, po usporednom kriteriju konvergira i zadani red.

(d) Koristeći svojstva logaritma, opći član možemo zapisati u obliku $a_n = \ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$. Iskoristimo poznati limes $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$ te usporedimo naš red s harmonijskim redom $b_n = \frac{1}{n}$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Budući da je $L = 1 \in \langle 0, +\infty]$ i red $\sum b_n$ divergira, zadani red divergira.

(e) Najprije racionaliziramo argument unutar funkcije sinus:

$$\sqrt{n^3+1} - \sqrt{n^3} = \frac{(n^3+1)-n^3}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}.$$

Za velike n ovaj izraz teži k nuli i asimptotski se ponaša kao $\frac{1}{2n^{3/2}}$. Nadalje, budući da je $\sin x \approx x$ za $x \approx 0$, biramo za usporedbu konvergentni red s članom $b_n = \frac{1}{n^{3/2}}$ (Dirichletov red s $p = \frac{3}{2} > 1$). Koristimo činjenicu da je $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}\right)}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}} \cdot \frac{\frac{1}{\sqrt{n^3+1}+\sqrt{n^3}}}{\frac{1}{n^{3/2}}} = \frac{1}{2}.$$

Kako je $L = \frac{1}{2} \in [0, +\infty\rangle$ i red $\sum b_n$ konvergira, slijedi da i zadani red konvergira.

(f) Budući da je $\sin x \approx x$ i $\cos x \approx 1$ za $x \approx 0$, slijedi da je $\operatorname{tg} x \approx x$ za $x \approx 0$. Djelovanjem s arctg na obje strane, zbog neprekidnosti te funkcije u 0, očekujemo da je $\operatorname{arctg} x \approx x$ za $x \approx 0$. Formalno koristimo $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = [x = \operatorname{tg} y] = \lim_{y\to 0} \frac{y}{\operatorname{tg} y} = \lim_{y\to 0} \frac{\cos y}{\frac{\sin y}{y}} = 1.$$

Budući da je $\lim_{n\to\infty} 2^{-n} = 0$, iz gornjeg računa slijedi

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}(2^{-n})}{2^{-n}} = 1.$$

Kako je $L = 1 \in [0, +\infty\rangle$ i red $\sum b_n$ konvergira, zadani red konvergira po usporednom kriteriju.

(g) U brojniku dominantnu ulogu ima član $\sqrt{n^2+1} \approx n$ pa se cijeli izraz ponaša kao $\frac{n}{n^2} = \frac{1}{n}$. Usporedimo ga s divergentnim harmonijskim redom $b_n = \frac{1}{n}$:

$$L = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{n^2+1}}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2n}+\sqrt{n^2+1}}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{n}} + \sqrt{1+\frac{1}{n^2}} \right) = 0 + 1 = 1.$$

Budući da je $L = 1 \in \langle 0, +\infty]$ i red $\sum b_n$ divergira, zadani red divergira po usporednom kriteriju.

$\triangle$

3.2.6 Dodatak: Još neki kriteriji konvergencije

Teorem 19 (Cauchyjev kondenzacijski kriterij)**.** *Neka je $(a_n)_n$ padajuć niz nenegativnih realnih brojeva. Tada vrijedi da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira ako i samo ako $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergira.*

Dokaz. Označimo parcijalne sume ovih dvaju redova sa

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad \text{i} \quad T_k = \sum_{j=0}^{k} 2^j a_{2^j}.$$

Budući da su članovi niza nenegativni ($a_n \geq 0$), nizovi parcijalnih suma (S_n) i (T_k) su rastući. Prema tome, redovi konvergiraju ako i samo ako su im pripadni nizovi parcijalnih suma odozgo ograničeni.

Smjer $\Longleftarrow$ *:* Pretpostavimo da red $\sum_n 2^n a_{2^n}$ konvergira, odnosno da je niz (T_k) odozgo ograničen nekom konstantom M. Za proizvoljan $n \in \mathbb{N}$ postoji $k \in \mathbb{N}$ takav da je $n \leq 2^{k+1}-1$. Koristeći nenegativnost i monotonost niza, grupiramo članove:

$$S_n \leq S_{2^{k+1}-1} = a_1 + (a_2 + a_3) + (a_4 + a_5 + a_6 + a_7) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1}).$$

Budući da niz (a_n) pada, svaki član u pojedinoj zagradi ocijenit ćemo odozgo najvećim (prvim) članom te zagrade:

$$\begin{aligned} S_n &\leq a_1 + (a_2 + a_2) + (a_4 + a_4 + a_4 + a_4) + \cdots + 2^k a_{2^k} \\ &= a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k \leq M. \end{aligned}$$

Niz (S_n) je odozgo ograničen, pa red $\sum a_n$ konvergira.

Smjer $\Longrightarrow$ *:* Obrnuto, pretpostavimo da $\sum a_n$ konvergira te da je niz (S_n) ograničen odozgo konstantom L. Za proizvoljno $k \in \mathbb{N}$ promatramo S_{2^k}:

$$S_{2^k} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + (a_5 + \cdots + a_8) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k}).$$

Sada članove u zagradama ocjenjujemo odozdo najmanjim (posljednjim) članom:

$$\begin{aligned} S_{2^k} &\geq a_1 + a_2 + (a_4 + a_4) + (a_8 + \cdots + a_8) + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k} \\ &= a_1 + a_2 + 2a_4 + 4a_8 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k}. \end{aligned}$$

Množenjem cijele nejednakosti brojem 2 dobivamo:

$$2S_{2^k} \geq 2a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k} = T_k + a_1.$$

Odavde slijedi $T_k \leq 2S_{2^k} - a_1 \leq 2L$. Niz (T_k) je ograničen, stoga i red $\sum 2^n a_{2^n}$ konvergira. □

Zadatak 3.2.9. Odredite konvergira li red $\sum_{n=100}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)}$.

Rješenje. Neka je

$$a_n = \frac{1}{n(\ln n)(\ln \ln n)}.$$

Za dovoljno velike n, niz (a_n) je strogo pozitivan i monotono padajući (svaka od funkcija u nazivniku je rastuća i pozitivna za n dovoljno velik) pa možemo primijeniti Cauchyjev kondenzacijski kriterij.

Vrijedi

$$2^n a_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n(\ln 2^n)(\ln \ln 2^n)} = \frac{1}{n \ln 2 \cdot (\ln n + \ln \ln 2)}.$$

Konstantu $\frac{1}{\ln 2}$ možemo izlučiti ispred sume, pa se problem svodi na ispitivanje konvergencije novog reda s općim članom:

$$b_n = \frac{1}{n(\ln n + \ln \ln 2)}.$$

Budući da je i niz (b_n) za dovoljno velike n strogo pozitivan i padajući, Cauchyjev kondenzacijski kriterij možemo primijeniti još jednom. Promatramo red $\sum_n 2^n b_{2^n}$:

$$2^n b_{2^n} = 2^n \cdot \frac{1}{2^n(\ln 2^n + \ln \ln 2)} = \frac{1}{n \ln 2 + \ln \ln 2}.$$

Dobili smo red $\sum_n \frac{1}{n \ln 2 + \ln \ln 2}$. Koristeći činjenicu da je $n \ln 2 + \ln \ln 2 \leq 10n$ za sve n dovoljno velike, slijedi $\sum_n \frac{1}{n \ln 2 + \ln \ln 2} \geq \sum_n \frac{1}{n} = +\infty$ pa navedeni red divergira. △

Teorem 20 (Dirichletov kriterij)**.** *Neka je $(a_n)_n$ niz realnih brojeva za koje je niz parcijalnih suma $A_n := \sum_{k=1}^{n} a_k$ ograničen. Neka je (b_n) padajuć niz nenegativnih realnih brojeva za koje vrijedi da je $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$. Tada red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira.*

Dokaz. Prema pretpostavci, postoji konstanta $M > 0$ takva da za sve $n \in \mathbb{N}$ vrijedi $|A_n| \leq M$. Definirajmo $A_0 := 0$. Članove niza (a_n) tada možemo zapisati kao $a_k = A_k - A_{k-1}$.

Koristeći Abelovu parcijalnu sumaciju, n-tu parcijalnu sumu zadanog reda, koju ćemo označiti sa S_n, raspisujemo na sljedeći način:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} (A_k - A_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{n} A_k b_k - \sum_{k=0}^{n-1} A_k b_{k+1} \\ &= A_n b_n + \sum_{k=1}^{n-1} A_k (b_k - b_{k+1}). \end{aligned}$$

Budući je niz (A_n) ograničen i $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, puštanjem $n \to \infty$ vrijedi $\lim_{n\to\infty} A_n b_n = 0$ po teoremu o sendviču.

