Matematika 2 za kemičare

Rješenja pismenog ispita od 27. kolovoza 2025.

Matea Čelar & Franka Miriam Brückler

1. (20) Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je sa

$$A(x, y, z) = (2y + z - x, 2y + z, z),$$

a linearni operator $B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ zadan je sa

$$B := 2A^{-1} + A.$$

(a) (6) Odredite matricu operatora B s obzirom na kanonsku bazu prostora $\mathbb{R}^3$.

(b) (7) Odredite matricu kompozicije $B \circ A$ s obzirom na bazu

$$f = \big((1, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\big).$$

(c) (7) Odredite spektar operatora A. Za svaku svojstvenu vrijednost odredite pripadne svojstvene vektore.

Rješenje.

(a) Matrica operatora A s obzirom na kanonsku bazu je

$$[A]_e = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica operatora B je tada

$$[B]_e = 2[A]_e^{-1} + [A]_e = 2\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

(b) Matrica od $B \circ A$ s obzirom na kanonsku bazu je

$$[B \circ A]_e = [B]_e[A]_e = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Matrica prijelaza i njen inverz su

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pa je

$$[B \circ A]_f = T^{-1}[B \circ A]_e T = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(c) Pripadni svojstveni polinom je

$$k_A(\lambda) = \det([A]_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda).$$

Spektar se sastoji od nultočaka svojstvenog polinoma, pa je $\sigma(A) = \{1, 2, -1\}$. Pripadni svojstveni vektori su:

- za $\lambda = 1$: $\left\{(\frac{1}{2}t, t, -t) \ : \ t \in \mathbb{R}\right\}$
- za $\lambda = 2$: $\left\{(\frac{2}{3}t, t, 0) \ : \ t \in \mathbb{R}\right\}$
- za $\lambda = -1$: $\{(t, 0, 0) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$.

2. (20) Riješite zadaću

$$\begin{cases} y'' - y = te^t + 1 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \frac{1}{4}. \end{cases}$$

Rješenje. Zadana jednadžba je linearna diferencijalna jednadžba drugog reda s konstantnim koeficijentima. Najprije tražimo rješenje pripadne homogene jednadžbe $y'' - y = 0$. Rješenja pripadne karakteristične jednadžbe su ± 1, pa je homogeno rješenje

$$y_H = C_1 e^t + C_2 e^{-t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Sada tražimo partikularno rješenje jednadžbe $y'' + y = te^t$ u obliku $y_{P_1} = (At + B)e^t$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo

$$(At + 2A + B)e^t - (At + B)e^t = te^t,$$

što nije moguće. Zatim pokušamo sa $y_{P_1} = (At^2 + Bt)e^t$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu dobivamo

$$(At^2 + (4A + B)t + 2A + 2B)e^t - (At^2 + Bt)e^t = te^t,$$

odakle rješavanjem sustava slijedi $A = \frac{1}{4}$, $B = -\frac{1}{4}$. Dakle, $y_{P_1} = (\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t)e^t$.

Drugo partikularno rješenje je rješenje jednadžbe $y'' - y = 1$. Ono tražimo u obliku $y_{P_2} = C$, $C \in \mathbb{R}$. Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu slijedi $0 - C = 1$, tj. $C = -1$, pa je $y_{P_2} = -1$. Konačno, opće rješenje polazne jednadžbe je

$$y = y_H + y_{P_1} + y_{P_2} = C_1 e^t + C_2 e^{-t} + \frac{1}{4}(t^2 - t)e^t - 1, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Uvrštavanjem početnih uvjeta $y(0) = 0$ i $y'(0) = \frac{1}{4}$ dobivamo sustav

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ C_1 - C_2 = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

čije rješenje je $C_1 = \frac{1}{3}$, $C_2 = \frac{1}{4}$. Dakle, rješenje zadaće je

$$y(t) = \frac{3}{4}e^t + \frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}(t^2 - t)e^t - 1.$$

3. (20) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^3 + 2y^2 + z^2 - xy - 2z.$$

(a) (12) Odredite i klasificirajte sve stacionarne točke funkcije f.

