

Matematika 2 za kemičare

pismeni ispit, 26. kolovoza 2026.

Franka Miriam Brückler i Matea Čelar

1. (20) Menadžerica luksuznog hotela na Jadranu treba pripremiti 50 poklon paketa za goste. Na raspolaganju ima 140 bombonijera i 130 boca pjenušca. Sadržaj poklon paketa ovisi o tipu sobe:

- paket za standardnu sobu sadrži 2 bombonijere i 1 bocu pjenušca
- paket za deluxe sobu sadrži 3 bombonijere i 3 boce pjenušca
- paket za premium sobu sadrži 5 bombonijera i 7 boca pjenušca.

Koliko paketa svakog tipa je moguće sastaviti? Odredite sva smisljena rješenja.

Rješenje. Postavimo sustav jednadžbi:

$$\begin{cases} x + y + z = 50 & (\text{ukupan broj paketa}) \\ 2x + 3y + 5z = 140 & (\text{ukupan broj bombonijera}) \\ x + 3y + 7z = 130 & (\text{ukupan broj boca pjenušca}). \end{cases}$$

Sustav rješavamo Gaussovom metodom eliminacija:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 2 & 3 & 5 & 140 \\ 1 & 3 & 7 & 130 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 2 & 6 & 80 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 50 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 10 \\ 0 & 1 & 3 & 40 \end{array} \right).$$

Imamo dvije jednadžbe i tri nepoznanice, pa će rješenje imati jedan parametar. Stavimo npr. $z = t$, pa iz matrice sustava čitamo rješenje:

$$x = 10 + 2t, \quad y = 40 - 3t, \quad z = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Kako nepoznanice x , y i z predstavljaju broj paketa, njihove vrijednosti moraju biti nenegativni cijeli brojevi, tj. t mora zadovoljavati

$$10 + 2t \geq 0, \quad 40 - 3t \geq 0, \quad t \geq 0.$$

Iz druge nejednadžbe slijedi $t \leq \frac{40}{3} \approx 13.333$. Kako t mora biti cijeli broj, zaključujemo $0 \leq t \leq 13$.

Dakle, ima ukupno 14 smislenih rješenja, i ona su dana s

$$\{(10 + 2t, 40 - 3t, t) : t \in \{0, 1, \dots, 13\}\}.$$

2. (20) Linearni operator $\hat{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ima spektar $\sigma(\hat{A}) = \{-1, 1\}$. Svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti 1 su $\{(s+t, s, t) : s, t \in \mathbb{R}\}$, a svojstveni vektori pridruženi svojstvenoj vrijednosti -1 su $\{(-t, t, t) : t \in \mathbb{R}\}$.

(a) (12) Odredite $\hat{A}(1, 2, 2)$, $(\hat{A} \circ \hat{A})(1, 2, 2)$ i $\hat{A}^{-1}(1, 2, 2)$.

(b) (8) Precizno geometrijski opišite djelovanje operatora $\hat{A}$. Je li $\hat{A}$ operator simetrije? Ako jest, odredite kojeg tipa i s kojim parametrima.

Rješenje.

(a) Iz zadanih informacija o spektru i svojstvenim vektorima znamo da je

$$\hat{A}(1, 1, 0) = (1, 1, 0), \quad \hat{A}(1, 0, 1) = (1, 0, 1), \quad \hat{A}(-1, 1, 1) = (1, -1, -1).$$

Kako je

$$(1, 2, 2) = (1, 1, 0) + (1, 0, 1) + (-1, 1, 1),$$

računamo redom:

$$\begin{aligned} \hat{A}(1, 2, 2) &= \hat{A}((1, 1, 0) + (1, 0, 1) + (-1, 1, 1)) \\ &= \hat{A}(1, 1, 0) + \hat{A}(1, 0, 1) + \hat{A}(-1, 1, 1) \\ &= (1, 1, 0) + (1, 0, 1) + (1, -1, -1) \\ &= (3, 0, 0), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\hat{A} \circ \hat{A})(1, 2, 2) &= \hat{A}(\hat{A}(1, 1, 0) + \hat{A}(1, 0, 1) + \hat{A}(-1, 1, 1)) \\ &= \hat{A}((1, 1, 0) + (1, 0, 1) + (1, -1, -1)) \\ &= \hat{A}(1, 1, 0) + \hat{A}(1, 0, 1) + \hat{A}(1, -1, -1) \\ &= (1, 1, 0) + (1, 0, 1) + (-1, 1, 1) \\ &= (1, 2, 2). \end{aligned}$$

$\hat{A}^{-1}(1, 2, 2)$ je vektor (x, y, z) takav da je $\hat{A}(x, y, z) = (1, 2, 2)$. Gore smo vidjeli da je $\hat{A}(\hat{A}(1, 2, 2)) = (1, 2, 2)$, pa je $(x, y, z) = \hat{A}(1, 2, 2) = (3, 0, 0)$.