Za drugi pribrojnik, pokazat ćemo da red $\sum_{k=1}^{\infty} A_k(b_k - b_{k+1})$ konvergira, i to apsolutno. Budući da je niz (b_n) padajuć, vrijedi $b_k - b_{k+1} \geq 0$ pa vrijedi

$$\sum_{k=1}^{n-1} |A_k(b_k - b_{k+1})| = \sum_{k=1}^{n-1} |A_k|(b_k - b_{k+1}) \leq \sum_{k=1}^{n-1} M(b_k - b_{k+1}) = M(b_1 - b_n) \leq M b_1.$$

Kako je niz parcijalnih suma reda s nenegativnim članovima svakako rastuć i odozgo je omeđen, slijedi da konvergira. Dakle, navedeni red konvergira apsolutno pa je i konvergentan.

Konačno, koristeći teorem o limesu zbroja zaključujemo da niz (S_n) konvergira, što znači da red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ konvergira. □

Zadatak 3.2.10. (*) Dokažite da red $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ konvergira, ali da ne konvergira apsolutno.

Rješenje. Za dokaz konvergencije koristimo Dirichletov test.

Označimo $a_n := \sin n$ i $b_n := \frac{1}{n}$. Niz (b_n) je očito padajuć niz nenegativnih realnih brojeva koji konvergira u 0 pa preostaje dokazati da je niz parcijalnih suma $A_n = \sum_{k=1}^{n} \sin k$ ograničen. Za to koristimo trik teleskopiranja. Koristeći trigonometrijski identitet $2 \sin\alpha \sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$ primijetimo da je

$$2 \sin k \sin\left(\frac{1}{2}\right) = \cos\left(k - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)$$

pa zbrajanjem od $k = 1$ do n dobijemo:

$$\begin{aligned} 2\sin\left(\frac{1}{2}\right) A_n &= \sum_{k=1}^{n} \left(\cos\left(k - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(k + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \left(\cos\frac{1}{2} - \cos\frac{3}{2}\right) + \left(\cos\frac{3}{2} - \cos\frac{5}{2}\right) + \cdots + \left(\cos\left(N - \frac{1}{2}\right) - \cos\left(N + \frac{1}{2}\right)\right) \\ &= \cos\frac{1}{2} - \cos\left(n + \frac{1}{2}\right). \end{aligned}$$

Dakle,

$$|A_n| = \left| \frac{\cos\frac{1}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2\sin\frac{1}{2}} \right| \leq \frac{\left|\cos\frac{1}{2}\right| + \left|\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\right|}{2\sin\frac{1}{2}} \leq \frac{1+1}{2\sin\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sin\frac{1}{2}}$$

pa zaključujemo da je niz parcijalnih suma ograničen. Kako su oba uvjeta Dirichletovog testa ispunjena, red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ konvergira.

Dokažimo sada da red nije apsolutno konvergentan, tj. da red $\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{\sin n}{n}\right|$ divergira. Budući da je $\sin n \in [-1,1]$, vrijedi $|\sin n| \geq \sin^2 n$, pa zaključujemo da za svaki $N \in \mathbb{N}$ vrijedi

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{|\sin n|}{n} \geq \sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 n}{n}.$$

Korištenjem formule za polovični kut slijedi $\sin^2 n = \frac{1-\cos 2n}{2}$ pa imamo

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{\sin^2 n}{n} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1-\cos 2n}{2n} = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos 2n}{n}.$$

Red $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 2n}{n}$, konvergira po Dirichletovom testu (dokaz je potpuno analogan onomu u prvom dijelu zadatka, samo što se suma $A_N = \sum \cos 2k$ množi sa $2\sin\frac{1}{2}$) pa koristeći činjenicu da harmonijski red divergira puštanjem $N \to \infty$ slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|\sin n|}{n} \geq \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{\cos 2n}{n} = +\infty.$$

Time smo dokazali da red konvergira, ali ne apsolutno. $\triangle$

Zadaci za vježbu

3.2.11. Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{2n^2}{n^4-n^2+1}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{(n+1)\ln n}$

(Rj. (a) K, (b) K)

3.2.12. Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^n}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^{-\frac{n^2+1}{n+1}}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{2n!!}\frac{1}{2^{n+1}}$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{(1+a)(1+a^2)\cdots(1+a^n)}\qquad(a>0)$

(g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2})(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2})\cdots(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2})$

(Rj. (a) K, (b) K, (c) K, (d) K, (e) K, (f) K, (g) K)

3.2.13. Ispitajte konvergenciju redova:

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cos^2\frac{n\pi}{3}}{2^n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)(\ln\ln n)^2}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\operatorname{tg}\frac{1}{n\sqrt{n}}$

(d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln(n!)}$

(e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{n}\operatorname{sh}\frac{1}{n}\cos n$

(f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{(\ln n)^n}$

(Rj. (a) K, (b) K, (c) K, (d) D, (e) K, (f) K)

3.2.14. Ispitajte uvjetnu i apsolutnu konvergenciju redova:

(a) $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n(n+1)}}$

(b) $\displaystyle\sum_n \frac{(-1)^n n^3}{3^n}$

(c) $\displaystyle\sum_n (-1)^n \ln(1+\frac{1}{n})$

(d) $\displaystyle\sum_n \frac{\cos\frac{n\pi}{2}}{\sqrt{n}}$

(e) $\displaystyle\sum_n (\sin\sin n)^n$

(Rj. (a) U, (b) A, (c) U, (d) U, (e) K, (I) K. (g) D)

3.2.15. Pretpostavimo da je $\sum_n a_n$ konvergentni red s pozitivnim članovima. Koji od sljedećih redova nužno konvergiraju? (U svakom podzadatku ili dokažite da novi red mora konvergirati ili nađite primjer reda $\sum a_n$ za kojeg novi red divergira.)

(a) $\displaystyle\sum_n \frac{a_n}{n}$

(b) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n^{100} a_n}$

(c) $\displaystyle\sum_n \operatorname{sh} a_n$

(d) $\displaystyle\sum_n a_n \sin n$

(e) $\displaystyle\sum_n \frac{\sqrt{a_n}}{n}$

(f) $\displaystyle\sum_n \sqrt{\frac{a_n}{n}}$

(Rj. (a) da, (b) ne, (c) da, (d) da, (e) da, (f) ne)

3.2.16. Neka je $\sum a_n$ apsolutno konvergentan red. Dokažite da je tada konvergentan i red $\sum a_n^2$. Vrijedi li obrat?

3.2.17. Neka je $\sum a_n$ konvergentan red takav da postoji $m \in \mathbb{N}$ takav da je $a_n > a_{n+1} > 0$ $\forall n \geq m$. Dokažite da je $\lim_{n\to\infty} n a_n = 0$.

3.3 Redovi potencija i Taylorovi redovi

Definicija. Red potencija oko točke $c \in \mathbb{R}$ je red oblika

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \tag{3.1}$$

gdje je $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ niz realnih brojeva i gdje koristimo zapis $(x-c)^0 := 1$ (iako formalno funkcija $(x-c)^0$ nije definirana za $x = c$).

U daljnjem ćemo sa $\mathcal{I}$ označavati skup svih $x \in \mathbb{R}$ za koje red realnih brojeva $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$ konvergira. $\mathcal{I}$ je neprazan skup, jer red potencija (3.1) konvergira za $x = c$ i suma mu je a_0.

Definicija. Za niz funkcija $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}_+$, definiranih na intervalu I kažemo da konvergira **lokalno uniformno** na I ako niz $(f_n)_{n \in \mathbb{Z}_+}$ konvergira uniformno na svakom podsegmentu $J \subseteq I$.

Teorem 21. ***(Prvi Abelov teorem)*** *Ako red potencija (3.1) konvergira za $\alpha \neq c$, onda taj red konvergira na na čitavom otvorenom intervalu $\langle c-r, c+r \rangle$, gdje je $r := |\alpha - c|$.*

Dodatno, na tom intervalu konvergira apsolutno i lokalno uniformno.

Iz provg Abelovog teorema slijedi da je skup $\mathcal{I}$ zapravo interval simetričan (do na rubne točke) s obzirom na točku c. Zbog toga skup $\mathcal{I}$ zovemo **interval konvergencije** reda potencija (3.1).

Radijus konvergencije R reda potencija (3.1) definiramo kao polovicu duljine intervala $\mathcal{I}$. Preciznije,

$$R := \sup\{|c - \alpha| : \ \alpha \in \mathcal{I}\} \in [0, +\infty].$$

O tome hoće li red (3.1) konvergirati u rubovima intervala $\mathcal{I}$ (tj. u točkama $c - R$ i $c + R$) ovist će o samom redu.

