

Za linearnu ODJ 1. reda  $y' + p(x)y = q(x)$ , integrirajući faktor i rješenje dani su s:

$$\alpha = \exp\left(\int p(X)dX\right), \quad y(x) = \frac{1}{\alpha(x)}\left(\int \alpha(X)q(X)dX + C\right).$$

---

Taylorovi redovi nekih osnovnih funkcija:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}, \quad \cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}, \quad \sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}, \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^{\infty} x^k, \quad \ln(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k}.$$

---

Frobeniusova metoda:

$$f_0(r) = r^2 - (1-p_0)r + q_0, \quad f_k(r) = rp_k + q_k, \quad k \geq 1$$

pri čemu je  $xP(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k$  i  $x^2Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k$ . Uz indicijsku jednadžbu  $f_0(r) = 0$ , koeficijenti se dobivaju iz:

$$f_0(r_{1,2} + k)a_k^{1,2} + f_1(r_{1,2} + k - 1)a_{k-1}^{1,2} + \dots + f_{k-1}(r_{1,2} + 1)a_1^{1,2} + f_k(r_{1,2})a_0^{1,2} = 0.$$

Ako za rješenja indicijske jednadžbe  $r_{1,2}$  vrijedi:

1.  $r_1 - r_2 \notin \mathbb{Z}$ , rješenja su oblika:

$$y_{1,2}(x) = x^{r_{1,2}} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^{1,2} x^k$$

2.  $r_1 - r_2 \in \mathbb{Z}$ ,  $r_1 > r_2$ , rješenja su oblika:

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k^1 x^k, \quad y_2(x) = C y_1(x) \ln|x| + x^{r_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k$$

---

Za linearnu nehomogenu jednadžbu s konstantnim koeficijentima čija je desna strana funkcija oblika:

$$e^{\alpha x}(P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$$

pri čemu je  $P$  polinom stupnja  $n$ , a  $Q$  stupnja  $m$ , ima partikularno rješenje oblika:

$$y_P(x) = x^r e^{\alpha x}(T_k(x) \cos \beta x + R_k(x) \sin \beta x)$$

pri čemu su  $T_k, R_k$  polinomi stupnja najviše  $k := \max\{n, m\}$ , a  $r$  je kratnost nultočke  $\alpha + \beta i$  karakterističnog polinoma pripadajuće homogene jednadžbe ( $r = 0$  ako se ne radi o nultočki).

---

U Bernoullijevoj jednadžbi  $y' = Py + Qy^n$  koristimo supstituciju  $u = y^{1-n}$  i time dobivamo novu jednadžbu:

$$(u(x)P(x) + Q(x))dx - du = 0.$$

U Riccatijevoj jednadžbi  $y' = Py^2 + Qy + R$  uz partikularno rješenje  $y_0$ , opće rješenje je  $y = y_0 + u$ , pri čemu je  $u$  rješenje Bernoullijeve jednadžbe:

$$u' = Pu^2 + (2Py_0 + Q)u.$$