(b) Iz danih informacija o svojstvenim vrijednostima i pripadnim vektorima vidimo da operator $\hat{A}$ ne mijenja vektore paralelne s $(1, 1, 0)$ i $(1, 0, 1)$. Zbog linearnosti on ne mijenja ni bilo koju linearnu kombinaciju tih dvaju vektora. Drugim riječima, on “ostavlja na miru” ravninu π razapetu sa $\vec{v} = (1, 1, 0)$ i $\vec{w} = (1, 0, 1)$.

Nadalje, uočimo da operator sve vektore paralelne s $\vec{u} = (-1, 1, 1)$ preslikava u njima suprotni vektor. Uočimo također da je vektor $\vec{u}$ okomit i na $\vec{v}$ i na $\vec{w}$, tj. okomit je na čitavu ravninu π . Prema tome, operator $\hat{A}$ je zrcaljenje s obzirom na ravninu π . (Posebno, on je operator simetrije).

3.

- (a) (10) Ispitajte konvergenciju reda

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} (1 + \sin(n))^n$$

- (b) (10) Razvijte funkciju $f(x) = \ln(\frac{1}{4} + x^2)$ u Taylorov red oko $c = 0$ i odredite radijus konvergencije tog reda.

Rješenje.

- (a) Označimo

$$a_n := \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} (1 + \sin(n))^n \quad \text{i} \quad b_n := \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \cdot 2^n.$$

Budući da je $0 \leq 1 + \sin(n) \leq 2$ i $\frac{n+1}{n+2} > 0$ za sve $n \geq 1$, zaključujemo da vrijedi $0 \leq a_n \leq b_n$ za sve $n \geq 1$.

Cauchyjevim kriterijem ispitujemo konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$:

$$\begin{aligned} L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|b_n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left(\frac{n+1}{n+2} \right)^{n^2} \cdot 2^n \right)^{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \left(\frac{n+1}{n+2} \right)^n = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^n \\ &= 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(1 - \frac{1}{n+2} \right)^{(n+2)} \right]^{\frac{n}{n+2}} = 2e^{-1}. \end{aligned}$$

Kako je $e > 2$, vrijedi $L = \frac{2}{e} < 1$, pa red $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira. Prema usporednom kriteriju, tada konvergira i red $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

- (b) Iskoristit ćemo poznati razvoj funkcije $\ln(1+x)$ u Taylorov red:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \quad \text{za } x \in \langle -1, 1 \rangle.$$

Preoblikujmo zadanu funkciju kako bismo mogli iskoristiti gornju formulu :

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln \left(\frac{1}{4} + x^2 \right) = \ln \left(\frac{1}{4} \cdot (1 + 4x^2) \right) = \ln \frac{1}{4} + \ln (1 + 4x^2) \\ &= \ln \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{(4x^2)^n}{n} = \ln \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{n} x^{2n}. \end{aligned}$$

Prema tome, traženi Taylorov red funkcije $f(x)$ oko $c = 0$ glasi:

$$f(x) = \ln \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 4^n}{n} x^{2n}.$$

Red konvergira za sve x koji zadovoljavaju

$$4x^2 \in \langle -1, 1 \rangle \implies x^2 \in \langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle \implies x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}].$$

Dakle, radijus konvergencije reda je $R = \frac{1}{2}$.

4. (20) Zadana je funkcija $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 4x^2 + 4y^2 - z^2 + 2z$.

(a) (7) Odredite i klasificirajte sve stacionarne točke funkcije f .

(b) (3) Za koje vrijednosti parametra $c \in \mathbb{R}$ skup $S \subseteq \mathbb{R}^3$,

$$S \dots f(x, y, z) = c,$$

jest, a za koje nije ploha? Obrazložite svoj odgovor.

(c) (10) Odredite točku plohe

$$S \dots f(x, y, z) = -3$$

najbližu ishodištu.

Rješenje.

(a) Parcijalne derivacije prvog reda su:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = 8x, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = 8y, \quad \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) = -2z + 2.$$

Izjednačavanjem parcijalnih derivacija s nulom dobivamo sustav:

$$\begin{cases} 8x = 0 \implies x = 0, \\ 8y = 0 \implies y = 0, \\ -2z + 2 = 0 \implies z = 1. \end{cases}$$

Prema tome, jedina stacionarna točka funkcije f je $T(0, 0, 1)$.

Za klasifikaciju stacionarne točke računamo Hesseovu matricu:

$$(Hf)(0, 0, 1) = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Kako su minore redom $A_1 = 8 > 0$, $A_2 = 64 > 0$, $A_3 = -128 < 0$, T nije točka lokalnog ekstrema, tj. T je sedlasta točka.