Rezimirajmo,

Korolar. *Neka je (3.1) red potencija oko točke $c \in \mathbb{R}$ i neka je R njegov radijus konvergencije. Tada vrijedi*

(a) Red (3.1) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle c-R, c+R \rangle$.

(b) Red (3.1) divergira za sve $x \in \mathbb{R}$ za koje je $|x - c| > R$.

Sljedeći teorem nam daje jednostavnu formulu za računanje radijusa konvergencije reda (3.1).

Teorem 22. *Neka je (3.1) red potencija oko točke $c \in \mathbb{R}$ i R njegov radijus konvergencije. Tada vrijedi tzv.* ***Cauchy-Hadamardova formula****:*

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{3.2}$$

pri čemu dogovorno uzimamo $R := 0$ ukoliko je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$, a $R := +\infty$ ukoliko je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$.

Primjer. (a) Promotrimo geometrijski red

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n. \tag{3.3}$$

Ovdje je $c = 0$ i $a_n = 1$, za sve $n \in \mathbb{N}_0$, pa je prema Cauchy-Hadamardovoj formuli (3.2)

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1}} = 1.$$

Stoga red (3.3) konvergira apslolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Koristeći formulu za parcijalnu sumu geometrijskog reda zaključujemo da konvergira prema funkciji $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, tj. vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} x^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-x^{N+1}}{1-x} = \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Kako u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$ red (3.3) ne konvergira (opći član ne teži prema 0), zaključujemo da je njegov interval konvergencije $\mathcal{I} = \langle -1, 1\rangle$.

(b) Promotrimo red potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^n. \tag{3.4}$$

Ovdje je $c = 1$ i $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n+1}$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, pa je

$$R = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}}} = 1,$$

jer je $\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$. Stoga red (3.4) konvergira apslolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle 0, 2\rangle$. Provjerimo konvergenciju reda (3.4) i u rubnim točkama intervala $\langle 0, 2\rangle$.

Za $x = 0$ riječ je o redu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1},$$

koji divergira (usporedni kriterij sa harmonijskim redom).

Za $x = 2$ riječ je o redu

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1},$$

koji konvergira prema Leibnizovom kriteriju.

Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.4) je $\mathcal{I} = \langle 0, 2]$.

- Promotrimo red potencija

$$\sum_{n=0}^{\infty} n! x^n.$$

Pokazali smo na MA1 da za svaki $x \neq 0$ vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} n!|x^n| = +\infty$$

budući da faktorijel raste brže od eksponencijalne funkcije sa bilo kojom bazom. Prema tome, nužan uvjet konvergencije nije ispunjen niti za jedan $x \neq 0$ pa je interval konvergencije jednak $\mathcal{I} = \{0\}$.

Napomena. Koristeći Cesaro–Stolzov teorem znamo da ako postoji limes $\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, tada postoji i limes $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ i jednaki su. Dakle, u tom slučaju za radijus konvergencije R reda potencija (3.1) vrijedi

$$R = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|. \tag{3.5}$$

Zadatak 3.3.1. Odredite radijus konvergencije i intervale konvergencije redova potencija

(a) $\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n$ $\quad$ (b) $\sum \left(\frac{2+(-1)^n}{5+(-1)^{n+1}}\right)^n x^n$ $\quad$ (c)* $\sum \frac{n^n}{n!}x^n$.

Rješenje. (a) za $n \in \mathbb{Z}_+$ stavimo $a_n := \frac{(n!)^2}{(2n)!}$. Tada je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n!)^2(2n+2)!}{(n+1)!^2(2n)!} = \frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)^2} \longrightarrow 4,$$

kada $n \to \infty$. Prema (3.5) radijus konvergencije reda potencija

$$\sum \frac{(n!)^2}{(2n)!}(x-1)^n \tag{3.6}$$

jednak je $R = 4$. Stoga red (3.6) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -3, 5\rangle$. U rubnim točkama intervala $\langle -3, 5\rangle$ riječ je o redovima

$$\sum (-1)^n \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}\ (x = -3) \quad \text{te} \quad \sum \frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!}\ (x = 5),$$

divergiraju, jer je

$$\frac{(n!)^2 4^n}{(2n)!} \geq 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

pa specijalno nije zadovoljen nužan uvjet za konvergenciju reda.

Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.6) je interval $\mathcal{I} = \langle -3, 5\rangle$.

(b) Prema Cauchy-Hadamardovoj formuli (3.2) za radijus konvergencije R reda potencija

$$\sum \left(\frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n (x + 2)^n \tag{3.7}$$

vrijedi

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to\infty} \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} = \frac{3}{4},$$

pa je $R = \frac{4}{3}$. Stoga red potencija (3.7) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$. U rubnim točkama intervala $\langle -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$ riječ je o redovima

$$\sum (-1)^n \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n\ (x = -\frac{10}{3}) \quad \text{te} \quad \sum \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n\ (x = -\frac{2}{3}),$$

koji divergiraju, budući da nije ispunjen nužan uvjet za konvergenciju reda:

$$\limsup_{n\to\infty} \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{2 + (-1)^n}{5 + (-1)^{n+1}} \right)^n = 1.$$

Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.7) je $\mathcal{I} = \langle -\frac{10}{3}, -\frac{2}{3}\rangle$.

(c) Za $n \in \mathbb{Z}_+$ stavimo $a_n := \frac{n!}{n^n}$. Tada je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{(n+1)!n^n}{n!(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \longrightarrow \frac{1}{e},$$

kada $n \to \infty$. Prema (3.5) radijus konvergencije reda potencija

$$\sum \frac{n^n}{n!} x^n \tag{3.8}$$

jednak je $R = \dfrac{1}{e}$, pa red potencija (3.8) konvergira apsolutno i lokalno uniformno na intervalu $\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\rangle$. U rubnim točkama intervala $\langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e}\rangle$ riječ je o redovima

$$\sum \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!} \ (x = -\frac{1}{e}) \quad \text{te} \quad \sum \frac{n^n}{e^n n!} \ (x = \frac{1}{e}).$$

Za $n \in \mathbb{Z}_+$ stavimo

$$b_n := \frac{n^n}{e^n n!}.$$

Tada je

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} < 1, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

pa je niz $(b_n)_{n\in\mathbb{Z}+}$ strogo padajuć. Nadalje, nejednakosti

$$x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}, \quad \forall x > 0,$$

dobivamo

$$-\frac{1}{2n} < \ln\left(\frac{b_{n+1}}{b_n}\right) = \ln\left(\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e}\right) = n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - 1 < -\frac{1}{2n} + \frac{1}{3n^2}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pa je

$$e^{-\frac{1}{2n}} < \frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{(1+\frac{1}{n})^n}{e} < e^{-\frac{1}{2n}+\frac{1}{3n^2}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.9}$$

Iteriranjem nejednakosti (3.9) dobivamo

$$b_1 e^{-\frac{1}{2}H_n} < b_{n+1} < b_1 e^{\frac{1}{3}\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}H_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \tag{3.10}$$

gdje je $H_n := 1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n}$ n-ti harmonijski broj. Prema Cauchyjevom integralnom kriteriju red $\sum \dfrac{1}{n^2}$ je konvergentan i njegovu sumu označimo sa C. Kako je $b_1 = e^{-1}$, iz (3.10) dobivamo

$$\frac{1}{e} \cdot e^{-\frac{1}{2}H_n} < b_{n+1} < \frac{C}{e} \cdot e^{-\frac{1}{2}H_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.11}$$

Kako je

$$\ln(1+n) = \int_1^{n+1} \frac{dx}{x} < H_n \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x} = 1 + \ln n, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

imamo

$$\frac{1}{\sqrt{e}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} < e^{-\frac{1}{2}H_n} \leq \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

pa iz nejednakosti (3.11) slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{e^3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} \leq b_{n+1} < \frac{C}{e} \cdot \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3.12}$$

Napokon, iz (3.12) slijedi $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$, pa red $\sum \frac{(-1)^n n^n}{e^n n!} = \sum (-1)^n b_n$ konvergira (Leibnizov kriterij). Također, (3.12) povlači da red $\sum \frac{n^n}{e^n n!} = \sum b_n$ divergira (usporedni kriterij s redom $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$). Dakle, interval konvergencije reda potencija (3.8) je $\mathcal{I} = \langle -\frac{1}{e}, \frac{1}{e} \rangle$.

△

Ako je (3.1) red potencija sa radijusom konvergencije R, iz Cauchy-Hadamardove formule slijedi da redovi potencija

$$\sum n a_n (x-c)^{n-1}, \tag{3.13}$$

$$\sum \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1} \tag{3.14}$$

imaju radijus konvergencije također jednak R. Za red potencija (3.13) kažemo da je dobiven iz reda (3.1) **deriviranjem član po član**, a za red potencija (3.14) kažemo da je dobiven iz reda (3.1) **integriranjem član po član**.

