MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 9. rujna 2024.

Zadatak 1.

(a) (15 bodova) Neka je $f : X \to Y$ funkcija te pretpostavimo da vrijedi $S \subseteq X$ i $T \subseteq Y$. Dokažite:

$$f\left(S \cup f^{-1}(T)\right) \subseteq f(S) \cup T.$$

(b) (10 bodova) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periodična funkcija bez temeljnog perioda te pretpostavimo da je f neprekidna u 0. Dokažite da je $f(x) = c, \forall x \in \mathbb{R}$, za neki $c \in \mathbb{R}$.

Rješenje.

(a) Uzmimo $y \in f\left(S \cup f^{-1}(T)\right)$. Tada postoji $x \in S \cup f^{-1}(T)$ takav da $f(x) = y$. Dakle, vrijedi $x \in S$ ili $x \in f^{-1}(T)$. Ako je $x \in S$, tada vrijedi $y \in f(S)$. Ako je $x \in f^{-1}(T)$, tada vrijedi $y \in f(f^{-1}(T))$. Prema zadatku s vježbi (Zadatak 1.14. (b)), znamo da $f(f^{-1}(T)) \subseteq T$, pa je $y \in T$. Dakle, $y \in f(S) \cup T$.

(b) Neka je $\mathcal{T} \subseteq (0, +\infty)$ skup svih perioda te funkcije. Kako je funkcija bez temeljnog perioda, slijedi da $\inf \mathcal{T} \notin \mathcal{T}$. Ako su $\tau > \tau' \geq 0$ dva perioda funkcije f, tada vrijedi

$$f(x + \tau - \tau') = f(x + \tau - \tau' + \tau') = f(x + \tau) = f(x)$$

pa zaključujemo da je i $\tau - \tau' > 0$ opet perdiod. Neka je $(\tau_n)_n \subseteq \mathcal{T}$ padajuć niz takav da $\tau_n \to \inf \mathcal{T}$. Po prethodnoj opservaciji vrijedi $(\tau_{n+1} - \tau_n)_n \subseteq \mathcal{T}$ pa kako $\tau_{n+1} - \tau_n \to 0$, slijedi $\inf \mathcal{T} = 0$.

Označimo s $c = f(0)$. Uzmimo $z \in \mathbb{R}$ proizvoljan te pokažimo da je $f(z) = c$. Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Budući da je f neprekidna u 0, postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in (-\delta, \delta)$ vrijedi $|f(x) - c| < \varepsilon$. Neka je τ period funkcije f takav da je $0 < \tau < 2\delta$ (takav τ postoji jer je funkcija periodična, a nema temeljni period). Tada postoji $n \in \mathbb{Z}$ takav da je $z + n\tau \in (-\delta, \delta)$, pa možemo zaključiti da vrijedi:

$$|f(z) - c| = |f(z + n\tau) - c| < \varepsilon.$$

Budući da ovo mora vrijediti za sve $\varepsilon > 0$, slijedi da je $f(z) = c$. Dakle, zaključujemo da je funkcija f konstantna.

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 9. rujna 2024.

Zadatak 2.

(a) (20 bodova) Ispitajte konvergenciju i odredite limes, ako postoji, niza

$$a_1 = \frac{1}{2}; \quad a_n = \frac{2}{3 - a_{n-1}}, \quad n \geq 2.$$

(b) (5 bodova) Koristeći definiciju konvergencije niza i nejednakost $|\sin x| \leq |x|$, $x \in \mathbb{R}$, dokažite da niz $\left(\cos(2 + \frac{1}{n})\right)$ konvergira u $\cos(2)$.

Rješenje.

(a) Pokažimo indukcijom da je $a_n < 1$, za svaki $n \in \mathbb{N}$. Vrijedi $a_1 = \frac{1}{2} < 1$. Neka je $n \in \mathbb{N}$ proizvoljan. Pretpostavimo da tvrdnja za n. Tada je $3 - a_n > 2$, pa je

$$a_{n+1} = \frac{2}{3 - a_n} < 1.$$

Pokažimo sada da je niz (a_n) strogo rastući.

$$\begin{aligned} a_{n+1} > a_n &\iff \frac{2}{3 - a_n} > a_n \\ &\iff 2 > 3a_n - a_n^2 \\ &\iff a_n^2 - 3a_n + 2 > 0, \qquad \text{istina za } a_n < 1. \end{aligned}$$

Kako je niz (a_n) rastući i ograničen odozgo konvergentan je. Označimo njegov limes sa L. Vrijedi

$$L = \frac{2}{3 - L}.$$

Dakle $L^2 - 3L + 2 = 0$ i $L \leq 1$. Slijedi $L = 1$.

(b) Neka je dan $\epsilon > 0$. Uzmimo $n_\epsilon > \epsilon^{-1}$. Za svaki $n \geq n_\epsilon$ vrijedi

$$\left|\cos\left(2 + \frac{1}{n}\right) - \cos(2)\right| = \left|-2\sin\left(\frac{2 + \frac{1}{n} + 2}{2}\right)\sin\left(\frac{2 + \frac{1}{n} - 2}{2}\right)\right| \leq 2\frac{1}{2n} = \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_\epsilon} < \epsilon.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 9. rujna 2024.