(b) Prema teoremu s predavanja/vježbi, nivo-skup $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : f(x, y, z) = c\}$ je ploha u $\mathbb{R}^3$ ako je $\nabla f(P) \neq (0, 0, 0)$ za sve točke $P \in S$, odnosno ako S ne sadrži nijednu stacionarnu točku od f .

Iz dijela (a) znamo da jedina stacionarna točka $T(0, 0, 1)$. Vrijednost funkcije u toj točki je $f(0, 0, 1) = 1$, pa je S ploha za $c \neq 1$, a nije ploha za $c = 1$.

- (c) Treba minimizirati udaljenost točke (x, y, z) od ishodišta, što je ekvivalentno minimiziranju funkcije $(x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2$. Pri tome je uvjet da točka (x, y, z) leži na plohi S , tj. mora vrijediti

$$g(x, y, z) := 4x^2 + 4y^2 - z^2 + 2z + 3 = 0.$$

Koristimo metodu Lagrangeovih multiplikatora. Definiramo Lagrangeovu funkciju:

$$F(x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 - \lambda(4x^2 + 4y^2 - z^2 + 2z + 3).$$

Sustav jednadžbi za stacionarne točke glasi:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z, \lambda) = 2x - 8\lambda x = 2x(1 - 4\lambda) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z, \lambda) = 2y - 8\lambda y = 2y(1 - 4\lambda) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z, \lambda) = 2z + 2\lambda z - 2\lambda = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda}(x, y, z, \lambda) = -(4x^2 + 4y^2 - z^2 + 2z + 3) = 0 \quad (4)$$

Promotrimo prvo jednadžbe (1) i (2):

- Ako je $1 - 4\lambda = 0 \implies \lambda = \frac{1}{4}$, uvrštavanjem u (3) dobivamo:

$$2z \left(1 + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{2} = 0 \implies \frac{5}{4}z = \frac{1}{4} \implies z = \frac{1}{5}.$$

Uvrštavanjem $z = \frac{1}{5}$ u jednadžbu uvjeta (4):

$$4(x^2 + y^2) - \left(\frac{1}{5}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{5}\right) + 3 = 0 \implies 4(x^2 + y^2) + \frac{84}{25} = 0,$$

što nema realnih rješenja jer je $4(x^2 + y^2) \geq 0$.

- Stoga mora biti $1 - 4\lambda \neq 0$, pa iz (1) i (2) slijedi:

$$x = 0 \quad \text{i} \quad y = 0.$$

Uvrštavanjem $x = 0$ i $y = 0$ u jednadžbu uvjeta (4) dobivamo:

$$-z^2 + 2z + 3 = 0 \iff z^2 - 2z - 3 = 0 \iff (z - 3)(z + 1) = 0.$$

Slijedi da imamo dva kandidata za uvjetne ekstreme:

$$T_1(0, 0, 3) \quad \text{i} \quad T_2(0, 0, -1).$$

Računamo njihove udaljenosti od ishodišta:

$$d(O, T_1) = \sqrt{0^2 + 0^2 + 3^2} = 3, \quad d(O, T_2) = \sqrt{0^2 + 0^2 + (-1)^2} = 1.$$

Dakle, točka plohe S najbliža ishodištu je točka $(0, 0, -1)$.

5. (20) U dva spojena spremnika se u svakom trenutku t nalaze vodene otopine neke soli. Otopine se stalno miješaju te se može pretpostaviti da su u svakom trenutku homogene. Počevši od nekog trenutka, u kojem oba spremnika sadrže isti volumen otopine, u prvi spremnik se počinje ulijevati čista voda brzinom 2 L/min, a iz njega se u drugi spremnik izlijeva otopina brzinom 3 L/min. Počevši od istog trenutka, iz drugog spremnika se u prvi otopina prelijeva brzinom 1 L/min, a iz njega se otopina izlijeva izvan sustava brzinom od 2 L/min.

- (a) (12) Postavite sustav običnih diferencijalnih jednadžbi za ovisnosti masa soli u oba spremnika o vremenu i skicirajte njegov fazni dijagram. Sustav ne trebate rješavati i u skladu s time nije potrebno određivati dijelove ravnine koje odgovaraju različitim kombinacijama predznaka konstanti integriranja u općem rješenju.
- (b) (4) Temeljem faznog dijagrama argumentirajte hoće li se mase soli u (ni)jednom ili oba spremnika s vremenom približavati nuli ili neograničeno povećavati.
- (c) (4) Na skici faznog dijagrama istaknite trajektorije koje odgovaraju početnim uvjetima kad drugi od spremnika na početku sadrži čistu vodu!