Teorem 23. *Neka red potencija $\sum a_n(x-c)^n$ ima radijus konvergencije $R > 0$ i stavimo $\mathcal{J} := \langle c - R, c + R \rangle$. Tada je funkcija $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ definirana s*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n$$

derivabilna na $\mathcal{J}$ i vrijedi

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-c)^{n-1}, \quad \forall x \in \mathcal{J}. \tag{3.15}$$

Nadalje, vrijedi

$$\int_c^x f(t)\,dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-c)^{n+1}, \quad \forall x \in \mathcal{J}. \tag{3.16}$$

Korolar. *Neka je f definirana kao u prethodnom teoremu. Funkcija f je klase $C^\infty(\mathcal{J})$ i za svako $m \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi*

$$f^{(m)}(x) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{n!}{(n-m)!} a_n (x-c)^{n-m}, \quad \forall x \in \mathcal{J}.$$

Odavde za $x = c$ dobivamo

$$a_m = \frac{f^{(m)}(c)}{m!}, \quad \forall m \in \mathbb{Z}_+.$$

Definicija. Neka je $f : I \to \mathbb{R}$ funkcija klase $C^\infty(I)$ definirana na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ i neka je $c \in I$. Red potencija

$$T[f, c] := \sum \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

zovemo **Taylorov red** funkcije f oko točke c.

Ako je $c = 0$, onda se Taylorov red $T[f, 0]$ zove **Maclaurinov red** od f i označava s $T[f]$. Dakle,

$$T[f] := T[f, 0] = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

Općenito Taylorov red $T[f, c]$ funkcije $f \in C^\infty(I)$ može divergirati za svako $x \neq c$, odnosno konvergirati prema nekoj drugoj funkciji.

Primjer. Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija definirana formulom

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{za } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

Tvrdimo da je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Kako je $\lim\limits_{x \to 0+} f(x) = 0$, f je neprekidna u 0. Nadalje, f je očito klase C^∞ na skupu $\mathbb{R} \backslash \{0\}$. Dokažimo da postoje sve n-te derivacije $f^{(n)}(0)$, da su sve funkcije $f^{(n)}$ neprekdine u 0 i da vrijedi

$$f^{(n)}(0) = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.17}$$

Dovoljno je dokazati da vrijedi

$$\lim_{h \to 0+} \frac{f^{(n)}(h)}{h} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+. \tag{3.18}$$

Naime, iz (3.18) će tada slijediti da je za svako $n \in \mathbb{Z}_+$ funkcija $f^{(n)}$ derivabilna u 0, pa stoga i neprekidna u 0.

Podsjetimo se da za svaki polinom p stupnja $\deg p \geq 0$ vrijedi

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0, \tag{3.19}$$

što se može jednostavno dokazati primijenjujući L'Hospitalovo pravilo ($\deg p + 1$)-puta. Indukcijom dokažimo da za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ postoji polinom p_n takav da vrijedi

$$f^{(n)}(x) = p_n(x^{-1})f(x), \quad \forall x > 0. \tag{3.20}$$

Za $n = 0$ tvrdnja je trivijalna. Pretpostavimo da (3.20) vrijedi za neko $n \in \mathbb{N}$. Tada je

$$f^{(n+1)}(x) = \frac{d}{dx}[p_n(x^{-1})f(x)] = [-p_n'(x^{-1}) + p_n(x^{-1})]x^{-2}f(x) = p_{n+1}(x^{-1})f(x), \quad \forall x > 0.$$

gdje je p_{n+1} polinom definiran s $p_{n+1}(x) := x^2(p_n(x) - p_n(x)')$.
Stoga je

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f^{(n)}(h)}{h} = \lim_{h\to 0+} \left[\frac{1}{h} p_n\left(\frac{1}{h}\right) e^{-\frac{1}{h}}\right] = \lim_{x\to+\infty} \frac{xp_n(x)}{e^x} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+,$$

gdje zadnja jednakost slijedi iz (3.19). Time smo dokazali tvrdnju (3.17), pa je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Tvrdimo da Maclaurinov red $T[f] = \sum \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ od f ne konvergira prema f ni na kojem otvorenom intevralu I oko 0. Pretpostavimo suprotno. Tada možemo naći $\delta > 0$ takav da vrijedi

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n, \quad \forall x \in \langle -\delta, \delta\rangle. \tag{3.21}$$

Prema dokazanom je $f^{(n)}(0) = 0$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$. Iz (3.21) slijedi $f(x) = 0$, za sve $x \in \langle -\delta, \delta\rangle$, što je kontradikcija s činjenicom da je $f(x) > 0$, za sve $x > 0$.

Definicija. Za funkciju $f \in C^\infty(I)$ definiranu na otvorenom intervalu $I \subseteq \mathbb{R}$ kažemo da je **analitička u točki** $c \in I$, ako njen Taylorov red

$$T[f, c] = \sum \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n$$

ima radijus konvergencije $R > 0$ i ako postoji $0 < \delta \leq R$ takav da vrijedi

$$f(x) = T[f, c](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x - c)^n, \quad \forall x \in \langle c - \delta, c + \delta\rangle \cap I.$$

Ukoliko je f analitička u svakoj točki $c \in I$, onda kažemo da je f **analitička** na I. Skup svih analitičkih funkcija na I označavamo s $C^\omega(I)$.

Napomena. Skup svih analitičkih funkcija $C^\omega(I)$ je dosta "siromašniji" od skupa svih funkcija klase $C^\infty(I)$. Npr. u prethodnom primjeru smo vidjeli da za funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiranu s

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{za } x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} & \text{za } x > 0 \end{cases}$$

vrijedi $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, ali da f nije analitička u točki 0. Štoviše, može se dokazati da postoji funkcija $f \in C^\infty(\mathbb{R})$ čiji Taylorov red $T[f, c]$ ima radijus konvergencije jednak 0, za svaku točku $c \in \mathbb{R}$.

Teorem 24. *Neka je* $\sum a_n(x-c)^n$ *red potencije sa radijusom konvergencije* $R > 0$ *i stavimo* $\mathcal{J} := \langle c - R, c + R\rangle$. *Tada je funkcija* $f : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ *definirana s*

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n$$

analitička na čitavom intervalu $\mathcal{J}$. *Štoviše, za svako* $\alpha \in \mathcal{J}$ *Taylorov red*

$$T[f, \alpha] = \sum \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n$$

ima radijus konvergencije $\rho \geq R - |c - \alpha|$ *i vrijedi*

$$f(x) = T[f, \alpha](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(x-\alpha)^n, \quad \forall x \in \langle \alpha - \rho, \alpha + \rho\rangle.$$

Korolar. *Neka je* $f : I \to \mathbb{R}$ *funkcija definirana na otvorenom intervalu* $I \subseteq \mathbb{R}$. *Ako je* f *analitička u točki* $c \in I$ *tada postoji otvoreni interval* J *oko* c *sadržan u* I *takav da je* f *analitička na* J.

Sljedeći teorem daje nužne i dovoljne uvjete da bi funkcija $f \in C^\infty(I)$ bila analitička na I.

Teorem 25. *Neka je* $f \in C^\infty(I)$, *gdje je* $I \subseteq \mathbb{R}$ *otvoren interval. Tada je* $f \in C^\omega(I)$ *ako i samo ako za svaki* $c \in I$ *postoji* $\delta > 0$ *i konstante* $C > 0$ *i* $r > 0$ *takve da za sve* $n \in \mathbb{Z}_+$ *vrijedi*

$$|f^{(n)}(x)| \leq C\frac{n!}{r^n}, \quad \forall x \in J := \langle c - \delta, c + \delta\rangle \cap I. \tag{3.22}$$

U tom slučaju vrijedi

$$f(x) = T[f, c](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad \forall x \in J \cap \langle c - r, c + r\rangle. \tag{3.23}$$

Korolar. *Neka je* $f \in C^\infty(I)$, *gdje je* I *otvoren interval. Ako za za svaki* $c \in I$ *postoje* $\delta > 0$ *i* $C > 0$ *takvi da za sve* $n \in \mathbb{Z}_+$ *vrijedi*

$$|f^{(n)}(c)| \leq C \quad \forall x \in J := \langle c - \delta, c + \delta\rangle \cap I, \tag{3.24}$$

tada je $f \in C^\omega(I)$ *i vrijedi*

$$f(x) = T[f, c](x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(x-c)^n, \quad \forall x \in J. \tag{3.25}$$

Zadatak 3.3.2. Dokažite da je funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ analitička na $\mathbb{R}$ i odredite njen Maclaurinov red $T[f]$, ako je

$$\text{(a)} f(x) := e^x \qquad \text{(b)} f(x) := \sin x \qquad \text{(c)} f(x) := \operatorname{ch} x.$$

Rješenje. Kako bi dokazali da je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$, dovoljno je dokazati da Maclaurinov red $T[f]$ od f konvergira prema f u svakoj točki $x \in \mathbb{R}$.