Zadatak 3.

(a) (10 bodova) Odredite infimum i supremum skupa:

$$A = \left\{ \frac{n^4}{m^3 + m^2 + 7n^4} : m, n \in \mathbb{N} \right\}.$$

(b) (15 bodova) Neka su X i Y neprazni skupovi i neka je $h : X \times Y \to \mathbb{R}$ funkcija čiji je skup vrijednosti omeđen. Definirajmo:

$$f(x) = \sup\{h(x, y) : y \in Y\}, \quad g(y) = \inf\{h(x, y) : x \in X\}.$$

Dokažite da vrijedi:

$$\sup\{g(y) : y \in Y\} \leq \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

Rješenje.

(a) Vrijedi:

$$\frac{n^4}{m^3 + m^2 + 7n^4} > 0, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Za $n = 1$, imamo da:

$$\lim_{m \to +\infty} \frac{n^4}{m^3 + m^2 + 7n^4} = \lim_{m \to +\infty} \frac{1}{m^3 + m^2 + 7} = 0$$

pa je $\inf A = 0$. Za supremum, uočimo:

$$\frac{n^4}{m^3 + m^2 + 7n^4} \leq \frac{n^4}{7n^4} \leq \frac{1}{7}, \forall m, n \in \mathbb{N}.$$

Za $m = 1$ imamo da:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n^4}{m^3 + m^2 + 7n^4} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n^2}{2 + 7n^2} = \frac{1}{7}$$

pa je $\sup A = 1/7$.

(b) Budući da su skupovi $\{h(x, y) : y \in Y\}$ i $\{h(x, y) : x \in X\}$ neprazni i omeđeni podskupovi skupa $\mathbb{R}$ za svaki $x \in X$ i $y \in Y$, funkcije $f(x)$ i $g(y)$ su dobro definirane. Za svaki $y \in Y$ vrijedi $g(y) \leq h(x, y)$ za sve $x \in X$. Također, za svaki $x \in X$ vrijedi $h(x, y) \leq f(x)$ za sve $y \in Y$. Sada, uzmimo proizvoljan $x_0 \in X$. Tada za svaki $y \in Y$ vrijedi

$$g(y) \leq h\left(x_0, y\right) \leq f\left(x_0\right).$$

Budući da je $f\left(x_0\right)$ konstanta i gornja granica za skup $\{g(y) : y \in Y\}$, imamo:

$$\sup\{g(y) : y \in Y\} \leq f\left(x_0\right).$$

Ovo vrijedi za svaki $x_0 \in X$, pa je lijeva strana također konstanta i donja granica skupa $\{f(x) : x \in X\}$. Stoga zaključujemo da vrijedi:

$$\sup\{g(y) : y \in Y\} \leq \inf\{f(x) : x \in X\}.$$

MATEMATIČKA ANALIZA 1

Pismeni ispit – 9. rujna 2024.

Zadatak 4.

(a) (13 bodova) Neka je $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funkcija neprekidna u c. Dokažite da vrijedi

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in(c-\frac{1}{n},c+\frac{1}{n})} |f(x) - f(c)| = 0.$$

(b) (12 bodova) Odredite limes, ako postoji

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \sin(e^{-x}) \sin(x).$$

Rješenje.

(a) Neka je $\varepsilon > 0$ proizvoljan. Po definiciji neprekidnosti vrijedi da postoji $\delta > 0$ takav da za sve $x \in (c - \delta, c + \delta)$ vrijedi $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Neka je $n_0 := \lceil \delta^{-1} \rceil$. Tada za $n > n_0$, vrijedi

$$(c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n}) \subset (c - \delta, c + \delta)$$

pa za sve $x \in (c - \frac{1}{n}, c + \frac{1}{n})$ vrijedi $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Dakle, ε je gornja međa danog izraza pa vrijedi $\sup_{x\in(c-\frac{1}{n},c+\frac{1}{n})}|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon$ i time je tvrdnja dokazana po definiciji limesa.

(b) Zapišemo izraz u obliku

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin e^{-x}}{e^{-x}} \cdot x^2 e^{-x} \sin(x).$$

Kako je $\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$, po limesu s predavanja $\lim_{x\to 0} \frac{\sin t}{t} = 1$ slijedi da izraz $\frac{\sin e^{-x}}{e^{-x}}$ konvergira u 1. Nadalje, po rezultatu s predavanja i vježbi znamo da je $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} = 0$ pa koristeći

$$-x^2 e^{-x} \leq x^2 e^{-x} \sin(x) \leq x^2 e^{-x}$$

i teorem o sendviču slijedi $\lim_{x\to\infty} x^2 e^{-x} \sin(x) = 0$. Dakle, traženi limes je po teoremu o limesu produkta jednak 0.