MATEMATIČKE METODE FIZIKE 2

Prvi kolokvij – 16. travnja 2026.

Zadatak 1. *(ukupno 10 bodova)* Riješite jednadžbu:

$$\left(xy - \frac{1}{x}\right) dx - 2x^2 dy = 0$$

Kako se naziva ova jednadžba?

Rješenje. **(1 bod)** Kada zbrojimo stupnjeve svakog člana imamo:

$$1 + n + 1 = -1 + 1 = 2 + n$$

za $n = -2$.

(1 bod) Dakle, jednadžba je izobarna.

(4 boda) Koristimo supstituciju $y = x^{-2}v$, $dy = -2x^{-3}vdx + x^{-2}dv$:

$$\begin{aligned}
&(xx^{-2}v - x^{-1})dx - 2x^2(-2x^{-3}vdx + x^{-2}dv) = 0 \\
&(v/x - 1/x)\, dx + 4v/x\, dx - 2dv = 0 \\
&\frac{1}{x}dx = \frac{2}{5v-1}dv
\end{aligned}$$

(3 boda) Integriramo našu jednadžbu i imamo:

$$\ln|x| + C = \frac{2}{5}\ln|5v - 1| \implies 5v - 1 = Cx^{\frac{5}{2}} \implies v = \frac{1}{5} + Cx^{\frac{5}{2}}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

(1 bod) Uvrštavamo nazad:

$$y(x) = \frac{1}{5x^2} + Cx^{-2+\frac{5}{2}} = \frac{1}{5x^2} + C\sqrt{x}.$$

Zadatak 2. *(ukupno 10 bodova)* Riješite jednadžbu razvojem u red oko 0:

$$xy''(x) + 2y'(x) + xy(x) = 0.$$

Podsjetnik: $1! = 1$, $3! = 6$, $5! = 120$, $7! = 5040$.

Rješenje. **(1 bod)** Neka je $y(x) =: \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$. Onda je $y' = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1}$, $y'' = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2}$.
(4 boda) Uvrštavamo u početnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
0 &= x\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-2} + 2\sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} + x\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \\
0 &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^{k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} \\
0 &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} + \sum_{k=1}^{\infty} 2k a_k x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-1} \\
0 &= 2a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} 2k a_k x^{k-1} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k-1} \\
0 &= 2a_1 + \sum_{k=2}^{\infty} x^{k-1}(a_k(k^2+k) + a_{k-2})
\end{aligned}$$

(1 bod) Sada zbog jedinstvenosti razvoja imamo da je $a_1 = 0$ i da vrijedi relacija:

$$a_k = -\frac{a_{k-2}}{k^2+k}, \quad \forall k \geq 2.$$

(2 boda) Proučavamo prvih par članova u ovisnosti o a_0. Primjećujemo da su svi neparni članovi jednaki 0, a za parne imamo:

$$a_2 = -\frac{a_0}{6}, \quad a_4 = -\frac{a_2}{20} = \frac{a_0}{120}, \quad a_6 = -\frac{a_4}{42} = -\frac{a_0}{5040}.$$

Indukcijom se lako pokaže $a_{2k} = (-1)^k \frac{a_0}{(2k+1)!}$.
(1 bod) Kandidat za rješenje je onda:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k} x^{2k} = a_0 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k+1)!} = \frac{a_0}{x} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = \frac{a_0}{x}\sin(x).$$

(1 bod) Provjeravamo; imamo $y'(x) = -\frac{a_0}{x^2}\sin(x) + \frac{a_0}{x}\cos(x)$ i $y''(x) = \frac{2a_0}{x^3}\sin(x) - 2\frac{a_0}{x^2}\cos(x) - \frac{a_0}{x}\sin(x)$.
Uvrštavamo:

$$\frac{2a_0}{x^2}\sin(x) - 2\frac{a_0}{x}\cos(x) - a_0\sin(x) - 2\frac{a_0}{x^2}\sin(x) + 2\frac{a_0}{x}\cos(x) + a_0\sin(x) = 0$$

Zaista, radi se o rješenju dane jednadžbe.

Zadatak 3. *(ukupno 10 bodova)* Frobeniusovom metodom razvijte rješenje dane jednadžbe na prva tri nenul koeficijenta u ovisnosti o a_0 ($r=-1$):

$$xe^{-x}y''(x) - y'(x) - \frac{3}{x}y(x) = 0.$$

Rješenje. **(1 bod)** Prvo svodimo na kanonski oblik $y''(x) - x^{-1}e^x y'(x) - 3x^{-2}e^x y(x) = 0$ i zaključujemo $P(x) = -\frac{e^x}{x}$, $Q(x) = -3\frac{e^x}{x^2}$.
(1 bod) Provjera da jednadžba ima regularni singularitet u $x=0$.
(1 bod) Razvijamo u red:

$$xP(x) = -e^x = \sum_{k=0}^{\infty} -\frac{x^k}{k!}, \quad x^2Q(x) = -3e^x = \sum_{k=0}^{\infty} -3\frac{x^k}{k!}$$

i zaključujemo $p_k = -\frac{1}{k!}$, $q_k = -\frac{3}{k!}$ za sve $k \in \mathbb{N}_0$.
(1 bod) Rješavanjem indicijske jednadžbe $0 = f_0(r) = r^2 - (1+1)r - 3 = (r+1)(r-3)$ imamo rješenja -1, 3.
(5 bodova) Računamo koeficijente za $r=-1$ iz $f_k(r) = -\frac{r}{k!} - \frac{3}{k!} = -\frac{2}{k!}$ i formula:

$$f_0(r+1)a_1 + f_1(r)a_0 = 0 \implies -3a_1 - 2a_0 = 0 \implies a_1 = -\frac{2}{3}a_0$$

$$f_0(r+2)a_2 + f_1(r+1)a_1 + f_2(r)a_0 = 0 \implies -4a_2 - 3a_1 - a_0 = 0 \implies a_2 = -\frac{1}{4}(3a_1 + a_0) = \frac{1}{4}a_0$$