(a) Imamo $f^{(n)}(x) = f(x) = e^x$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ i $x \in \mathbb{R}$. Specijalno je $f^{(n)}(0) = 1$, za sve $n \in \mathbb{Z}_+$, pa je sa

$$T[f] = \sum \frac{x^n}{n!}$$

dan Maclaurinov red funkcije f.

Dokažimo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Uzmimo proizvoljni $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $\delta > |x_0|$. Tada je za sve $n \in \mathbb{N}$

$$f^{(n)}(x) = e^x < e^\delta =: C, \quad \forall x \in \langle -\delta, \delta \rangle.$$

Iz prethodnog korolara slijedi $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$, pa je specijalno i $T[f](x_0) = f(x_0) = e^{x_0}$. Kako je $x_0 \in \mathbb{R}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(b) Imamo $f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$ za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ i $x \in \mathbb{R}$. Specijalno je

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0 & \text{ako } n \equiv 0, 2 \pmod 4 \\ 1 & \text{ako } n \equiv 1 \pmod 4 \\ -1 & \text{ako } n \equiv 3 \pmod 4 \end{cases}$$

pa je sa

$$T[f] = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

dan Maclaurinov red od f. Dokažimo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Kako za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$|f^{(n)}(x)| = |\sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)| \leq 1 =: C, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

iz prethodnog korolara slijedi $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

(c) Za svako $n \in \mathbb{Z}_+$ i $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} \operatorname{ch} x & \text{ako } 2 \mid n \\ \operatorname{sh} x & \text{ako } 2 \nmid n \end{cases}$$

Specijalno je

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 1 & \text{ako } 2 \mid n \\ 0 & \text{ako } 2 \nmid n \end{cases}$$

pa je sa

$$T[f] = \sum \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

dan Maclaurinov red od f. Dokažimo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Uzmimo proizvoljan $x_0 \in \mathbb{R}$ i neka je $\delta > |x_0|$. Tada za sve $n \in \mathbb{Z}_+$ vrijedi

$$|f^{(n)}(x)| \leq \operatorname{ch} x < \operatorname{ch} \delta =: C, \quad \forall x \in \langle -\delta, \delta \rangle.$$

Iz prethodnog korolara slijedi $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \langle -\delta, \delta \rangle$, pa je specijalno i $T[f](x_0) = f(x_0) = \operatorname{ch} x_0$. Kako je $x_0 \in \mathbb{R}$ bio proizvoljan, zaključujemo da je $T[f](x) = f(x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$. Stoga je $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ i vrijedi

$$\operatorname{ch} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

△

Slično bismo pokazali da su funkcije $x \mapsto \cos x$ i $x \mapsto \operatorname{sh} x$ analitičke na $\mathbb{R}$ i da vrijedi

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{i} \quad \operatorname{sh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Napomena. Primijetimo da Maclaurinov red svake od spomenutih funkcija

$$x \mapsto e^x, \quad x \mapsto \sin x, \quad x \mapsto \cos x, \quad x \mapsto \operatorname{sh} x, \quad x \mapsto \operatorname{ch} x$$

konvergira prema pripadnoj funkciji za sve $x \in \mathbb{R}$. To ne mora nužno vrijediti za svaku funkciju $f \in C^\omega(\mathbb{R})$. Npr. funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definirana formulom

$$f(x) := \frac{1}{1 + x^2}$$

je analitička na $\mathbb{R}$, dok njen Maclaurinov red

$$T[f] = \sum (-1)^n x^{2n}$$

ima radijus konvergencije $R = 1$. Potpuno objašnjenje tog fenomena dobit ćete na kompleksnoj analizi.

Teorem 26. *Neka su $f, g \in C^\omega(I)$ analitičke funkcije na otvorenom intervalu I i neka su $c \in I$, $\delta > 0$ i $\varepsilon > 0$ takvi da vrijedi*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n, \quad \forall x \in J_1 := \langle c-\delta, c+\delta \rangle \cap I,$$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x-c)^n, \quad \forall x \in J_2 := \langle c-\varepsilon, c+\varepsilon \rangle \cap I,$$

gdje su

$$a_n = \frac{f^{(n)}(c)}{n!} \quad \text{i} \quad b_n = \frac{g^{(n)}(c)}{n!}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Stavimo $J := J_1 \cap J_2$. Tada vrijedi

(a) Funkcija $\alpha f + \beta g$ je analitička na J za sve $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ i vrijedi

$$(\alpha f + \beta g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n)(x-c)^n, \quad \forall x \in J. \tag{3.26}$$

(b) Funkcija $f \cdot g$ je analitička na J i vrijedi

$$(f \cdot g)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-c)^n, \quad \forall x \in J, \tag{3.27}$$

gdje su koeficijenti c_n dani s

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}, \quad \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Teorem 27. ***(Drugi Abelov teorem)*** *Pretpostavimo da red potencija $\sum a_n x^n$ konvergira prema L za neko $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tada*

(a) Red potencija $\sum a_n x^n$ konvergira

- *uniformno na $[0, r]$, ako je $r > 0$,*
- *uniformno na $[r, 0]$, ako je $r < 0$*

(b) Vrijedi

- $\displaystyle\lim_{x \to r-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$, *ako je $r > 0$,*
- $\displaystyle\lim_{x \to r+} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = L$, *ako je $r < 0$.*

Zadatak 3.3.3. Funkciju f razvijte u Maclaurinov red $T[f]$ ako je

(a) $f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$ (b) $f(x) := \sin^2 x$ (c) $f(x) := \ln(1+x)$

(d) $f(x) := \operatorname{arctg} x$ (e) $f(x) := \ln(1+x+x^2)$ (f) $f(x) := \dfrac{1}{(x^2+1)^2}$.

Odredite interval konvergencije $\mathcal{I}$ reda $T[f]$ i ispitajte vrijedi li $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

Rješenje. (a) Kako je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

to je

$$e^{-\frac{x^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}x^2\right)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

(b) Imamo

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Kako je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

to je

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x) = \frac{1}{2} \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(2x)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{2^{2n-1} x^{2n}}{(2n)!},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \mathbb{R}$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathbb{R}$.

(c) Krenimo od reda $\sum (-1)^n t^n$. Njegov radijus konvergencije je $R = 1$ i vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n t^n = \frac{1}{1+t}, \quad \forall t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Iz (3.16) slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^n\right)dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t}=\ln(1+x),\quad \forall x\in\langle -1,1\rangle.$$

Stoga je

$$\ln(1+x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad \forall x\in\langle -1,1\rangle.$$

Radijus konvergencije reda $T[f]=\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ jednak je 1, jer je dobiven iz reda $\sum(-1)^n x^n$ integriranjem član po član.

Provjerimo konvergenciju reda $T[f]$ u rubnim točkama intervala $\langle -1,1\rangle$.

Za $x=-1$ riječ je o redu

$$-\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$$

koji divergira, jer harmonijski red $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}$ divergira

Za $x=1$ riječ je o redu

$$\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n},$$

koji konvergira prema Leibnizovom kriteriju.

Dakle, interval konvergencije reda $T[f]$ je interval $\mathcal{I}=\langle -1,1]$.

Ostaje još provjeriti vrijedi li $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=T[f](1)=f(1)=\ln 2$. No to slijedi iz drugog Abelovog teoerema, budući da je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=\lim_{x\to 1-}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}=\lim_{x\to 1-}\ln(1+x)=\ln 2.$$

Sve zajedno imamo:

$$T[f]=\sum(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I}=\langle -1,1]$ i vrijedi $f(x)=T[f](x)$, za sve $x\in\mathcal{I}$.

(d) Krenimo od reda $\sum(-1)^n t^{2n}$. Njegov radijus konvergencije je $R=1$ i vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}=\frac{1}{1+t^2},\quad \forall t\in\langle -1,1\rangle.$$

Iz (3.16) slijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n t^{2n}\right)dt=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}=\operatorname{arctg}x,\quad \forall x\in\langle -1,1\rangle.$$

Dakle, imamo

$$\operatorname{arctg}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1},\quad \forall x\in\langle -1,1\rangle.$$

Radijus konvergencije reda $T[f]=\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ jednak je 1, jer je dobiven iz reda $\sum(-1)^n x^{2n}$ integriranjem član po član.

