

Matematika 2 za kemičare

Rješenja pismenog ispita od 18. veljače 2026.

1. (20) Linearni operator $A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ zadan je svojom matricom u kanonskoj bazi

$$[A]_e = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

- (a) (5) Izračunajte $A(x, y, z)$ za $x, y, z \in \mathbb{R}$.
- (b) (8) Odredite matricu operatora A s obzirom na bazu $f = ((1, 0, -1), (1, 0, 0), (1, 1, 1))$.
- (c) (7) Odredite spektar operatora A . Za neku svojstvenu vrijednost (po vlastitom izboru) odredite pripadne svojstvene vektore.

Rješenje.

(a) Imamo

$$[A(x, y, z)]_e = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x + 2z \\ x + 2y + 2z \\ 3x + 3z \end{pmatrix}.$$

Dakle, $A(x, y, z) = (3x + 2z, x + 2y + 2z, 3x + 3z)$.

(b) Matrica prijelaza i njen inverz su

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

pa je

$$[A]_f = T^{-1}[A]_e T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

(c) Karakteristični polinom je

$$\det([A]_e - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 2 \\ 1 & 2 - \lambda & 2 \\ 3 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)((3 - \lambda)^2 - 6) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 3).$$

Svojstvene vrijednosti su njegove nultočke:

$$\sigma(A) = \{2, 3 \pm \sqrt{6}\}.$$

Za $\lambda = 2$ pripadne svojstvene vektore dobivamo rješavanjem sustava

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3-2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2-2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3-2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \dots \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Rješenja su $\{(0, t, 0) : t \in \mathbb{R}\}$.

2. (20) Odredite sva rješenja diferencijalne jednačbe

$$y'' - 2y' + 5y = 5t^2 + 1.$$

Rješenje. Najprije promatramo pripadnu homogenu jednačbu

$$y'' - 2y' + 5y = 0.$$

Pripadna karakteristična jednačba glasi

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

i njena rješenja su

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-16}}{2} = 1 \pm 2i.$$

Opće rješenje pripadne homogene jednačbe je tada

$$y_H(t) = e^t (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t), \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}.$$

Desna strana jednačbe je polinom drugog stupnja, pa partikularno rješenje tražimo u obliku

$$y_P(t) = At^2 + Bt + C.$$

Izračunajmo derivacije:

$$y'_P(t) = 2At + B, \quad y''_P(t) = 2A.$$

Uvrštavanjem u polaznu jednačbu dobivamo

$$2A - 2(2At + B) + 5(At^2 + Bt + C) = 5t^2 + 1.$$

Sređivanjem:

$$5At^2 + (-4A + 5B)t + (2A - 2B + 5C) = 5t^2 + 1.$$

Izjednačavanjem koeficijenata uz odgovarajuće potencije od t dobivamo sustav:

$$\begin{cases} 5A = 5, \\ -4A + 5B = 0, \\ 2A - 2B + 5C = 1, \end{cases}$$

čije rješenje je

$$A = 1, \quad B = \frac{4}{5}, \quad C = \frac{3}{25}.$$

Dakle, partikularno rješenje je

$$y_P(t) = t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{3}{25}.$$

Konačno, opće rješenje polazne diferencijalne jednačbe je

$$y(t) = y_H(t) + y_P(t) = e^t (C_1 \cos 2t + C_2 \sin 2t) + t^2 + \frac{4}{5}t + \frac{3}{25}$$

pri čemu su $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$.

3. (20) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$f(x, y, z) = (x^2 - y^2)e^x + \cos z.$$

(a) (14) Odredite sve stacionarne točke i Hesseovu matricu funkcije f .

(b) (6) Za koje vrijednosti parametra c skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$S \dots f(x, y, z) = c,$$

jest, a za koje nije ploha? Obrazložite svoj odgovor.

Rješenje.

(a) Najprije izračunamo prve parcijalne derivacije od f :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = e^x(x^2 - y^2 + 2x), \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = -2ye^x, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -\sin z.$$

Stacionarne točke su rješenja sustava $\nabla f(x, y, z) = 0$, odnosno

$$\begin{cases} e^x(x^2 - y^2 + 2x) = 0, \\ -2ye^x = 0, \\ -\sin z = 0. \end{cases}$$

Budući da je $e^x \neq 0$ za sve $x \in \mathbb{R}$, sustav je ekvivalentan

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 2x = 0, \\ y = 0, \\ \sin z = 0. \end{cases}$$

Uvrštavanjem $y = 0$ u prvu jednadžbu slijedi

$$x^2 + 2x = 0 \iff x(x + 2) = 0 \iff x = 0 \text{ ili } x = -2.$$

Treća jednadžba daje

$$z = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Stoga su sve stacionarne točke

$$\boxed{\{(0, 0, k\pi), (-2, 0, k\pi) : k \in \mathbb{Z}\}}.$$

Hesseova matrica funkcije f u točki (x, y, z) glasi:

$$(Hf)(x, y, z) = \begin{pmatrix} e^x(x^2 - y^2 + 4x + 2) & -2ye^x & 0 \\ -2ye^x & -2e^x & 0 \\ 0 & 0 & -\cos z \end{pmatrix}.$$

(b) Skup S je ploha ako ne sadrži nijednu stacionarnu točku funkcije f .

Iz (a) dijela znamo da su stacionarne točke

$$(0, 0, k\pi) \quad \text{i} \quad (-2, 0, k\pi), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Izračunajmo vrijednosti funkcije u tim točkama:

$$f(0, 0, k\pi) = 0 + \cos(k\pi) = \pm 1,$$

$$f(-2, 0, k\pi) = 4e^{-2} + \cos(k\pi) = 4e^{-2} \pm 1.$$

Dakle, za vrijednosti

$$c \in \{\pm 1, 4e^{-2} \pm 1\}$$

skup S sadrži stacionarne točke, pa nije ploha. Za sve ostale vrijednosti parametra c skup jest ploha.

4. (20) Izračunajte integral

$$\iiint_S \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, dx \, dy \, dz,$$

pri čemu je skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$ zadan s

$$S \dots \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \\ x \geq 0, y \geq 0, z \leq 0. \end{cases}$$

Rješenje. Skup S je jedna osmina jedinične kugle $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$.

Prikaz skupa S u sfernim koordinatama glasi

$$S \dots \begin{cases} 0 \leq r \leq 1 \\ 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ \frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi \end{cases}$$

Budući da je $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$, imamo $(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} = r^3$, pa polazni integral postaje

$$\begin{aligned} \iiint_S \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 \frac{r \sin \varphi \sin \theta}{r^3} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi \\ &= \int_0^{\pi/2} \int_{\pi/2}^{\pi} \int_0^1 \sin \varphi \sin^2 \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi = \left(\int_0^1 dr \right) \left(\int_{\pi/2}^{\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \right) \left(\int_0^{\pi/2} \sin \varphi \, d\varphi \right) = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$