(1 bod) Sada imamo:

$$y(x) = a_0 x^{-1}\left(1 - \frac{2}{3}x + \frac{1}{4}x^2 + \dots\right).$$

Zadatak 4. *(ukupno 10 bodova)* Riješite jednadžbu:

$$y'' - 2y' + y = x\cos x.$$

Rješenje. **(1 bod)** Opće rješenje je oblika $y = y_H + y_P$, pri čemu je y_H rješenje pripadajuće homogene jednadžbe, a y_P partikularno rješenje.
(2 boda) Rješenje homogene jednadžbe dobija se iz karakterističnog polinoma $k(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2$. Dakle, $y_H(x) = C_1e^x + C_2xe^x$.
(2 boda) Desna strana jednadžbe je $e^{0x}(x\cos 1x + 0\sin 1x)$ pa je y_P oblika $x^0e^{0x}((Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x) = (Ax+B)\cos x + (Cx+D)\sin x$ jer $0+i$ nije nultočka karakterističnog polinoma.
(3 boda) Uvrštavamo partikularno rješenje u početnu jednadžbu:

$$\begin{aligned}
y_P'(x) &= A\cos x - (Ax+B)\sin x + C\sin x + (Cx+D)\cos x \\
y_P''(x) &= -2A\sin x - (Ax+B)\cos x + 2C\cos x - (Cx+D)\sin x \\
&= (-Cx - D - 2A)\sin x + (-Ax - B + 2C)\cos x \\
x\cos x = y_P'' - 2y_P' + y_P &= (2Ax - 2A + 2B - 2C)\sin x + ((-2C)x + 2C - 2A - 2D)\cos x.
\end{aligned}$$

(1 boda) iz koje imamo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases}
2A &= 0 \\
-2A + 2B - 2C &= 0 \\
-2C &= 1 \\
2C - 2A - 2D &= 0
\end{cases}$$

pa je $A = 0$, $B = C = D = -\frac{1}{2}$.
(1 bod) Konačno rješenje je:

$$y = y_H + y_P = C_1e^x + C_2xe^x - \frac{1}{2}\cos x - \frac{1}{2}(1+x)\sin x.$$

Zadatak 5. *(ukupno 10 bodova)* Riješite jednadžbu:

$$y' = y^2 - x^2 + 1,$$

ako je poznato da je jedno rješenje $y = x$. Kako se zove ovaj tip jednadžbe?

Rješenje. Ovo je Riccatijeva jednadžba.

Koristimo supstituciju: y = x + u uz

$$u' = u^2 + (2x + 0)u = u^2 + 2xu.$$

Sada smo dobili Bernoullijevu jednadžbu, pa koristimo supstituciju $v = u^{-1}$ te dobijemo

$$v' = -u^{-2}u' = -(1 + 2xv) = -2xv - 1.$$

Sada smo dobili nehomogenu linearnu ODJ prvog reda:

$$v' + 2xv = -1.$$

Prvo rješavamo pripadnu homogenu jednadžbu:

$$v' + 2xv = 0.$$

To je separabilna jednažba, pa dobivamo:

$$\frac{dv}{v} = -2xdx,$$

tj. $v = Ce^{-x^2}$.

Za rješenje nehomogene jednadžbe, tražimo rješenje u obliku $v = C(x)e^{-x^2}$.

Sada je $v'(x) = C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x)$, pa slijedi:

$$C'(x)e^{-x^2} + C(x)e^{-x^2}(-2x) + 2xC(x)e^{-x^2} = -1,$$

tj.

$$e^{-x^2}C'(x) = -1.$$

Konačno,

$$C(x) = -\int e^{t^2}dt + C.$$

Dakle, $v = -e^{-x^2}(\int e^{t^2}dt + C)$, pa je $u = (-e^{-x^2}(\int e^{t^2}dt + C))^{-1}$ te je

$$y = x + \left(-e^{-x^2}\left(\int e^{t^2}dt + C\right)\right)^{-1}.$$

<u>Drugi način rješavanja linearne jednadžbe.</u> Integrirajući faktor je

$$\mu(x) = e^{\int 2t\,dt} = e^{x^2}.$$

Množenjem jednadžbe s e^{x^2} dobivamo

$$(e^{x^2}v)' = -e^{x^2}.$$

Integriranjem slijedi

$$e^{x^2}v = C - \int e^{t^2}\,dt,$$

odnosno

$$v = e^{-x^2}\left(C - \int e^{t^2}\,dt\right).$$

Kako je $u = \frac{1}{v}$, imamo

$$u = \frac{e^{x^2}}{C - \int e^{t^2}\,dt}.$$

Konačno,

$$y = x + u,$$

pa je opće rješenje

$$y(x) = x + \frac{e^{x^2}}{C - \int e^{t^2}\,dt}.$$

(Budući da je pri supstituciji $v = u^{-1}$ pretpostavljeno $u \neq 0$, dodatno rješenje je

$$y(x) = x,$$

koje je već dano.)