

Matematika 1 za kemičare

prototip pismenih ispita (ak.g. 2025./26.)

Marin Varivoda & Franka Miriam Brückler

Napomene.

Svaki zadatak nosi po 20 bodova.

Dopuštena pomagala na ispitu su isključivo: kalkulator (bez mogućnosti pristupa internetu), jedan A4-list papira s vlastoručno ispisanim formulama po vlastitom izboru, pribor za pisanje i crtanje.

1. Zadatak iz osnovno- i srednjoškolskog gradiva, uključivo kompleksnih brojeva i elementarnih funkcija

Vinar Krešo iz Gornjeg Dragonošća je za vrijeme veselice u čast dobiti od 30 € na 100 prodanih boca vina tijekom prošlog mjeseca (po cijeni od 20 €/boca) pokušao izračunati koliko bi zaradio ako bi ih prodao 600 po cijeni od 24 €/boca. Ujutro, mamuran, shvatio je da zadatak baš i nema smisla jer potražnja u pravilu pada s cijenom pa teško da bi povećanjem cijene prodao više vina. Kad se popodne sasvim otrijeznio i pogledao u poslovne knjige, shvatio je i da je u proizvodnji imao i fiksne mjesečne troškove održavanja vinarije 770 € neovisne o broju proizvedenih i prodanih boca vina te da je prethodni mjesec prodao 112 boca vina po cijeni od 17 €. Ako znate da se ovisnost potražnje o cijeni može modelirati (padajućom) afinom funkcijom, po kojoj cijeni Krešo treba prodavati vino da ostvari maksimalni profit? Koliko iznosi taj profit? Koliko boca vina će u tom slučaju prodavati mjesečno?

2. Zadatak vezan za tok funkcije, limese i deriviranje, sa ili bez geometrijskog konteksta

Zadane su funkcije $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ i $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sa

$$f(x) := \sqrt{2} \sin(x) - x, \quad g(x) := \sqrt{2} \sin(x) + x.$$

Skicirajte grafove funkcija f i g . Odredite sve realne brojeve t sa svojstvom da je tangenta na graf funkcije f povučena u točki $(t, f(t))$ okomita na tangentu na graf funkcije g povučenu u točki $(t, g(t))$.

3. Zadatak s integralima, sa ili bez geometrijskog konteksta

Izračunajte integrale:

(a) $\int \frac{\operatorname{arctg} x}{\sqrt{(1+x^2)^3}} dx$

(b) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2 + 2x + 2} dx$

4. Zadatak iz analitičke geometrije prostora i(li) klasične algebre vektora

Zadani su pravac p i ravnina π :

$$p \dots \frac{x-5}{-1-\lambda} = \frac{y-10}{1+\lambda} = \frac{z+\lambda}{1}, \quad \pi \dots (1+\lambda)x + (1+\lambda)y + (-1+\lambda)z = -6.$$

- (a) Odredite $\lambda \in \mathbb{R}$ takav da su pravac p i ravnina π ortogonalni.
- (b) Za vrijednost λ iz (a), nađite dvije točke na p koje su za točno 2 udaljene od ravnine π .

5. (20) Zadatak s kontekstom iz mješovitog gradiva Matematike 1

Kao jedan od osnovnih vjerojatnosnih modela u predviđanju rezultata nogometnih utakmica koristi se tzv. Poissonova razdioba. Prema istoj, vjerojatnost da će momčad koja prosječno daje $m \in \mathbb{R}$ pogodaka po utakmici, na sljedećoj utakmici u vremenu t (t ide od početka utakmice, $t = 0$, do kraja utakmice, $t = 1$, tj. kao jedinicu vremena uzimamo nepreciznu jedinicu „utakmica“) dati točno n pogodaka računa se kao

$$p_n(t) = \exp(-mt) \cdot \frac{(mt)^n}{n!} \quad (n \in \mathbb{N}_0).$$

Danas popodne susrest će se momčad $\heartsuit$ za koju navijate s momčadi $\diamondsuit$. Momčad $\heartsuit$ je u posljednjih godinu dana odigrala 13 utakmica na kojima je dala ukupno 23 pogotka (u regularnim dijelovima utakmica).

- (a) Koliko iznosi vjerojatnost da na poluvrijeme $\heartsuit$ ode s najviše dva dana pogotka? (Ako se neki događaji ne mogu istovremeno dogoditi, vjerojatnost da se bar jedan od njih dogodi računa se kao zbroj vjerojatnosti tih događaja.)
- (b) Skicirajte grafove funkcija p_n za $\heartsuit$ danas, za $n = 0, 1, 2, 3, 4$ (svih pet u istom pravokutnom koordinatnom sustavu). U kojem trenutku utakmice se za svaki od tih n postiže maksimalna vjerojatnost i koliko ona iznosi? Koji je najvjerojatniji broj pogodaka koje će dati $\heartsuit$ danas? Nakon koliko vremena će postati vjerojatnije da će $\heartsuit$ dati gol nego da neće?