Provjerimo konvergenciju reda $T[f]$ u rubnim točkama intervala $\langle -1,1\rangle$.

Za $x=-1$ i $x=1$ riječ je redom o redovima

$$\sum(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}\quad \text{i}\quad \sum(-1)^n\frac{1}{2n+1}$$

koji konvergiraju prema Leibnizovom kriteriju.

Dakle, interval konvergencije reda $T[f]$ je interval $\mathcal{I}=[-1,1]$.

Pozivajući se na drugi Abelov teorem, zaključujemo da vrijedi

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{2n+1}=\lim_{x\to-1+}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\lim_{x\to-1+}\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}(-1)=-\frac{\pi}{4},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n}\frac{1}{2n+1}=\lim_{x\to1-}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}=\lim_{x\to-1+}\operatorname{arctg}x=\operatorname{arctg}1=\frac{\pi}{4}.$$

Dakle,

$$T[f]=\sum(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$

njegov interval konvergencije je $\mathcal{I}=[-1,1]$ i vrijedi $f(x)=T[f](x)$, za sve $x\in\mathcal{I}$.

(e) Za $x\neq 1$ imamo

$$1+x+x^2=\frac{1-x^3}{1-x},$$

pa je

$$\ln(1+x+x^2)=\ln\frac{1-x^3}{1-x}=\ln(1-x^3)-\ln(1-x),\quad \forall x<1.$$

Prema (c) je

$$\ln(1+x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n},\quad \forall x\in\langle -1,1\rangle,$$

pa je

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \quad \text{i} \quad \ln(1-x^3) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Prema (3.26) je

$$\ln(1+x+x^2) = \ln(1-x^3) - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle,$$

gdje su koeficijenti a_n dani s

$$a_n = \begin{cases} -\frac{2}{n} & \text{ako } 3 \mid n, \\ \frac{1}{n} & \text{ako } 3 \nmid n \end{cases} \tag{3.28}$$

Odredimo radijus konvergencije R reda $T[f] = \sum a_n x^n$. Očito je $\limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$, pa je $R = (\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|})^{-1} = 1$. Dokažimo da red $T[f]$ konvergira i u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$.

Za $x = 1$ riječ je o redu $\sum a_n$. Za $n \in \mathbb{N}$ stavimo $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} a_n$. Želimo dokazati da je niz $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Kako je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, dovoljno je dokazati da je podniz $(S_{3n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan. Za $n \in \mathbb{N}$ imamo

$$a_{3n-2} + a_{3n-1} + a_{3n} = \frac{1}{3n-2} + \frac{1}{3n-1} - \frac{2}{3n} = \frac{4}{3n(3n-1)(3n-2)}.$$

Stoga je

$$S_{3n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{4}{3n(3n-1)(3n-2)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Kako red $\sum \frac{4}{3n(3n-1)(3n-2)}$ konvergira (granični kriterij s $\sum n^{-3}$), zaključujemo da postoji $\lim\limits_{n\to\infty} S_{3n}$. Dakle, red $\sum a_n$ je uistinu konvergentan. Iz drugog Abelovog teorema slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{x\to 1-} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to 1-} \ln(1+x+x^2) = \ln 3.$$

Slično bismo pokazali da red $T[f]$ konvergira i za $x = -1$, te da je

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \lim_{x\to -1+} \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = \lim_{x\to -1+} \ln(1+x+x^2) = \ln 1 = 0.$$

Sve zajedno imamo:

$$T[f] = \sum a_n x^n,$$

gdje su koeficijenti a_n dani s (3.28), njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = [-1, 1]$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

(f) Imamo
$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \frac{1}{1+x^2} - \frac{x^2}{(1+x^2)^2}, \quad \forall x \in \mathbb{R}. \tag{3.29}$$
Odredimo Maclaurinove redove funkcija $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ i $x \mapsto \dfrac{x}{(1+x^2)^2}$. Imamo
$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$
Prema (3.15) je
$$\begin{aligned}\frac{x}{(1+x^2)^2} &= -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+x^2}\right) = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}\right) = -\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n)x^{2n-1} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n-1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.\end{aligned}$$
Stoga je
$$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} = x \cdot \frac{x}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$
Iz (3.29) i (3.26) slijedi
$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} - \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1} n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(1+n)x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$
Radijus konvergencije reda $T[f] = \sum(-1)^n(1+n)x^{2n}$ je jednak 1. Nadalje, kako red $T[f]$ u rubnim točkama intervala $\langle -1, 1\rangle$ divergira, njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \langle -1, 1\rangle$.

Sve zajedno, imamo
$$T[f] = \sum(-1)^n(1+n)x^{2n},$$
njegov interval konvergencije je $\mathcal{I} = \langle -1, 1\rangle$ i vrijedi $f(x) = T[f](x)$, za sve $x \in \mathcal{I}$.

$\triangle$

Zadatak 3.3.4. Funkciju f razvijte Taylorov red $T[f, c]$ oko točke c, ako je
$$(\mathrm{a}) f(x) := \frac{1}{(1-x)^2}, \ c = -2 \quad (b) f(x) := \frac{x+3}{x^2+3x+2}, \ c = -4 \quad (\mathrm{c}) f(x) := \frac{e^x}{x}, \ c = 1.$$

Rješenje. (a) Stavimo $y := x + 2$. Tada je $x = y - 2$, pa je
$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{1-(y-2)^2} = \frac{1}{(3-y)^2} = \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{\left(1-\frac{y}{3}\right)^2}. \tag{3.30}$$

Kako je

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad \forall t \in \langle -1, 1\rangle,$$

prema (3.15) je

$$\frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{1-t}\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)t^n, \quad \forall t \in \langle -1, 1\rangle.$$

Stoga je

$$\frac{1}{\left(1-\frac{y}{3}\right)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\left(\frac{y}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}y^n, \quad \forall y \in \langle -3, 3\rangle.$$

Iz (3.30) slijedi

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \frac{1}{9}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^n}y^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n+1}{3^{n+2}}(x+2)^n, \quad \forall x \in \langle -5, 1\rangle.$$

Dakle,

$$T[f,-2] = \sum \frac{n+1}{3^{n+2}}(x+2)^n.$$

(b) Stavimo $y := x+4$. Tada je $x = y-4$. Rastavom na parcijalne razlomke dobivamo

$$\frac{x+3}{x^2+3x+2} = \frac{x+3}{(x+1)(x+2)} = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{x+2} = \frac{2}{y-3} - \frac{1}{y-2} = -\frac{2}{3}\frac{1}{1-\frac{y}{3}} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-\frac{y}{2}}. \tag{3.31}$$

Kako je

$$\frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n, \quad \forall t \in \langle -1, 1\rangle,$$

to je

$$\frac{1}{1-\frac{y}{3}} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{3}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}y^n, \quad \forall y \in \langle -3, 3\rangle,$$

$$1-\frac{y}{2} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{y}{2}\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}y^n, \quad \forall y \in \langle -2, 2\rangle.$$

Iz (3.31) i (3.26) slijedi

$$\begin{aligned}\frac{x+3}{x^2+3x+2} &= -\frac{2}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{3^n}y^n + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}y^n = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}}\right)y^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n, \quad \forall x \in \langle -2, 2\rangle.\end{aligned}$$

Dakle,

$$T[f,-4] = \sum\left(\frac{1}{2^{n+1}} - \frac{2}{3^{n+1}}\right)(x+4)^n.$$

(c) Stavimo $y := x - 1$. Tada je $x = y + 1$. pa je

$$e^x = e^{y+1} = e \cdot e^y = e \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{y^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e}{n!} y^n, \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{1+y} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n y^n, \quad \forall y \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Prema (3.27) je

$$\frac{e^x}{x} = \frac{1}{y+1} \cdot e^{y+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{e}{k!} \cdot (-1)^{n-k} \right) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n e \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) y^n$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left((-1)^n e \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) (x-1)^n, \quad \forall x \in \langle 0, 2 \rangle.$$

Dakle,

$$T[f, 1] = \sum_{n \geq 0} \left((-1)^n e \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right) (x-1)^n$$

$\triangle$

Teorem 28. *Za svako $\alpha \in \mathbb{R}$ funkcija $f : \langle -1, +\infty \rangle \to \mathbb{R}$ definirana formulom*

$$f(x) := (1+x)^\alpha = e^{\alpha \ln(1+x)}$$

je analitička na $\langle -1, +\infty \rangle$. Njen Macalaurinov red je tzv. ***binomni red*** *i dan je s*

$$T[f] = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n, \tag{3.32}$$

gdje su $\binom{\alpha}{n}$ tzv. ***binomni koeficijenti*** *i dani su s*

$$\binom{\alpha}{0} := 1 \quad \text{i} \quad \binom{\alpha}{n} := \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}, \quad \text{za } n \in \mathbb{N}.$$

