

Matematika 2 za kemičare

Rješenja pismenog ispita od 4. veljače 2026.

1. (20) Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadan je svojom matricom u kanonskoj bazi

$$[A]_e = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

- (a) (6) Dokažite da je $f = ((1, 0, 1), (1, -1, 0), (1, 0, 0))$ baza prostora $\mathbb{R}^3$.
- (b) (7) Odredite matricu operatora A s obzirom na bazu f iz podzadatka (a).
- (c) (7) Odredite spektar operatora A . Za neku svojstvenu vrijednost (po vlastitom izboru) odredite pripadne svojstvene vektore.

Rješenje.

- (a) Zapišimo matricu čiji stupci su vektori iz skupa f :

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vrijedi

$$\det T = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

pa su vektori linearno nezavisni i čine bazu prostora $\mathbb{R}^3$.

- (b) Matrica T je matrica prijelaza iz baze f u kanonsku bazu. Njen inverz je

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Računamo:

$$\begin{aligned} [A]_f &= T^{-1}[A]_e T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

- (c) Karakteristični polinom je

$$\det([A]_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 4) = 0.$$

Svojstvene vrijednosti su

$$\sigma(A) = \left\{ 2, \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2} \right\}.$$

Za $\lambda = 2$ pripadne svojstvene vektore dobivamo rješavanjem sustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1-2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2-2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Rješenja su $\{(2t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

2. (20) Odredite sva rješenja diferencijalne jednadžbe

$$t^2 y' = y(t - y).$$

Rješenje. Uvodimo supstituciju

$$u = \frac{y}{t}, \quad y' = u't + u.$$

Uvrštavanjem u polaznu jednadžbu slijedi

$$u' = -\frac{u^2}{t}.$$

Jednadžbu rješavamo metodom separacije varijabli. Imamo

$$\frac{du}{dt} = -\frac{u^2}{t} \quad \implies \quad \frac{du}{u^2} = -\frac{dt}{t}.$$

Dijelili smo s u^2 , pa je $u = 0$ kandidat za singularno rješenje. Direktnim uvrštavanjem vidimo da je i $u = 0$, tj. $y = 0$ rješenje polazne jednadžbe.

Nakon integriranja dobivamo

$$\frac{1}{u} = \ln |t| + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Vraćanjem supstitucije $u = \frac{y}{t}$ slijedi

$$y(t) = \frac{t}{\ln |t| + C}, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Dakle, sva rješenja polazne diferencijalne jednadžbe su

$$y(t) = 0 \quad \text{ili} \quad y(t) = \frac{t}{\ln |t| + C}, \quad C \in \mathbb{R},$$

3. (20) Odredite i klasificirajte stacionarne točke funkcije $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = x^2 - 2xy + 2y^2 + 2y + \ln(1 + z^2).$$

Rješenje. Izračunajmo parcijalne derivacije:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x + 4y + 2, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{2z}{1 + z^2}.$$

Stacionarne točke zadovoljavaju sustav

$$\begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ -2x + 4y + 2 = 0 \\ \frac{2z}{1 + z^2} = 0. \end{cases}$$

Iz prve jednačbe slijedi $x = y$. Uvrštavanjem u drugu dobivamo $y = -1$, pa je $x = -1$. Treća jednačba daje $z = 0$.

Dakle, jedina stacionarna točka funkcije f je

$$T = (-1, -1, 0).$$

Pripadna Hesseova matrica je

$$H_f(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-2z^2+2}{(1+z^2)^2} \end{pmatrix}.$$

U stacionarnoj točki T vrijedi

$$H_f(-1, -1, 0) = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Imamo

$$A_1 = 2 > 0, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 4 > 0, \quad A_3 = 2 \cdot A_2 = 8 > 0.$$

Dakle, funkcija f ima jednu stacionarnu točku $T = (-1, -1, 0)$ i ta je točka lokalni minimum.

4. (20) Izračunajte integral

$$\int_S (x + y + z) \, dx \, dy \, dz,$$

pri čemu je skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zadan s

$$S \dots \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 3 \\ x \geq 0 \\ |z| \leq 1. \end{cases}$$

Rješenje. Prikaz skupa S cilindričnim koordinatama je

$$S \dots \begin{cases} 0 \leq r \leq \sqrt{3} \\ -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ -1 \leq z \leq 1. \end{cases}$$

Dakle,

$$\begin{aligned} \int_S (x + y + z) \, dx \, dy \, dz &= \int_{-1}^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}} (r \cos \varphi + r \sin \varphi + z) \cdot r \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}} r^2 (\cos \varphi + \sin \varphi) \, dr \, d\varphi \, dz + \int_{-1}^1 \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \int_0^{\sqrt{3}} r z \, dr \, d\varphi \, dz \\ &= 2 \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\cos \varphi + \sin \varphi) \, d\varphi \right) \left(\int_0^{\sqrt{3}} r^2 \, dr \right) + \left(\int_{-1}^1 z \, dz \right) \cdot \pi \cdot \left(\int_0^{\sqrt{3}} r \, dr \right) \\ &= \dots = 4\sqrt{3}. \end{aligned}$$

5. (20) Dvije funkcije stanja X i Y definirane su s

$$X = \left(\frac{\partial Z}{\partial W} \right)_V, \quad Y = \left(\frac{\partial V}{\partial Z} \right)_W.$$

- (a) (2) Koje su varijable funkcije V ?
- (b) (4) Zapišite diferencijal dV preko diferencijala tih varijabli, tako da odgovarajuće koordinatne funkcije uz diferencijale varijabli budu funkcije od X i Y .
- (c) (4) Što možete reći o ovisnosti X o W pri konstantnom V ako biste znali da je Z konveksna funkcija od W kad je V konstantan?
- (d) (10) Pokažite da V zadovoljava sljedeću jednadžbu:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial W \partial Z} + X \cdot \left(\frac{\partial^2 V}{\partial Z^2} \right)_W = 0.$$