(b) (8) Izračunajte krivuljni integral

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s,$$

pri čemu je $\gamma : [0, 1] \to \mathbb{R}^3$, $\gamma(t) = (t, t, t)$.

Rješenje.

(a) Izjednačavanjem parcijalnih derivacija funkcije f,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 3x^2 - y, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 4y - x \quad \text{i} \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = 2z - 2,$$

s nulom dobivamo sustav

$$\begin{cases} 3x^2 - y = 0 \\ 4y - x = 0 \\ 2z - 2 = 0. \end{cases}$$

Iz treće jednadžbe slijedi $z = 1$, a iz prve $y = 3x^2$, pa uvrštavanjem u drugu jednadžbu $x(12x - 1) = 0$, tj. $x = 0$ ili $x = \frac{1}{12}$. Dakle, stacionarne točke su $(0, 0, 1)$ i $(\frac{1}{12}, \frac{1}{48}, 1)$.

Hesseova matrica je

$$(Hf)(x, y, z) = \begin{pmatrix} 6x & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

U točki $(0, 0, 1)$ pripadne minore su $A_1 = 0$, $A_2 = -1$, $A_3 = -2$, pa za tu točku test ne daje odluku. U točki $(\frac{1}{12}, \frac{1}{48}, 1)$ minore su $A_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = 1$ i $A_3 = 2$, pa je ova točka lokalni minimum.

(b) Imamo $\gamma'(t) = (1, 1, 1)$ i $\|\gamma'(t)\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3}$. Dakle

$$\int_\gamma f \, \mathrm{d}s = \int_0^1 f(\gamma(t)) \|\gamma'(t)\| \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{3}(t^3 + 2t^2 - 2t) \, \mathrm{d}t =$$

$$= \sqrt{3} \left(\frac{t^4}{4} + \frac{2t^3}{3} - t^2 \right) \Bigg|_{t=0}^{t=1} = -\frac{\sqrt{3}}{12}.$$

4. (20) Izračunajte integral

$$\int_S xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z,$$

pri čemu je

$$S \ldots \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 2 \\ 0 \leq z \leq x^2 + y^2 \\ xyz \geq 0. \end{cases}$$

Rješenje. Prikažimo zadani skup u cilindričnim koordinatama. Iz $x^2 + y^2 \leq 2$ slijedi $r^2 \leq 2$, tj. $0 \leq r \leq \sqrt{2}$. Iz druge jednadžbe slijedi $0 \leq z \leq r^2$. Kako je $z \geq 0$, iz treće jednadžbe slijedi $xy \geq 0$, tj. x i y su istog predznaka. Dakle, promatramo prvi i treći kvadrant u xy-ravnini, pa je $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}] \cup [\pi, \frac{3\pi}{2}]$.

Računamo:

$$\begin{aligned}
\int_S xyz \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r^2} r^3 \cos\varphi \sin\varphi z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r + \int_0^{\sqrt{2}} \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \int_0^{r^2} r^3 \cos\varphi \sin\varphi z \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^3 \cos\varphi \sin\varphi \left. \frac{z^2}{2} \right|_{z=0}^{z=r^2} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r + \int_0^{\sqrt{2}} \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r^3 \cos\varphi \sin\varphi \left. \frac{z^2}{2} \right|_{z=0}^{z=r^2} \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} r^7 \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r + \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} r^7 \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^{\sqrt{2}} r^7 \, \mathrm{d}r \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi + \int_\pi^{\frac{3\pi}{2}} \cos\varphi \sin\varphi \, \mathrm{d}\varphi \right) \\
&= \frac{1}{2} \left(\left. \frac{r^8}{8} \right|_{r=0}^{r=\sqrt{2}} \right) \left(\int_0^1 u \, \mathrm{d}u - \int_{-1}^0 u \, \mathrm{d}u \right) = 1.
\end{aligned}$$