Radijus konvergencije reda (3.32) jednak je 1 i vrijedi

$$T[f](x) = f(x), \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle. \tag{3.33}$$

Napomena. Istaknimo neke binomne koeficijente koji se često javljaju:

$$\binom{-n}{k} = (-1)^k \binom{n+k-1}{k} \tag{3.34}$$

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = (-1)^{k-1} \frac{(2k-3)!!}{(2k)!!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k \cdot 2^{2k-1}} \binom{2k-2}{k-1} \tag{3.35}$$

$$\binom{-\frac{1}{2}}{k} = (-1)^k \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} = \frac{(-1)^k}{4^k} \binom{2k}{k} \tag{3.36}$$

Zadatak 3.3.5. Funkciju f razvijte u Maclaurinov red $T[f]$, ako je

$$(a) f(x) := \sqrt{1+x} \qquad (b) f(x) := \frac{1}{\sqrt{1-4x}} \qquad (c) f(x) := \operatorname{Arsh} x.$$

Rješenje. (a) Iz (3.32) i (3.35) slijedi

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Dakle,

$$T[f] = 1 + \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n \cdot 2^{2n-1}} \binom{2n-2}{n-1} x^n.$$

(b) Iz (3.32) i (3.36) slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+y}} = (1+y)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} y^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} y^n, \quad \forall y \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Stoga je

$$\frac{1}{\sqrt{1-4x}} = (1-4x)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} (-4x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n \quad \forall x \in \langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle.$$

Dakle,

$$T[f] = \sum \binom{2n}{n} x^n.$$

(c) Iz (3.32) i (3.36) slijedi

$$\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} = (1+t^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n}, \quad \forall t \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Prema (3.16) je

$$\begin{aligned} \operatorname{Arsh} x &= \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n} \binom{2n}{n} t^{2n} \right) dt \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} \binom{2n}{n} x^{2n+1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle. \end{aligned}$$

Dakle,

$$T[f] = \sum \frac{(-1)^n}{4^n(2n+1)} \binom{2n}{n} x^{2n+1}.$$

△

Zadatak 3.3.6. Izračunajte sume redova

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} \qquad \text{(b)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} \qquad (c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{3^n} \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Rješenje. (a) Definirajmo funkciju $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}. \tag{3.37}$$

Kako red $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)}$ konvergira, f je dobro definirana funkcija. Trebamo izračunati

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = f(-1).$$

Prema (3.15) je

$$f'(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n(n+1)}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}, \quad \forall t \in \langle -1, 1\rangle. \tag{3.38}$$

Istim argumentom dobivamo

$$f''(t) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} t^{n-1} = \frac{1}{1-t}, \quad \forall t \in \langle -1, 1\rangle.$$

Iz (3.37) i (3.38) slijedi $f(0) = f'(0) = 0$. Stoga je

$$f'(y) = f'(y) - f'(0) = \int_0^y f''(t)\,dt = \int_0^y \frac{1}{1-t}\,dt = -\ln(1-y), \quad \forall y \in \langle -1, 1\rangle,$$

te

$$\begin{aligned}
f(x) &= f(x) - f(0) = \int_0^x f'(y)\,dy = \int_0^x (-\ln(1-y))\,dy \\
&= \begin{bmatrix} u = -\ln(1-y) & du = \frac{dy}{1-y} \\ dv = dy & v = y \end{bmatrix} = [-y\ln(1-y)]\Big|_0^x - \int_0^x \frac{y\,dy}{1-y} \\
&- x\ln(1-x) - \int_0^x \left(\frac{1}{1-y} - 1\right) dy = -x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x \\
&= (1-x)\ln(1-x) + x, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.
\end{aligned}$$

Prema drugom Abelovom teoremu je

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} &= f(-1) = \lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} [-x\ln(1-x) + \ln(1-x) + x] \\
&= 2\ln 2 - 1.
\end{aligned}$$

(b) Definirajmo funkciju $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} x^{2n+1}.$$

Prema D'Alembertovom kriteriju f je dobro definirana funkcija. Trebamo izračunati

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} = f(1).$$

Za $x \in \mathbb{R}$ imamo

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot [(2n+1)-1]}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n+1} \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x \cdot \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ &= \frac{1}{2}(x \cos x - \sin x). \end{aligned}$$

Stoga je

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot n}{(2n+1)!} = f(1) = \frac{1}{2}(\cos 1 - \sin 1).$$

(c) Definirajmo funkciju $f : \langle -1, 1 \rangle \to \mathbb{R}$ formulom

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (n^2 + 4n + 1) x^n.$$

Primijetimo da je f dobro definirana funkcija. Naime, prema Cauchy-Hadamardovoj formuli (3.2) radijus konvergencije reda potencija jednak 1. Trebamo izračunati

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2 + 4n + 1}{3^n} = f\left(\frac{1}{3}\right).$$

Iz

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle \tag{3.39}$$

te (3.15) slijedi

$$\frac{1}{(1-x^2)} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1-x}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n x^{n-1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Stoga je

$$\frac{x}{(1-x^2)} = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle. \tag{3.40}$$

Ako deriviramo jednakost (3.40) i ponovo iskoristimo (3.15), imamo

$$\frac{1+x}{(1-x)^3} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{(1-x)^2}\right) = \frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} nx^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^{n-1}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Odavde slijedi

$$\frac{x(1+x)}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle. \tag{3.41}$$

Iz (3.39), (3.40), (3.41) te (3.26) slijedi

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} n^2 x^n + 4\sum_{n=0}^{\infty} nx^n + \sum_{n=0}^{\infty} x^n \\ &= \frac{x(1+x)}{(1-x)^3} + \frac{4x}{(1-x)^2} + \frac{1}{1-x}, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle. \end{aligned}$$

Napokon,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2+4n+1}{3^n} = f\left(\frac{1}{3}\right) = 6.$$

(d) Najprije primijetimo da je red $\sum \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!}$ konvergentan. Zaista, definirajmo niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ s

$$a_n := \frac{(2n-1)!!}{(2n!!)}$$

i provjerimo jesu li ispunjeni uvjeti Leibnizovog kriterija.

– Niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ je očito padajuć niz.
– Također vrijedi i $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. To slijedi iz nejednakosti

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \le \frac{1}{\sqrt{n}}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

koja se lako pokaže indukcijom.

Dakle, dani red je usitinu konvergentan. Iz prvog Abelovog teorema slijedi da je funkcija

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$

dobro definirana na intervalu $\langle -1, 1]$. Prema (3.32) , (3.33) i (3.36) je

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}$$
$$= 1 + f(x), \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Dakle,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1, \quad \forall x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Iz drugog Abelovog teorema slijedi

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n-1)!!}{(2n)!!} = f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x \to 1-} \left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} - 1 \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} - 1.$$

△

Zadatak 3.3.7. Izračunajte $f^{(2008)}(0)$ ako je

$$\text{(a)} f(x) := \cos(x^2) \qquad (b) f(x) := xe^{-x^3} \qquad \text{(c)} f(x) := \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Rješenje. (a) Kako je

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

to je

$$f(x) = \cos x^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{4n}}{(2n)!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Budući da je $2008 = 4 \cdot 502$, koeficijent uz x^{2008} jedank je $a_{2008} = \frac{(-1)^{502}}{(2 \cdot 502)!} = \frac{1}{1004!}$

Stoga je

$$f^{2008}(0) = 2008! \cdot a_{2008} = \frac{2008!}{1004!}$$

(b) Kako je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

to je

$$f(x) = xe^{-x^3} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{3n+1}}{n!}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Budući da je $2008 = 3 \cdot 669 + 1$, koeficijent uz x^{2008} jednak je $a_{2008} = \frac{(-1)^{669}}{669!} = -\frac{1}{669!}$.
Dakle,

$$f^{2008}(0) = 2008! \cdot a_{2008} = -\frac{2008!}{669!}.$$

(c) Kako je

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} (-1)^n x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle,$$

to je

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = x^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n+2}, \quad \forall x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Budući da je $2008 = 2 \cdot 1003 + 2$, koeficijent uz x^{2008} jednak je $a_{2008} = \dfrac{2005!!}{2006!!}$. Dakle,

$$f^{2008}(0) = 2008! \cdot a_{2008} = \frac{2008! \cdot 2005!!}{2006!!} = 2008 \cdot 2007 \cdot 2005!!^2.$$

$\triangle$

Zadatak 3.3.8. * Izračunajte sumu reda

$$\frac{0!}{4!} + \frac{4!}{8!} + \frac{8!}{12!} + \frac{12!}{16!} + \cdots$$

Rješenje. Primijetimo da je opći član a_n ($n \in \mathbb{Z}_+$) gornjeg reda oblika

$$a_n = \frac{(4n)!}{(4(n+1))!} = \frac{1}{(4n+1)(4n+2)(4n+3)(4n+4)}.$$

Kako je $(k+1)(k+2) - k(k+3) = 2$, $(k+3) - k = 3$ i $(k+2) - (k+1) = 1$, $\forall k \in \mathbb{N}$ to je

$$a_n = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+4}, \ \forall n \in \mathbb{Z}_+.$$

Primijetimo da je

$$\frac{1}{4n+j} = \int_0^1 x^{4n+j-1}\, dx, \quad \forall 1 \le j \le 4,\ n \in \mathbb{Z}_+,$$

te da red polinoma

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{6} x^{4n} - \frac{1}{2} x^{4n+1} + \frac{1}{2} x^{4n+2} - \frac{1}{6} x^{4n+3} \right)$$

uniformno konvergira na segmentu $[0,1]$ prema funkciji

$$f(x) := \frac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)}.$$

Naime, za proizvoljno $m \in \mathbb{N}$ i $x \in [0,1]$ imamo

$$\left| \sum_{n=0}^{m-1} \Big(\frac{1}{6}x^{4n} - \frac{1}{2}x^{4n+1} + \frac{1}{2}x^{4n+2} - \frac{1}{6}x^{4n+3} \Big) - \frac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)} \right| =$$

$$\frac{1}{6}\left| \frac{(1-x^{4m})(1-x)^2}{(1+x^2)(1+x)} - \frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)} \right| = \frac{1}{6}\frac{x^{4m}(1-x)^2}{(1+x^2)(1+x)} \le$$

$$\frac{1}{6}x^{4m}(1-x)^2 \overset{(\triangle)}{\le} \frac{1}{6}\Big(\frac{2m}{2m+1}\Big)^{4m} \cdot \frac{1}{(2m+1)^2} \le \frac{1}{6}\Big(\frac{2}{3}\Big)^4 \cdot \frac{1}{(2m+1)^2},$$

pri čemu nejednakost $(\triangle)$ vrijedi zato što funkcija $x \mapsto (1-x)^2 x^{4m}$ postiže maksimum na $[0,1]$ u točki $x_0 := \dfrac{2m}{2m+1}$ sa iznosom $\Big(\dfrac{2m}{2m+1}\Big)^{4m} \cdot \dfrac{1}{(2m+1)^2}$. Kako zadnja nejednakost ne ovisi o izboru $x \in [0,1]$, te kako je $\lim\limits_{m\to\infty} \dfrac{1}{(2m+1)^2} = 0$, zaključujemo da je konvergencija reda uniformna.
Napokon, računamo:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4n+4} \Big) =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \Big(\frac{1}{6}x^{4n} - \frac{1}{2}x^{4n+1} + \frac{1}{2}x^{4n+2} - \frac{1}{6}x^{4n+3} \Big)\, dx =$$

[Red polinoma $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{6}x^{4n} - \frac{1}{2}x^{4n+1} + \frac{1}{2}x^{4n+2} - \frac{1}{6}x^{4n+3} \Big)$ uniformno konvergira

na $[0,1]$ prema funkciji $x \mapsto \dfrac{(1-x)^2}{6(1+x)(1+x^2)}$, pa suma i integral komutiraju.]

$$\int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\frac{1}{6}x^{4n} - \frac{1}{2}x^{4n+1} + \frac{1}{2}x^{4n+2} - \frac{1}{6}x^{4n+3} \Big)\, dx = \frac{1}{6}\int_0^1 \frac{(1-x)^2}{(1+x)(1+x^2)}\, dx =$$

$$\frac{1}{6}\int_0^1 \Big(\frac{2}{1+x} - \frac{x+1}{1+x^2} \Big)\, dx = \frac{1}{3}\ln(1+x)\Big|_0^1 - \frac{1}{12}\ln(1+x^2)\Big|_0^1 - \frac{1}{6}\operatorname{arctg} x\,\Big|_0^1 = \frac{1}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{24}.$$

$\triangle$

Koliko je zapravo klasa analitičkih funkcija $C^\omega(I)$ istaknuta među funkcijama klase $C^\infty(I)$, zorno dočarava sljedeći teorem:

Teorem 29. ***(Teorem o jedinstvenosti analitičke funkcije)*** *Neka su $f, g \in C^\omega(I)$ dvije analitičke funkcije definirane na otvorenom intervalu I. Pretpostavimo da postoji konvergentni i injektivni niz $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ u I takav da vrijedi $x_0 := \lim\limits_{n\to\infty} a_n \in I$, te*

$$f(a_n) = g(a_n), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Tada je $f = g$, tj. vrijedi

$$f(x) = g(x), \quad \forall x \in I.$$

Zadatak 3.3.9. * Postoji li analitička funkcija $f \in C^\omega(I)$ defininrana na nekom otvorenom intervalu I oko 0 takva da vrijedi

$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1+(-1)^n}{n^3}, \quad \text{za sve } n \in \mathbb{N} \text{ takve da je } \frac{1}{n} \in I?$$

Rješenje. Pretpostavimo da takva funkcija f postoji. Tada postoji $n_0 \in \mathbb{N}$ takav da je $\frac{1}{n} \in I$, za sve $n \geq n_0$. Za $n \in \mathbb{N}$ Stavimo

$$a_n := \frac{1}{2(n_0+n)+1}.$$

Primijetimo da je $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergentan i injektivan niz u I s $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0 \in I$. Iz pretpostavke zadatka slijedi

$$f(a_n) = \frac{1+(-1)^{2(n_0+n)+1}}{[2(n_0+n)+1]^3} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Teorem o jednistvenosti analitičke funkcije povlači

$$f(x) = 0, \quad \forall x \in I,$$

što je kontradikcija s činjenicom da je $2n_0 \in I$ i

$$f\left(\frac{1}{2n_0}\right) = \frac{1+(-1)^{2n_0}}{[2n_0]^3} = \frac{1}{4n_0^3} \neq 0.$$

△

Zadaci za vježbu

3.3.10. Odredite radijus konvergencije i interval konvergencije redova potencija

(a) $\sum 2^{n^2} x^{n!}$ (b) $\sum \frac{(n!)^5}{(5n)!}(x-2)^n$ (c) $\sum_{n\geq 2} \frac{(x+1)^n}{n\ln(n!)}$

(d) $\sum \frac{(x-1)^n}{(2+(-1)^n)^n}$ (e) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(-1)^n n^2} x^n$ (f) $\sum_{n\geq 1}(2\sqrt[n]{2}-1)^n x^n$.

3.3.11. Funkciju f razvijte u Taylorov red $T[f,c]$ oko točke c, odredite njegov interval konvergencije, te izračunajte $f^{(2008)}(c)$ ako je

(a)$f(x) := \dfrac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}},\ c=0$ $(b)f(x) := \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{1+x}{1-x},\ c=0$ (c)$f(x) := \ln(x^2+x-6),\ c=2$

(d)$f(x) := \sin^4 x + \cos^4 x,\ c=1$ (e)$f(x) := \dfrac{\cos x}{x},\ c=1$ (f)$f(x) := \left(\dfrac{x}{x^2+1}\right)^3,\ c=0.$

3.3.12. Dokažite da je s

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n[(n-1)!]^2}{(2n)!} x^{2n}$$

dobro definirana funkcija $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ i odredite eksplicitnu formulu od f.

3.3.13. Izračunajte sume redova

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2+n-2}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n(2n-1)}$ (c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n(n+1)}{n!}$

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1}\frac{(2n+1)^3}{(2n+1)!}$ (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2\cdot 3^n}$ (f) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{2^n}$.

3.3.14. Nađite sve analitičke funkcije $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ za koje Maclaurinov red $T[f]$ konvergira uniformno prema f na čitavom $\mathbb{R}$.

3.3.15. Dokažite da je s

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos n^2 x}{e^n}$$

dobro definirana funkcija $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Nadalje dokažite da je $f \in C^\infty(\mathbb{R})$, te da Maclaurinov red $T[f]$ od f divergira za sve $x \neq 0$.

3.3.16. Postoji li analitička funkcija $f \in C^\omega(\mathbb{R})$ za koju vrijedi

$$\bigcup_{n=0}^{\infty}\{x \in \mathbb{R} :\ f^{(n)}(x) = 0\} = \mathbb{R}_+?$$